Digitized by Google

Math. P. 373 f

Nesselmann

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Digitized by Google

Versuch

einer

kritischen Geschichte

der

Algebra.

Nach den Quellen bearbeitet

von

Dr. G. H. F. Nesselmann,

Privat-Docenten an der Universität zu Königsberg.

Erster Theil.

Die Algebra der Griechen.

Berlin,

Verlag von G. Reimer.

1842.

Digitized by Google

Die

Algebra

der

Griechen.

Nach den Quellen bearbeitet

von

Dr. G. H. F. Nesselmann,

Privat-Docenten an der Universität zu Königsberg.

Berlin,

Verlag von G. Reimer.

1842.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Digitized by Google

Seinen verehrten Lehrern

Herrn

Professor Dr. C. G. J. Jacobi

in Königsberg

und

Herrn

Professor [illegible] Buchner

in Elbing

als ein schwaches Zeichen seiner Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

von

dem Verfasser.

Digitized by Google

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Ihr geiſtreicher mathematiſcher Unterricht, meine hochverehrten Herren, hat in mir das Intereſſe für die Geſchichte dieſer Wiſſenſchaft theils auf der Schule zuerſt geweckt, theils auf der Univerſität immer mehr und mehr genährt. Ich thue alſo, indem ich Ihnen dieſe Bogen widme, nicht viel mehr, als daß ich Ihnen das erſte auf der von Ihnen in Bewegung geſetzten Maſchine gewonnene Product zur Anſicht und Beurtheilung vorlege. Nehmen Sie es gütig auf! Und wenn das gegenwärtige Erzeugniß auch noch weiter nichts als Nachſicht verdienen ſollte, ſo hoffen Sie mit mir auf die Zukunft. Der Geiſt iſt das wahre Perpetuum Mobile, die einzige Ma-

Digitized by Google

ſchine, die ſich durch den Gebrauch nicht abnutzt, ſondern ſchärft. Empfangen Sie meinerſeits die Verſicherung, daß eine wenigſtens nicht ganz ungünſtige Beurtheilung von Ihnen mit zu den ſchönſten Belohnungen gehören würde, die ich mir von meiner Arbeit verſpreche.

G. H. F. Neſſelmann.

Digitized by

Vorrede.

Indem ich dem gelehrten Publicum hiemit den erſten Band eines größern Werks in die Hände liefere, wird es nur weniger Worte bedürfen, um einigermaßen den Standpunct anzugeben, von dem aus es beurtheilt zu werden wünſcht. Es war nicht meine Abſicht, aus ältern Geſchichtswerken eine Menge hiſtoriſcher Data zu excerpiren und dieſelben in eine friſche Form gießend dem Publicum ein angenehmes Unterhaltungsbuch zu liefern, aus welchem Weniger-Unterrichtete allenfalls hie und da auch etwas Neues lernen könnten. Ebenſo wenig lag es in meinem Plane, ein Conglomerat flüchtig von der Oberfläche aufgeraffter Thatſachen, die man nach Willkühr reckt und modelt, auf das Prokruſtesbette eines philoſophiſchen Syſtems zu ſpannen. Ich wollte, wie der Titel beſagt, eine kritiſche Geſchichte ſchreiben, ich wollte die Geſchichte der Algebra, nicht wie die Tradition ſie lehrt, ſondern wie ſie ſich aus dem ausdauernden und ge-

wissenhaften Studium der Quellen ergiebt, erforschen und demgemäß treu darstellen. Aber das Grundelement der Kritik ist der Zweifel. Darum habe ich aus frühern Geschichtswerken keine Thatsache eher als solche angenommen, als bis die eigene Anschauung mich von der Wahrheit und Haltbarkeit derselben überzeugt hatte. Begreiflicherweise habe ich bei diesem Geschäfte oft Gebäude niederreißen müssen, und bin leider nicht immer im Stande gewesen, auf den Ruinen einen neuen Bau aufzuführen. Ob ich aber bloß niedergerissen habe, mögen sachverständige und wohlwollende Leser beurtheilen.

Vielleicht dürfte Einer und der Andre der Meinung sein, als habe ich Manches in den Bereich meiner Darstellung hereingezogen, was derselben hätte fern bleiben sollen. Der Vorwurf ist vielleicht gerecht, vielleicht auch nicht; über Ansichten läßt sich indeß schwer rechten. Jedenfalls aber ertrüge ich den Vorwurf, mehr als nöthig gegeben zu haben, lieber als den entgegengesetzten.

Eine beschränkte, oft drückende äußere Lage, der Aufenthalt neben einer sehr unvollständigen öffentlichen Bibliothek, der fast gänzliche Mangel an genügenden Vorarbeiten, und Mißverhältnisse mancher Art, die mir oft die zu dem Gelingen eines solchen Werkes erforderliche freudige Stimmung und Gemüthsruhe raubten, haben meine Arbeit zu ei-

Digitized by Google

nem faſt ununterbrochenen Ankämpfen gegen innere und äußere Hinderniſſe gemacht. Mehr als einmal drohten die Hinderniſſe mich zu überwältigen, und ich war zuweilen nahe daran, das begonnene Werk über den Haufen zu werfen. Immer aber ſiegte wieder das einmal gewonnene und lange genährte Intereſſe für den Gegenſtand, und je größer die Hinderniſſe waren, die ich zu bekämpfen hatte, mit deſto größerer Freude ſehe ich jetzt den erſten Theil der mühevollen, ſorgenreichen Arbeit vollendet. Ob das Publicum ebenſovielen Grund haben wird, ſich darüber zu freuen, weiß ich nicht; jedenfalls aber hoffe ich, bei billigen Beurtheilern einige Nachſicht zu finden, wenn ſie die Spuren meiner innern Stimmung der Arbeit hie und da eingedrückt ſehen.

Nicht weniger ungünſtig waren die Schickſale des fertigen Manuſcripts. Zuerſt war ich genöthigt, daſſelbe vor ſeiner völligen Vollendung bogenweiſe aus den Händen zu geben, was den kleinen Übelſtand herbeigeführt hat, daß manche gelegentliche Bemerkung ſich zweimal vorfindet, wofür ich die Leſer gebührender Weiſe um Entſchuldigung bitten muß. Sodann ſah ich mich, nachdem die erſten achtzehn Bogen nicht ohne langen, unnützen Zeitverluſt abgedruckt waren, genöthigt, einen neuen Verlag zu ſuchen, und es vergingen wieder beinahe acht Monate, bis ich mein Werk in den Händen des jetzigen Herrn Verlegers für immer geſichert ſah.

Digitized by Google

Alle dieſe Mißverhältniſſe haben das Erſcheinen dieſes Bandes um beinahe zwei Jahre verzögert.

Die Entfernung vom Druckorte geſtattete mir nur ausnahmsweiſe, die Correctur ſelbſt zu beſorgen; es iſt daher nicht meine Schuld, daß in der erſten Hälfte des Werks eine mehr als gebührliche Anzahl zum Theil arger Druckfehler mit in den Kauf kommt. Der jetzige Herr Verleger hat auch dafür Sorge getragen, daß die Correctur den Händen eines ſachverſtändigen und ſelbſt als mathematiſcher Schriftſteller bekannten Gelehrten anvertraut iſt.

G. H. F. Neſſelmann.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Kapitel.

Einleitung. Vorarbeiten. Plan gegenwärtigen Werkes.

S. 1—39.

Seite

Historiographen der Mathematik bei den Griechen 1
Peter Ramus 8
Joseph Blancanus 9
Gerh. Joh. Vossius 10
Joh. Wallis 11
Milliet Dechales 12
J. C. Heilbronner 15
J. N. Frobesius 17
J. F. Montucla 18
Saverien 19
A. G. Kästner 24
P. Cossali 25
Charles, Bossut 27
Delambre 28
Chasles 29
Vorläufiger Überblick über die Geschichte 30
Perioden derselben 34
Über Citate 35
Über Darstellung älterer Ansichten 37

Zweites Kapitel.

Über die verschiedenen Namen der Algebra.

S. 40—61.

Arithmetik, Logistik bei den Griechen 40
Namen der Algebra bei den Indern 44
Bei den Arabern 45
Algebra et Almucabala, Algebra, bei den Abendländern 51
Ars magna, arte maggiore 53
Practica speculativa 54

Seite
Ars rei et census, arte della cosa, ars cossica, die Coß 55
Arithmetica speciosa Arithm. universalis 58
Ars analytica, Analysis 59

Drittes Kapitel.

Über Zahlensysteme und Zahlzeichen.
S. 62—104.

Historisches über den Ursprung der Zahlzeichen 62
Verschiedene Methoden der Zahlenbezeichnung 65
Zahlensysteme der Sprachen 69
Semitisch-Griechisches Zahlensystem 72
Griechisches Myriadensystem bei Camerarius und Montfaucon 81
System des Noviomagus bei Heilbronner 83
System des Herodianus 84
Römisches Zahlensystem 86
Über die Stelle in Boethius Geometrie, welche den Pythagoräern das Zahlensystem mit Stellenwerth zuschreibt 92

Viertes Kapitel.

Die Logistik der Griechen.
S. 105—148.

Gebrauch der Zahlen. Älteste Arten zu rechnen 105
Archimed's Kreismessung nebst Eutokius Commentar 108
Archimed's Psammites 122
Multiplicationsregeln des Apollonius, nach Pappus 125
Sexagesimalrechnung der Astronomen 136

Fünftes Kapitel.

Die Griechische Arithmetik.
S. 149—242.

Pythagoras, Platon, Archytas. Rechtwinkliges Dreieck in rationalen Zahlen 149
Euklides. Zweites Buch der Elemente, identische Zahlenformeln. Barlaams Bearbeitung derselben 153
Siebentes bis neuntes Buch. Rationale Arithmetik 156
Zehntes Buch. Irrationale Arithmetik 165
Sieb des Eratosthenes 186
Nikomachus Einleitung in die Arithmetik 188
Erstes Buch 191
Zweites Buch 200
Sein Verhältniß zu Euklides 217
Bearbeitungen und Literatur seines Werks 220
Theon von Smyrna 223
Thymaridas 232
Jamblichus 236

Digitized by Google

Sechstes Kapitel.

Historisches über Diophantus und seine Schriften.

S. 243—293.

Seite

I. Diophantus oder Diophantes? 244
Diophant's Zeitalter. Jenseitige Grenze 245
Diesseitige Grenze 247
Resultat 251
II. Schicksale seines Werks. Mangelhaftigkeit der vorhandenen Handschriften 256
Zeugnisse für das einstmalige Vorhandensein der dreizehn Bücher 257
Was und wieviel uns fehlt, wo und seit wann? 264
III. Literatur. Commentar des Maximus Planudes 273
Arabische Bearbeitung des Mohammed Abulwafa 274
Erste Bekanntschaft der Abendländer mit Diophant 276
Bombelli's beabsichtigte Übersetzung 277
Übersetzung von W. Xylander 278
Übersetzung von Joseph Auria 280
Erste Griechische Ausgabe von Bachet de Meziriac 281
Zweiter Abdruck derselben mit Fermat's Randglossen 282
Die Schrift über die Polygonzahlen ins Deutsche übersetzt von Poselger 283
Vollständige Deutsche Übersetzung von Otto Schulz 283
IV. Ob Diophant Erfinder der Algebra gewesen 284

Siebentes Kapitel.

Form der Diophantischen Algebra.

S. 294—313.

Symbole und Rechnungszeichen 294
Wesen seiner Bezeichnungsmethode und ihr Verhältniß zu andern Methoden 300
Die Schranken, in welche sie ihn einschließt 305

Achtes Kapitel.

Diophant's Behandlung der Gleichungen.

S. 314—354.

I. Bestimmte Gleichungen. 1. Ungemischte 315
2. Gemischte quadratische Gleichungen 317
3. Kubische Gleichungen 328
II. Unbestimmte Gleichungen 329
1. Des zweiten Grades. a) Einfache Gleichung 329
b) Doppelte Gleichung 335
2. Höherer Grade. a) Einfache Gleichung 343
b) Doppelte Gleichung 352
Nachträgliche Übersicht 353

Neuntes Kapitel.

Diophant's Auflösungsmethoden.

S. 355—436.

1. Geschickte Annahme der Unbekannten 356

Seite

2. Methode der Zurückrechnung und Nebenaufgabe 369
3. Gebrauch des Symbols für die Unbekannte in verschiedenen Bedeutungen 382
4. Methode der Grenzen 391
Methode der Beinahegleichheit 401
5. Auflösung durch bloße Reflexion 405
6. Auflösung in allgemeinen Ausdrücken 413
7. Willkührliche Bestimmungen und Annahmen 421
8. Gebrauch des rechtwinkligen Dreiecks 435

Zehntes Kapitel.

Diophant's Porismata.
S. 437—461.

Über Porismata überhaupt 437
Die drei Diophantischen Porismata 440
Identische Zahlenformeln 446
Zerlegbarkeit der Zahlen in Quadrate 450

Elftes Kapitel.

Diophant's Schrift über die Polygonalzahlen.
S. 462—476.

Inhalt der Schrift 463
Behandlungsweise des Stoffs 470

Zwölftes Kapitel.

Die arithmetischen Epigramme der Griechen.
S. 477—491.

Die Griechische Anthologie 477
Das von Lessing bekannt gemachte Epigramm, vorgeblich aus Archimedes Zeit 481

Zusätze und Berichtigungen 492

Erstes Kapitel.

Einleitung. Vorarbeiten. Plan gegenwärtigen Werkes.

Sobald in einem Volke die ersten Keime des Selbstbewußtseins erwachen, regt sich in ihm das Bedürfniß nach einer Nationalgeschichte, welche jenes aufstrebende Selbstbewußtsein zur Vollendung bringe. Ein Volk ohne Geschichte ist ein Kopf, der den Körper nicht sieht, auf dem er steht; es ist eine Gegenwart, der das Bewußtsein fehlt, daß sie auf einer thatsächlichen Vergangenheit beruht. In diesem drückenden Gefühle der Leere und der Bewußtlosigkeit früherer Existenz entwickelt sich bei den Völkern, sobald sie auf eine gewisse Stufe der geistigen Cultur getreten sind, zuerst das historische Element in der Form des Nationalepos und geht von da allmählig in wirkliche Geschichte über. Diese Thatsache beweisen uns fast alle Völker des Alterthums, welche nicht auf dem ursprünglichen Standpuncte der rohen Natur stehen geblieben sind, und es gehört zu den Ausnahmen, welche indeß wohl in örtlichen oder sonst speciellen Beziehungen ihren Grund haben, wenn ein gebildetes Volk, wie z. B. das Indische, den Schritt vom Epos zur eigentlichen Geschichte nicht gemacht hat.

Dieses nämliche Bedürfniß nach Geschichte, welches emporstrebende Völker beseelt, läßt sich auch unter den Verehrern und Fortbildnern der Wissenschaften und Künste wahrnehmen, und zwar um so deutlicher und bestimmter, je mehr den letzteren der Stoff zu ihrer Fortbildung von innen her zukommt; am frühesten sind daher die Fortschritte der Theologie, der Mathematik und der Poesie geschichtlich bearbeitet worden. Indem ich es Anderen überlasse, die Wahrheit dieser Bemerkung an den andern Wissenschaften nachzuweisen, wende ich mich ausschließlich zu derjenigen unter ihnen, deren Geschichte der Zweck gegenwärtigen Buches ist.

Die Geschichte der Mathematik ist, wie es scheint, sehr frühe behandelt worden. Ein gewisser Perigenes, dessen Zeitalter mir nicht bekannt ist, soll über die Mathematiker der Chaldäer geschrieben

Digitized by Google

haben, jedoch ist die Nachricht unsicher [1]). Interessanter und bestimmter ist die Kenntniß, daß zwei Schüler des Aristoteles, nämlich Theophrastus von Lesbos und Eudemus aus Rhodus Geschichten der Mathematik geschrieben haben. In dem von Diogenes Laertius gegebenen Cataloge der fast unzähligen Schriften Theophrast's befindet sich eine Geschichte der Geometrie in vier Büchern (Ἱστοριῶν γεωμετρικῶν α' β' γ' δ' [2])), eine Geschichte der Astronomie in sechs Büchern (Ἀστρολογικῆς ἱστορίας α' β' γ' δ' ε' ϛ') und eine Geschichte der Arithmetik in einem Buche (Ἀριθμητικῶν ἱστοριῶν α') [3]). Alle drei Werke sind verloren gegangen, und meines Wissens ist diese Nachricht bei Diogenes Laertius die einzige, welche uns Kunde von denselben giebt; wenigstens habe ich bei keinem andern griechischen Auctor jene Geschichten citirt gefunden, und ob zwei Stellen aus des Simplicius Commentar über Aristoteles de coelo lib. II., welche Menage [4]) anführt, gerade sich auf die Geschichte der Astronomie beziehen, wie Meursius glaubt, ist ungewiß.

Der zweite, Eudemus, hat eine Geschichte der Geometrie (γεωμετρικὴ ἱστορία) und eine Geschichte der Astronomie geschrieben. Die erstere nennen Proklus [5]) und Eutokius [6]), die zweite citiren Diogenes Laertius, Anatolius und Clemens Alexandrinus [7]). Auch

---

1) In dem Index VII der Historia Philosophiae aut. Th. Stanlejo (Lips. 1711. 4to.) heißt es in dem Artikel Mars: „audi Scholiastem Apollonii „ad III. Arg. v. 1375. ubi de planeta Martis: Περιγέτης, ait, ἐν τῷ περὶ „τῆς Χαλδαϊκῆς (ita legendum vidit I. Rutgers. Var. Lect- Lib. V. c. VI.) „τῶν Μαθηματικῶν etc." Für Χαλδαϊκῆς wird nämlich Χαλκιδικῆς gelesen. Vergl. Fabricii bibl. Graeca L. III. p. 540. (ed. 1716).

2) Ed. Meibomii l. V. sign. 48. p. 292. (Ἱστορικῶν Druckfehler).

3) ib. sign. 50.

4) V. In Diog. Laertium Aeg. Menagii observationes et emendationes etc., welche den zweiten Theil der Meibom'schen Ausgabe ausmachen, p. 212.

5) S. dessen Commentar über das erste Buch der Euklidischen Elemente am Ende des dritten Buchs; ed. Basil. p. 92. Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα. Vergl. außerdem ebend. S. 79. 87. 99. 109. Seite 35 citirt Proklus desselben Verfassers βιβλίον περὶ γωνίας.

6) S. dessen Commentar über Archimed's κύκλου μέτρησις in der Einleitung (S. 77. der Gutenäckerschen Ausgabe). Eutokius nennt den Titel der Schrift im Singularis.

7) Diog. I, 23. erzählt, daß Thales zuerst Astronomie getrieben und Sonnenfinsternisse vorhergesagt habe, ὡς φησιν Εὔδημος ἐν τῇ περὶ τῶν ἀστρολο-

dieſe beiden Werke ſind nicht bis auf unſere Zeit gekommen, und die Citate bei Diogenes, Eutokius, Proklus u. ſ. w., von denen die des Letzteren meiſtens die Erfinder einzelner geometriſcher Sätze angeben, ſind Alles, was wir davon übrig behalten haben. Dieſer Verluſt iſt um ſo mehr zu bedauern, als die Geſchichte ſowohl Eudem's als Theophraſt's gerade eine Periode zu ihrem Gegenſtande hatte, welche jetzt wohl für uns immer in ein magiſches Dunkel gehüllt bleiben wird, nämlich die Zeit vor Euklides.

Wenn eine Lesart bei Diogenes Laertius richtig iſt, ſo kann man vermuthen, daß auch Xenokrates, ein Zeitgenoſſe der beiden vorigen, außer einem Werke über Geometrie noch ein mathematiſch-hiſtoriſches Werk geſchrieben hat. Es findet ſich nämlich in dem Katalog ſeiner Werke eines unter dem Titel περὶ γεωμετρῶν βιβλία ε', de geometris libri quinque [8]), das in dieſem Sinne noch nirgend aufgeführt iſt. Einige Hiſtoriker, wie Ramus, Blancanus, Heilbronner [9])

γουμένων ἱστορίᾳ. Dazu ſagt Menage: Idem testatur et Clemens Stromat. I. Θαλῆν δὲ Εὔδημος ἐν ταῖς ἀστρολογικαῖς ἱστορίαις τὴν γενομένην ἔκλειψιν τοῦ ἡλίου προεικεῖν φησί etc. (alſo mit abweichendem Titel; der Titel, wie Diogenes ihn ausſpricht, iſt wahrſcheinlich richtiger, weil die Form deſſelben nicht ſo gewöhnlich iſt). Idem ex ejusdem Eudemi Astrologica historia prodidit Theo Smyrnaeus. (Der aſtronomiſche Theil ſeines Werks iſt noch nicht gedruckt worden.) At Proclus in IV. primi Euclidis testatur Thaleti hoc ab Eudemo tribui ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις. Potuit idem utroque in opere dixisse, ait Vossius de Historicis Graecis lib. 3. ubi eum vide. Nun befinden ſich aber die aus Proklus beigebrachten Worte nicht im vierten, ſondern, wie in Note 5. geſagt iſt, am Ende des dritten Buchs; dazu kommt noch, daß an dieſer Stelle ſo wenig, wie an irgend einer andern des Commentars von Proklus von einer Sonnenfinſterniß die Rede iſt. Vielmehr ſagt Proklus, Eudemus ſchreibe in ſeinen geometriſchen Geſchichten die Erfindung des Satzes Eukl. Elem. I, 26. (Congruenz zweier Dreiecke aus Gleichheit zweier Winkel und einer Seite) dem Thales zu. Wir haben hier alſo ein Beiſpiel, wie ein falſches Citat ſich fortpflanzt, weil Einer dem Andern es nachcitirt, ohne auf die Quelle zurückzugehen. — Anatolius in dem von Fabricius mitgetheilten Fragment (Bibl. gr. L. III. p. 277.) ſagt: Εὔδημος ἱστορεῖ ἐν ταῖς ἀστρολογίαις ὅτι Οἰνοπίδης εὗρε πρῶτος τὴν τοῦ ζωδιακοῦ διάζωσιν etc. Das ſoll doch wohl dieſelbe Geſchichte der Aſtronomie ſein.

8) Diog. Laert. IV, 13. Aber ein Cod. Cantabrig. lieſt περὶ γεωμετρικῶν βιβλία ε'. De rebus geometricis libri V. Dann hat Xenokrates zwei Werke über Geometrie geſchrieben; denn in demſelben Capitel wird noch περὶ γεωμετρίας α' β', de geometria duo (libri) genannt.

9) *P. Rami scholae muthem.* p. 21. nach der zweiten Lesart: de geometria duos, de geometricis rebus quinque. *J. Blancani chronol. ma-*

Digitized by Google

u. A. nehmen es als ein Werk über Geometrie, vielleicht auf Grund der andern Lesart, Andere, wie Dechales und Montucla, nennen es gar nicht. Da es indeß ebenfalls verloren ist, so möge es genügen, hier bloß darauf aufmerksam gemacht zu haben.

Nun scheint die Geschichte der Mathematik viele Jahrhunderte hindurch nicht wieder bearbeitet worden zu sein. Zwar wird von Ramus, Blancanus, Weidler, Montucla, Saverien u. A. [10]) erzählt, daß Geminus von Rhodus (Proklus schreibt überall Γεμῖνος; wenn das richtig ist, ist es wohl nicht der lateinische Name. Suidas hat nur Γεμίνιος, ὄνομα κύριον) Verfasser eines Werkes sei, welches sie enarrationes geometricae nennen; es ist mir aber bis jetzt nicht gelungen, die Quelle aufzufinden, aus welcher diese Nachricht hervorgegangen ist. Einige von ihnen geben Proklus als Quelle an; das ist aber unrichtig; zwar wird allerdings Geminus von Proklus oft genannt, aber ich habe an keiner Stelle seines Commentars irgend eine Hindeutung auf ein historisches Werk dieses Mathematikers finden können; vielmehr scheint Geminus ein theoretisches, und nach Proklus Ausdrücken zu schließen, ein vorzügliches Lehrbuch der Geometrie geschrieben zu haben, dessen Auctorität Proklus bei widerstreitenden Ansichten über geometrische Vorstellungen in der Regel als letzte Entscheidung in Anspruch nimmt [11]).

---

them. p. 45. Xenocrates Chalcedonius Platonis auditor de geometria primum duos, deinde quinque lib. composuit. Das ist Conjectur; denn bei Diogenes werden a. a. O. die fünf Bücher περὶ γεωμετρῶν oder γεωμετρικῶν eher genannt, als die beiden περὶ γεωμετρίας. *Heilbronner, hist. math. univ.* p. 155. schreibt wörtlich aus Blancanus ab. Vergl. Fabricii Bibl. Graeca L. III. p. 68.

10) *Rami schol. math.* p. 35. Libros geometricarum enarrationum sex conscripserat, a quibus plerisque in locis Proclus est adjutus. *Blancani chron. math.* p. 45. Scripsit praetera lib. 6. geometricarum enarrationum. *Weidler historia astronomiae* (Vitemb. 1741. 4to) p. 145. Contexuerat enim Geminus libros VI. enarrationum geometricarum, quibus passim Proclus fuit adjutus. *Montucla hist. des mathém.* T. 1. p. V. préf. Enfin peu avant l'ère chrétienne Géminus avoit de nouveau écrit l'histoire de la géometrie. Die genaueste Kenntniß von diesem Werke scheint *Savérien* zu haben; er sagt nämlich (Hist. des progrès de l'esprit humain p. 77.): Il composa un ouvrage divisé en six livres, intitulé Enarrationes Geometricae (schwerlich, denn Gem. war ein Grieche), dans lequel il exposa d'une manière fort claire les découvertes les plus importantes.

11) Ich will hier zur Begründung meiner Aussage alle Stellen des Commentars von Proklus nennen, in welchen Geminus citirt wird, und zwar nach

Digitized by Google

Ja eine Stelle bei Proklus scheint sogar geradezu anzudeuten, daß seit dem vierten Jahrhundert v. Chr., d. h. seit Theophrast's und Eudem's Zeiten, keine neue Geschichte der Geometrie mehr erschienen ist. Der genannte Auctor giebt nämlich in dem vierten Capitel des zweiten Buchs seines Commentars eine interessante historische Übersicht über die berühmtesten Mathematiker von Thales bis Euklides, und sagt daselbst, bevor er Euklides selbst nennt: *οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς*

---

der Ausgabe des Originals (Basileae 1533 fol. bei Euklid) und nach der lateinischen Übersetzung des Barocius (Patavii 1560 fol.).

Ed. p.	11	l.	30	Bar. p.	22	l.	6
= =	29	=	31	= =	61	=	14
= =	31	=	3	= =	63	=	34
= =	—	=	29	= =	64	=	35
= =	32	=	47	= =	67	=	27
= =	49	=	18	= =	100	=	31
= =	—	=	33	= =	101	=	17
= =	51	=	8	= =	104	=	12
= =	—	=	27	= =	105	=	5
= =	—	=	37	= =	—	=	21
= =	52	=	3	= =	106	=	12
= =	—	=	44	= =	108	=	2
= =	—	=	48	= =	—	=	8
= =	53	=	39	= =	110	=	18
= =	56	=	13	= =	116	=	8
= =	66	=	10	= =	139	=	2
= =	—	=	11	= =	—	=	4
= =	68	=	4	= =	143	=	11
= =	—	=	6	= =	—	=	15
= =	74	=	38	= =	159	=	12

Ich möchte vermuthen, daß alle in der vorigen Note genannten Auctoren ihre Angabe aus dem Elenchus librorum, qui in eodem hoc volumine citati sunt welchen Barocius seiner Übersetzung vorausgeschickt, entnommen haben. Da finden wir nämlich Libri geometricarum enarrationum Geminᵢ. Es kann dieses ein ursprünglicher Irrthum des Übersetzers sein, indem er aus den häufigen Citaten des Geminus und aus der Analogie der geometrischen Geschichten des Eudemus auf ein ähnliches Werk des ersteren geschlossen hat. Die sechs Bücher, in welche das Werk des Geminus eingetheilt gewesen sein soll, rühren wahrscheinlich von einer zweiten Verwechselung her, indem Eutokius in dem Commentar zu Apollonius Kegelschnitten des Geminus sechstes Buch praeceptionum mathematicarum citirt (der Comm. des Eutokius zu Apollonius ist bis jetzt nur lateinisch gedruckt). Vielleicht auch, daß eine alte Übersetzung da schon den Ausdruck enarrationum gebraucht.

Digitized by Google

ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν[12]), d. h. „Diejenigen, welche die Geſchichten (nämlich der Geometrie) geſchrieben haben, haben bis hieher die Entwickelung der Wiſſenſchaft fortgeführt.“ Der letztgenannte Mathematiker iſt ein gewiſſer Philippus[13]), ein Schüler Plato's; bis auf ihn alſo erſtreckten ſich die damals vorhandenen Geſchichten der Mathematik. Dieſelben hörten alſo da auf, wo für uns, denen die vor-euklidiſche Zeit immer noch wie eine kaum anbrechende Morgenröthe in mehr als Halbdunkel gehüllt erſcheint, die Geſchichte recht eigentlich erſt anfängt. Schwerlich aber würden wohl ſpäter lebende Hiſtoriographen, wie Geminus, der etwa ein halbes Jahrhundert vor Chr. lebte, hier aufgehört und die erſt von Euklides in eine wiſſenſchaftliche Form gebrachte Geometrie ohne Geſchichte gelaſſen haben; Stoff gaben wohl, um Mehrer nicht zu gedenken, die noch nach Jahrtauſenden angeſtaunten Arbeiten eines Archimedes und Apollonius in reichem Maaße her. Alſo iſt wohl von Eudemus bis zur Zeit des Proklus im fünften Jahrhundert nach Chriſto keine neue Geſchichte der Geometrie erſchienen.

Und doch haben wir noch vor Proklus eine Geſchichte, und zwar eine pragmatiſche Geſchichte der Mathematik und der Geometrie insbeſondre, die aber Proklus, obgleich er den Verfaſſer derſelben mehrmals nennt, nicht als eine ſolche anzuerkennen ſcheint. Es iſt das allbekannte und nicht genug zu ſchätzende Werk von Pappus aus dem vierten Jahrhundert. Der berühmte Verfaſſer giebt in ſeinen Μαθηματικαὶ συναγωγαὶ in acht Büchern, von denen aber leider die beiden erſten bis auf ein kleines Fragment des zweiten, von welchem weiter unten die Rede ſein wird, verloren gegangen ſind, eine herrliche Überſicht über die Leiſtungen ſeiner Landsleute in der Geo-

12) Ed. Bas. p. 19. Bar. p. 39.

13) In der Baſeler Ausgabe heißt er Φίλιππος ὁ Μεταῖος. Ebenſo bei Dechales cursus mathem. T. 1. p. 8. Barocius giebt Ph. Mendaeus, und ſo die Meiſten, z. B. Ramus l. l. p. 20. Blancanus p. 44. Dechales p. 65. u. A. — Fabricius (Bibl. Gr. L. III. p. 385. 386.) und daraus wahrſcheinlich Frobeſius (Histor. et dogmat. in mathesin introd. p. 99—101) haben dieſes Capitel abdrucken laſſen, und beide leſen Φ. ὁ Μεδμαῖος. Ebenſo hat Montucla T. 1. p. 180. Philippe de Medmée; — Fabricii bibl. Graeca L. III. p. 85. und von da Weidler hist. astr. p. 111. „Philippus Medmeus, (e Medama Bruttiorum oppido) Italus, Platonis discipulus etc. De ventis eum scripsisse, Stephanus de urbibus in Μέδμα testatur.“ Alſo iſt dieſe dritte Lesart wohl die richtige.

Digitized by Google

metrie und der Arithmetik; er begnügt sich aber nicht, wie so viele neueren Historiker, bloße Namen und Büchertitel zu nennen, sondern er geht ausführlich in die Sache ein, führt die wichtigsten Sätze und Lehren theoretisch vollständig aus, und giebt den Inhalt von vielen jetzt größtentheils verloren gegangenen Büchern so genau und ausführlich an, daß es neueren Mathematikern möglich geworden ist, nach diesen Angaben jene Werke wiederherzustellen. Sein Werk ist eine reiche Vorrathskammer alles dessen, was Griechenland in der Geometrie erzeugt hat, und darum von so unschätzbarem Werthe, weil ohne den Fleiß seines Verfassers so vieles Herrliche für uns spurlos untergegangen wäre. Schade, daß gerade der Theil seines Werkes, der uns für unseren nächsten Zweck am meisten interessirt, nicht vollständig bis auf unsere Zeit gekommen ist; die beiden ersten Bücher dieser Συναγωγαί sind wahrscheinlich für die Griechische Arithmetik das gewesen, was die folgenden sechs Bücher für die Geometrie waren. Den Nachforschungen des berühmten Wallis ist es gelungen, ein Fragment, wie es scheint, den Schluß des zweiten Buchs aufzufinden, welches hinreichend ist, den Verlust des übrigen Theils uns schmerzhaft empfinden zu lassen. Wallis machte seinen Fund im Jahre 1688 im Original bekannt, ein Glück, welches dem geometrischen Theile dieses vorzüglichen Werkes noch nicht zu Theil geworden ist. Wir haben bis jetzt nur lateinische Übersetzungen davon, die überdies Manches zu wünschen übrig lassen [14]).

Von hier an aber schweigt die Geschichte der Mathematik bei den Griechen wirklich. Zwar geben der Commentar des Proklus über das erste Buch der Euklidischen Elemente, und die Commentare des Eutokius von Askalon über einige Werke Archimed's und über die Kegelschnitte des Apollonius manche willkommene historische Notizen, aber das historische Element tritt bei ihnen doch sehr in den Hintergrund, und die Notizen kommen ziemlich vereinzelt und nur so gelegentlich zum Vorschein. Ganz historischen Inhalts ist nur das schon erwähnte vierte Capitel des ersten Buchs von Proklus [15]), wel-

14) Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, a Federico Commandino in lat. conversae et commentariis illustratae. Venet. 1589. fol. (Am Ende steht Pisauri 1588.) Auch Bononiae 1660. fol. Der Anfang des fünften Buchs ist 1824 in Paris fol. griechisch herausgekommen. Möchten wir doch bald eine vollständige griechische Ausgabe dieses wichtigen Werkes sehen!

15) Nach Barocius Eintheilung; die Baseler Ausgabe macht gar keine Abschnitte; es steht daselbst S. 19.

Digitized by Google

ches in einer gedrängten, aber recht guten Übersicht die Geschichte der Geometrie bis auf Euklides enthält, und wenigstens allemal nützlicher ist als seine weitschweifigen philosophischen Untersuchungen über Dinge, die ohne dieselben viel klarer sind. Indeß sind die Commentare beider Auctoren bei Ermangelung rein geschichtlicher Werke für den Historiker der Mathematik sehr schätzbar, und ich werde in diesem ersten Theile meiner Geschichte noch oft Gelegenheit haben, von dem, was jene uns aufbehalten, mit dankbarer Anerkennung Gebrauch zu machen.

Es folgen nun Zeiten für Europa, in welchen wir ungefähr siebenhundert Jahre im Dunkeln tappen, während Asien sein selbstgenährtes Licht noch durch die von Europa her eingesogenen Strahlen vermehrte. Erst mit dem Anfange des dreizehnten Jahrhunderts erwachte bei uns wieder ein lebhafteres Interesse für Mathematik, und seit dem sechszehnten Jahrhundert ist auch die Geschichte derselben ziemlich oft bald mit mehr, bald mit weniger Glück bearbeitet worden; freilich aber hat man meistens diesen Titel schalen Namen- und Titelregistern an die Stirn geschrieben. In der folgenden kurzen Übersicht über die mathematisch-historischen Schriften übergehe ich alle solche Werke, welche auf die Geschichte der Algebra strieti juris keine Beziehung haben; ich neme also nur die allgemeinen Geschichten, und die Geschichten der Arithmetik und Algebra.

Andreae Striborii libellus de auctoribus mathematicis.

Der Verfasser lebte am Anfange des sechszehnten Jahrhunderts als Professor der Mathematik in Wien. Das genannte Werk scheint nicht gedruckt worden zu sein. Der Titel befindet sich in dem von des Verfassers Schüler Tannstetter herausgegebenen Catalog seiner Schriften. (Vergl. Weidler hist. astr. p. 331. Frobesii hist. et dogm. in math. introd. p. 67.)

P. Rami prooemium mathematicum in tres libros distributum. I. explicat historiam praestantium mathematicorum, a quibus artes mathematicae inventae atque excultae sunt etc. Paris. 1567. 8.

Ist, wie es scheint, besonders abgedruckt aus folgendem Werke:

P. Rami Scholarum Mathematicarum libri unus et triginta. Frcft. 1559. 4., auch *Basileae.* 1569. 4.

in welchem jenes Prooemium die drei ersten Bücher ausmacht (wenigstens in der Baseler Ausgabe; die Frankfurter habe ich nicht gesehen). Nach einer Bemerkung von Plinius (Hist. nat. XVIII, 25.)

Digitized by Google

theilt Ramus die Geschichte der Mathematik in vier Perioden, die Chaldäische, von Adam bis Abraham, die Ägyptische, von Abraham an, der die Mathematik dahin verpflanzte, die Griechische, von Thales bis Theon von Alexandrien, mit Einschluß der Römischen Mathematiker, und die neue, von Theon bis auf des Verfassers Zeit. Die Einleitung und die Behandlung der ersten beiden Perioden umfaßt, vernünftiger Weise, nur vier Seiten. Dann folgt die Griechische Periode von S. 5—40. Die neue überläßt er Andern zu bearbeiten: Spero autem aliquem nostro exemplo excitatum recentiores mathematicos descripturum esse. (S. 40.) Das in der dritten Periode gegebene Verzeichniß der Griechischen Mathematiker ist zwar keinesweges vollständig; auch vermißt man alle Zeitangaben, obgleich es chronologisch geordnet ist. Aber das Werk hat vor vielen späteren den unschätzbaren Vorzug, daß es unmittelbar aus den, in der Regel auch genannten, Quellen hervorgegangen ist. Wenigstens ist es bedeutend werthvoller, als die späteren Werke von Blancanus, Vossius und Dechales, welche die Arbeit von Ramus wenig oder gar nicht benutzt zu haben scheinen. Zufällig waren diese Scholae eines der letzten Bücher, welche ich behufs meiner Collectaneen gelesen habe; und da habe ich mich oft verwundert, über Dinge, die in fast allen späteren Werken der Art durch die vagsten Irrthümer entstellt sind, hier die richtige Ansicht zu finden. Beispiele der Art werden uns künftig öfter vorkommen. Einen auffallenden Beleg dafür, daß dieses Werk fast gar nicht gelesen worden ist, werde ich bei Gelegenheit der Untersuchungen über Diophantus beibringen.

Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius Operibus collecta et explicata. Accessere de natura mathematicarum scientiarum tractatio; atque Clarorum Mathematicorum Chronologia. Authore Josepho Blancano, Bononiensi. Bononiae. 1615. 4.

Die Chronol. Mathem., unter besonderem Titel, enthält eine Aufzählung der Mathematiker, die in 26 Saecula vertheilt sind. Sie ist ein ziemlich nacktes Namenverzeichniß, zwar etwas vollständiger, aber viel ungenauer als die Arbeit von Ramus. Die Quellen werden zuweilen angegeben, dagegen vermißt man oft die Titel der Bücher. Im Ganzen ein ziemlich unbrauchbares und unzuverlässiges Werk.

Digitized by Google

Hugonis Sempilii de disciplinis mathematicis libri XII. Antverpiae. 1635. *fol.*

„Huic enim sat prolixus mathematicorum index, secun„dum matheseos disciplinas ordineque alphabetico extat sub„nexus," sagt Frobesius l. l. p. 67. Ich habe das Buch nicht gesehen.

G. J. Vossii de universae matheseos natura et constitutione liber, cui subjungitur chronologia mathematicorum. Amstelod. 1650. 4.

befindet sich auch in desselben Verfassers

De IV. artibus popularibus, de philologia et scientiis mathematicis libri tres, cui operi subjungitur chronol. mathematicorum. Amstelod. 1650. 4. (Zweite Auflage 1660. 4.)

Enthält nicht, wie man aus dem Titel vermuthen möchte, eine abgesonderte chronologische Aufzählung der Mathematiker, etwa wie das Werk von Blancanus, sondern eine Eintheilung der verschiedenen mathematischen Disciplinen, deren jeder eine Angabe der vorzüglichsten Schriftsteller in diesem Fache angehängt wird. Vossius war nichts weniger als Mathematiker. Seine Arbeit beruht ganz auf fremden, noch dazu ungenannten, Auctoritäten, und ist im Ganzen dürftig und ohne hinlängliche Sachkenntniß abgefaßt, wie man es von einem Polyhistor am Ende auch nicht anders erwarten kann. Es ist nur zu bedauern, daß sein Name lange Zeit in jeder Beziehung als Auctorität galt, und die Worte Vossius dixit jeden Einwurf niederschlugen. Zur Entschuldigung der vielfachen Mängel dieses Werks kann man indeß den Umstand anführen, daß dasselbe ein Werk seines hohen Alters ist, und daß er selbst auf dem Titel durch das Motto: „Diutius si immorer, vereor, ne videar immori velle" um Nachsicht bittet.

A. Tacqueti historica de origine et progressu matheseos narratio, als Einleitung in seine *Elementa Geometriae planae ac solidae. Antv.* 1665. 8.

Ich habe das Werk nicht gesehen. Frobisius l. l. p. 74. sagt: Vossium excipit A. Tacquetus, cujus quidem exstat hist. de orig. et progr. math. narratio, ipsius elementis geometriae praemissa, atque ut ipsemet profitetur, e Rami scholis mathem. (lib. 1.) maximam partem concinnata. Elegans profecto est, sed brevis admodum Tacqueti haec narratio; neque enim ultra

Digitized by Google

Theonis atque Pappi tempora is progreditur. Ein Auszug aus Ramus kann allerdings nicht mehr viel enthalten.

J. Wallis treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises. fol. London. 1685.

Als eine zweite Auflage davon ist zu betrachten: **De Algebra tractatus historicus et practicus**, welcher den größern Theil des zweiten Bandes seiner **Opera mathematica. Oxoniae. 1693. fol.** ausmacht. Diese Algebra ist in theoretischer Hinsicht ein ausgezeichnetes Werk und gewiß das beste und vollständigste, was über diesen Gegenstand bis dahin geschrieben worden ist. Indem der Verfasser dem natürlichen systematischen Gange der Wissenschaft folgt, stellt er bei jeder Lehre die verschiedenen ältern und neueren, bessern und schlechtern Methoden in einer Vollständigkeit zusammen, wie wir sie in keinem alten Werke, und selbst wohl nicht einmal in neueren finden. Außerdem geht dem Werke eine historische Einleitung vorher, welche einzelne recht hübsche Bemerkungen und Ansichten aufstellt. Und doch ist sein Werk gerade von Seiten der Geschichte fast ganz werthlos. Wallis hat nicht aus den Quellen geschöpft; ja, wie wir uns späterhin überzeugen werden, wenn wir uns bis auf diese Periode werden durchgearbeitet haben, er hat den größten Theil der Werke, die er nennt, selbst die der berühmtesten classischen Mathematiker, gar nicht gelesen. Die meisten seiner historischen Angaben sind irrig, oft auch noch mehr als das, sie sind absichtlich entstellt. Wallis besaß mehr Patriotismus, als einem unpartheiischen Historiker gebührt. Sein Landsmann Harriot ist ihm Alles, unter seinen Händen möchte er am liebsten die ganze Algebra entstanden wissen, und es kommt ihm auf eine Hand voll Unwahrheiten nicht an, wenn es gilt, diesen seinen berühmten Landsmann auf Kosten der Ausländer, namentlich Descartes, zu vergrößern, gegen dessen unsterbliche Verdienste er sowohl sich selbst als seine Leser geflissentlich blind zu machen strebt. Historische Unkunde dagegen ist es, wenn er Erfindungen sich selbst zuschreibt, welche hundert Jahre früher Bombelli gemacht hatte, z. B. die Ausziehung der Cubikwurzel aus einem Binomium $\left(\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}\right)$ und die Anwendung dieser Theorie auf die Auflösung des sogenannten casus irreducibilis der cubischen Gleichungen. Mit einem Worte, Wallis Werk ist in historischer Beziehung durchaus unbrauchbar; denn man muß vorher die Geschichte kennen, um bei der Lectüre dieser Algebra zu unterscheiden, ob eine

Digitized by Google

von dem Verfaſſer beigebrachte hiſtoriſche Notiz richtig oder unrichtig iſt.

C. F. Milliet-Dechales Cursus seu Mundus mathematicus. IV. Tomi. Lugduni. 1674. *fol.* (ed. altera curâ A. Varcin, ib. 1690.)

Der erſte Band enthält: Tractatus prooemialis de progressu mathescos et illustribus mathematicis, (p. 1 bis 108). Wer dieſes oft gelobte Buch nicht geleſen hat, hat gar keine Vorſtellung davon, mit welcher Gedankenloſigkeit dieſe vorgebliche Geſchichte der Mathematik zuſammengeſtoppelt iſt. Abgeſehen von unzähligen einzelnen Ungenauigkeiten und Irrthümern wimmelt das ganze Werk dermaßen von Widerſprüchen in ſich ſelbſt, daß Jemand, der aus demſelben Geſchichte der Mathematik lernen wollte, am Ende allen Glauben an hiſtoriſche Wahrheit verlieren müßte. Ich ſehe mich genöthigt, dieſes ſtrenge Urtheil durch Thatſachen zu belegen. 1) Der griechiſche Mathematiker Geminus, von dem wir oben geſprochen haben, wird hier viermal genannt; zuerſt S. 8. unter den Mathematikern vor Euklides, dann S. 11. und S. 47. im vierten Jahrhundert n. Chr. als Lehrer des Proklus Diadochus, und endlich S. 79. als Zeitgenoſſe Cicero's und Sulla's. Es werden an dieſen drei Stellen nicht etwa drei Mathematiker dieſes Namens unterſchieden, ſondern es iſt immer derſelbe. 2) Theon Smyrnäus erſcheint S. 12. u. S. 30. im zwölften, S. 61. im zweiten Jahrh. n. Chr., und an allen drei Stellen wird daſſelbe Buch von ihm genannt. 3) Nikomachus, der Arithmetiker, wird in zwei Perſonen getrennt; S. 29. Tertio urbis conditae saeculo (alſo etwa Saec. V. a. Chr.) floruit Nicomachus Arithmeticus. S. 60. (Saec. V. a. Chr.) Nicomachus Arithmeticus de musica etiam egit, ex Zarlino. Aber S. 61. (Saec. II. p. Chr.) heißt es Nicomachus Gerassenus Pythagoricus Harmonices manuale edidit duobus libris. Nun hat aber Nikomachus ſchon auf dem Titel der 1538 in Paris erſchienenen Ausgabe ſeiner Arithmetik den Beinamen Γερασηνός, (ſonſt Γερασηνός), von ſeinem Geburtsorte Geraſa in Syrien. Demnach iſt Nicomachus Arithmeticus und Nicomachus Gerasenus eine Perſon. Eben ſo aber iſt das Harmonices manuale S. 61. eben das Werk de musica, welches S. 60. ſechshundert Jahre früher aufgeführt wird. 4) S. 29. heißt es: Utrumque opus Nicomachi excudebat Vachelus Paris. 1538. (alſo hat Dechales die Ausgabe gekannt). Eandem Arithmeticam explicuit commenta-

Digitized by Google

rio Asclepius et Trallianus Ammonii discipulus, et *Jamblichus, cujus ultimi scripta dicuntur esse in Bibliotheca Regia.* Alſo weiß Dechales auf dieſer Seite nur als Gerücht, daß das Werk des Jamblichus als Manuſcript exiſtirt. Auf der folgenden Seite iſt er ſchon beſſer unterrichtet; da ſagt er nämlich: Constantini temporibus Jamblichus Chalcidensis ex Coelesyria scripsit Graece introductionem in Nicomachi arithmeticam (falſcher Titel) . . . quam Sam. Tennulius latinam fecit et notis illustravit. 1660. Dieſes iſt aber eben der S. 29. erwähnte Commentar. 5) Man hat lange den Mathematiker Euklides mit dem gleichnamigen Philoſophen von Megara verwechſelt. Das mochte hingehen, ſo lange man über den Mathematiker keine genaueren Nachrichten hatte. Seit man aber wußte, daß der Mathematiker unter den erſten beiden Ptolemäern in Alexandrien gelebt und gelehrt hat, war eine ſolche Verwechſelung gedankenlos, da Alexandrien erſt beinahe hundert Jahre nach dem Tode des Euklides von Megara (424) erbaut worden iſt. Was ſoll man aber von einem Manne halten, der beide Facta ſich vollkommen deutlich macht, und dann doch nicht weiß, ob beide nicht vielleicht eine und dieſelbe Perſon geweſen ſind? Dechales raiſonnirt S. 8. ſo: Ad Euclidem tandem Geometram pervenimus, quem plerique eundem putant esse cum Euclide Megarensi, ex Megaris urbe in Isthmo, cujus nomine secta Megarica dicta fuit etc. Fuit Socratis auditor, et huic successit Ichtias. Diogenes Laertius ait Platonem se contulisse Megara ad Euclidem. Constat item eundem Platonem Delios ad Euclidem remisisse . . . . Euclides Geometra, sive idem sit cum Megarensi sive non, longo tempore Alexandriae Geometriam docuit etc. Aber genug des Unſinns. Wir ſehen, daß Dechales auf einer Seite nicht gewußt hat, was er auf der vorigen geſagt hatte. Dazu kommt noch, daß er nie die Quellen angiebt.

J. A. Krebs dissertatio de originibus et antiquitatibus mathematicis. Jenae. 1702. 4.

M. B. W. Marperger dissertatio historico-mathematica de fatis matheseos. Altdorf. 1702. 4.

Zwei unbedeutende Diſſertationen, die nur ſchon Geſagtes wiederholen.

E. Bernardi veterum mathematicorum Graecorum, Latinorum et Arabum synopsis seu scripta quae re-

periri potuerunt dirigenda voluminibus XIV. (adjecta est Huntingtoni epistolis). *London.* 1704. 8.

Iſt wieder abgedruckt in J. A. Fabricii Bibliotheca Graeca (Hamburg. 1716. 4.) T. II, p. 564—587. (Lib. III, c. 23), wo der Titel heißt: Veterum mathematicorum scripta, quae reperiri potuerunt, dirigenda voluminibus XIV. Quorum Catalogum ab Edvardo Bernhardo pridem compositum Thomas Smithus Vir. Clariss. subjecit ejus Vitae ad calcem Epistolarum Huntingtoniarum editae Lond. 1704. 8. — Bernhard hatte die Idee, eine Sammlung aller alten Mathematiker in 14 ungeheuren Bänden herauszugeben. Dieſe Rieſenausgabe ſollte neben einer kritiſchen Recenſion des Urtextes eine gute lateiniſche, ferner, wo möglich, eine oder mehre arabiſche, perſiſche u. a. Überſetzungen, die alten, griechiſchen und arabiſchen und Auszüge aus den wichtigeren neueren Commentaren u. ſ. w. enthalten. In jedem Bande ſollte das Gleichartige zuſammengeſtellt, und an die Hauptwerke von Euklides, Apollonius, Archimedes, Pappus, Athenäus, Diophantus, Ptolemäus ſollten die verwandten kleineren griechiſchen, römiſchen und arabiſchen Schriften angereiht worden. Die vorliegende kleine Schrift enthält die vollſtändige Dispoſition, den detaillirten Plan dieſes großartigen Unternehmens, und verdient inſofern hier Erwähnung, als ſie reichhaltige literariſche Notizen darbietet und eine ausgebreitete Bekanntſchaft des Verfaſſers ſelbſt mit den unbedeutenderen alten Mathematikern verräth. Der ſechſte Band war für die Arithmetik und Algebra beſtimmt, und ſollte die Werke von Diophantus, Theon Smyrnäus, Nikomachus, die Theologumena, Jamblichus, Asklepius, Boethius, Barlaam, Maximus Planudes, Thabet ben Korah (de veritate propositionum algebricarum demonstrationibus geometricis adstruenda), Auszüge aus Sextus Empiricus, aus Leonard von Piſa, aus Pell's Vorleſungen über Diophant, die Arithmetik von Abraham Kai, Alkhindi, einige anonyme Werke und Auszüge aus den neueren Arithmetikern und Algebriſten enthalten. Dieſes als Probe. Bernhard giebt meiſtens auch an, wo die nöthigen Manuſcripte zu finden ſind. Er ſcheint ſich ſehr für die Idee intereſſirt zu haben. Die Ausführung wäre indeß auch dann wohl unterblieben, wenn der Tod ihn weniger früh überraſcht hätte.

Bernardino Baldi, cronica de' Matematici overo epitome dell' Istoria delle vite loro. Urbino. 1707. 4.

Ich habe dieſes Werk nicht erhalten können. Montucla (T. 1.

Digitized by Google

préf. p. V.) ſtellt es in eine Kategorie mit Blancanus. Wald (Verſuch einer Einleitung in die Geſchichte und Kenntniſſe ꝛc. Halle 1784.) ſagt: „ein, Baumgartens Urtheil ohnerachtet, fleißiges und mit den nöthigen mathematiſchen Einſichten abgefaßtes Verzeichniß von 366 Mathematikern, welches die Grundlage eines weitläuftigern Werkes, das aber der Tod des Verfaſſers hinderte, werden ſollte."

C. Wolfii programma de incrementis quae res mathematicae intra unius Saeculi ambitum cepere. Hulae. 1707. 4.

iſt mir unbekannt geblieben. Dagegen will ich bei dieſer Gelegenheit bemerken, daß deſſelben Verfaſſers Kurzer Unterricht von den vornehmſten mathematiſchen Schriften, im vierten Band ſeiner Anfangsgründe aller mathematiſchen Wiſſenſchaften, und noch ausführlicher im fünften Bande der Elementa Matheseos universae, obgleich hauptſächlich Bibliographie, doch Manches auf Geſchichte der Mathematik Bezügliches enthält.

J. N. Fäſch, hiſtoriſche und methodiſche Einleitung in die geſammten mathematiſchen Wiſſenſchaften. Dresden. 1716. 4.

Steinbrück, de magia mathematica s. algebra commentatio, praeter ortum et progressum artis elegantissimae usum quoque ejus exhibens. Dresd. 1719. 4.

J. G. Doppelmaier, hiſtoriſche Nachricht von den Nürnberger Mathematicis und Künſtlern, welche von dreyen Seculis her durch ihre Schriften und Kunſtbemühungen die Mathematik und mehre Künſte trefflich befördert. 2 Thle. Nürnberg. 1730. fol.

Büchner, Entwurf einer Hiſtorie der Rechenkunſt. Waldenburg. 1739. 8.

Dieſe vier Schriften kenne ich nicht. Eben ſo wenig habe ich die folgende erhalten können:

J. C. Heilbronner, Verſuch einer mathematiſchen Hiſtorie. 1ſter Theil, darinnen eine Abhandlung vom Nutzen der Mathematik überhaupt, und die Hiſtorie der Rechenkunſt enthalten. Frkft. u. Lpzg. 1739.

Wahrſcheinlich aber iſt der Inhalt dieſes Werkes in das folgende aufgenommen.

J. C. Heilbronner, historia matheseos universae a Mundo condito ad seculum p. C. n. XVI. praecipuo-

Digitized by Google

rum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Accedit recensio elementorum, compendiorum et operum mathematicorum, atque historia Arithmetices ad nostra tempora. Lips. 1741. 4.

Eine von Adam bis Wallis sich erstreckende, jedoch in den letzten Jahrhunderten nur die Koryphäen nennende Aufzählung der Mathematiker und ihrer Werke, nebst historischen Notizen aus ihrem Leben. Von Geschichte der Wissenschaft findet sich hier noch keine Spur. Sonst hat Heilbronner fleißig gesammelt, und nennt seine Auctoritäten, die jedoch nicht immer die besten sind; unseliger Weise hat er vieles aus Dechales geschöpft. Daher ist diese seine reichhaltige Nomenclatur nicht ohne einzelne Unrichtigkeiten; z. B. der oben genannte Geschichtschreiber der Mathematik, Eudemus von Rhodus, befindet sich hier, wie bei Blancanus und Dechales, unter den Mathematikern des vierten Jahrhunderts n. Chr., also etwas verspätet für einen Schüler des Aristoteles; und doch nennt schon Ramus S. 22. ihn an seiner richtigen Stelle mit Theophrast zugleich. Der zweite Abschnitt, die Geschichte der Arithmetik, geht etwas mehr in die Sache ein, ist aber auch noch ziemlich mager. Zudem ist es ein Übelstand, daß Heilbronner alle Büchertitel, Deutsche, Italienische, Französische, Englische, ins Lateinische übersetzt; für ein literarisches Werk nicht nur eine unnütze, sondern sogar eine schädliche Mühe. Der Werth des Werkes besteht in einem großen Reichthum historischer Data. Montucla selbst (T. 1. préf. p. VI.) gesteht, ce chaos m'a souvent fourni des lumières utiles. Das Verzeichniß mathematischer Manuscripte auf den bekanntesten Europäischen Bibliotheken (S. 538—650) ist unzuverlässig und ungenau, also unbrauchbar; es sind daselbst allein sechszehn Manuscripte von Diophant's Arithmetik angeführt, da doch bekanntlich nur fünf existiren; wenn unter jenen sechszehn auch lateinische Übersetzungen mitbegriffen sind, so wird der Übelstand nur dadurch verschlimmert, daß Heilbronner das an den einzelnen Stellen nicht bemerkt.

Gua-de-Malves, recherches du nombre de racines réelles ou imaginaires (in der Hist. et Mém. de l'Acad. des sciences. Paris. 1741.)

Der erste oder historische Theil dieser Abhandlung ist voller Falsa. Der Verfasser scheint die Geschichte nur aus fremden Berichten auf Treu und Glauben angenommen, nicht aus den Quellen geschöpft zu haben.

J. N.

Digitized by Google

J. N. Frobesii historica et dogmatica ad Matheſin introductio, qua ſuccincta matheſeos hiſtoria cum ceteris ejusdem praecognitis, nec non ſyſtematis mathematici delineatio continentur. Helmst. 1750. 4.

Das Buch zerfällt in zwei Abtheilungen: Sectio I., qua mathematum praecognita sive de Matheseos natura, constitutione ac fatis dissertatio continetur p. 1—136. Sectio II., qua succincta Matheseos delineatio continetur. Der Geſchichte der Mathematik ſind §. X. bis §. XX. (S. 62—136) der erſten Section gewidmet. Nach einer Auseinanderſetzung des Nutzens der Geſchichte folgt §. XI. eine Literatur der Biographien der Mathematiker, §. XII. Literatur der mathematiſchen Bibliographien, §. XIII. Literatur der Geſchichte der Mathematik, alle drei recht brauchbar, wenn auch nicht ganz vollſtändig. Von §. XIV. ab folgt die Geſchichte ſelbſt, welche er in fünf Perioden theilt: 1) barbarica sive orientalis (Juden, Chineſen, Chaldäer, Phönizier, Ägypter). 2) graecanica vel graeca, von Thales bis zur Stiftung der Alexandriniſchen Schule. 3) Alexandrino-romana, bis zum ſiebenten chriſtlichen Jahrhundert. 4) arabica. 5) occidentalis. Eigene Forſchungen ſucht man auch hier vergebens, indeß giebt der Verfaſſer genau ſeine Quellen und Gewährsmänner an. Die Geſchichte ſelbſt iſt eine ziemlich compendiariſche Aufzählung der einzelnen Mathematiker und ihrer Erfindungen. Die Bearbeitung der vierten Periode iſt ein bloßes numerirtes Namenverzeichniß ohne alle Nachrichten, die fünfte Periode fehlt ganz. Viel Neues wird man aus dieſem Buche nicht lernen. Deſſelben Verfaſſers

J. N. Frobesii rudimenta biographiae mathematicorum. Helmst. 1751—1755. 4. (Sect. I., qua Mathematicorum vetustissimorum, hoc est illorum, qui ante Thaletem claruerunt, recensio chronologica continetur. 1751. Sect. II., de Thalete Milesio et qui hunc secuti sunt magnae Graeciae Mathematicis ordine chronologico strictim disseritur. 1754. Sect. III., qua isti Graeciae magnae Mathematici, qui paulo ante Euclidis tempora floruere, percensentur. 1755.)

habe ich nicht geſehen.

J. F. Stockhauſen, hiſtoriſche Anfangsgründe der Mathematik, worinnen der Urſprung, Wachsthum, man-

Digitized by Google

cherlei Veränderung und heutiger Zustand der Mathematik ... gezeigt wird. Berlin 1752. 8.

Eine nach den verschiedenen Disciplinen geordnete, numerirte Aufzählung alter und neuer Mathematiker. Ein sehr unbedeutendes und mit Fehlern reichlich versehenes Buch. Gleich der erste Satz in der Geschichte der Arithmetik ist eine Unwahrheit (S. 75.): „Diejenige Wissenschaft, welche die Teutschen die Rechenkunst nennen, hießen die Griechen Ἀριθμητικήν." Das thun die Griechen, wie wir bald sehen werden, nie.

Gründliche Abhandlung von dem Nutzen der Mathematik und der Rechenkunst überhaupt. Frankfurt u. Leipzig. 1753.

Käſtner (Geſch. d. Math. 1. Th. S. 22.), der dieſes Buch beſeſſen hat, hält es für einerlei mit dem oben erwähnten Werk von Heilbronner, welches er nicht geſehen hat. Er ſagt: „meiſt Geſchichte der Arithmetik, d. i. Titel arithmetiſcher Bücher; 204 Seiten, die Scheibel auch bei jenem zählt. In dem meinigen zeigt ſich Heilbronners Art und Kunſt. Ich urtheile alſo, es iſt das von Scheibel angeführte, nur mit einem andern Titelblatte, des Sammlers Namen weggelaſſen."

G. W. Krafft, institutiones geometriae sublimioris. Tubing. 1753. 4.

„ſind in der Chronologie alter Geometer ein gutes Hülfsmittel." (Wald, Verſ. einer Einl. in die Geſch. d. Kenntn. S. 153.)

J. F. Montucla, histoire des Mathématiques, dans laquelle on rend compte de leur progrès depuis leur origine (nicht a mundo condito, wie Heilbronner) *jusqu'à nos jours, etc. II. tomes. Paris.* 1758. 4.

Neue Ausgabe von la Lande, IV. tomes. Paris. 1799. 1800. 4.

Dieſes Werk iſt das erſte, welches den Namen einer Geſchichte der Mathematik verdient. Mit Geiſt und Gelehrſamkeit dringt der Verfaſſer in die Sache ein, und nicht zufrieden mit einer bloßen Nomenclatur, bemüht er ſich die Entſtehung und allmählige Fortbildung der einzelnen mathematiſchen Disciplinen philoſophiſch und hiſtoriſch zu entwickeln, und jeder billige Leſer muß, wenn er auch im Reſultate mit Montucla nicht übereinſtimmt, doch deſſen redliches Bemühen, etwas Gutes zu geben, gebührend anerkennen. Schade, daß auch dieſes ſonſt ſo werthvolle Buch nicht immer genau genug, ſeine Nachrichten nicht immer zuverläſſig ſind. Es wäre für die Sache

Digitized by Google

beſſer geweſen, wenn Montucla ſeinem urſprünglichen Plane getreu die angewandte Mathematik ganz von ſeiner Geſchichte ausgeſchloſſen und ſich nur über die Geometrie, Arithmetik, Algebra und höhere Analyſis ausgebreitet hätte. Was das Werk jetzt an äußerer Vollſtändigkeit gewonnen hat, hat es an Tiefe und Gründlichkeit verloren. Montucla hat die Quellen flüchtig, zum Theil wohl auch gar nicht geleſen, wovon wir im Verlaufe dieſes Werkes mehre Beiſpiele finden werden. Es war aber auch in der That zu viel für einen Mann, eine ganz neue Bahn betretend, eine aus den unmittelbaren Quellen geſchöpfte Geſchichte der Geometrie, Arithmetik, Algebra, Mechanik, Aſtronomie, Optik, Schiffahrtskunde, Geographie, Chronologie, Gnomonik, Differential- und Integralrechnung zu ſchreiben. Dieſes Streben nach extenſiver Vollendung mußte die intenſive erſticken. Deßungeachtet beſitzt die Mathematik in dieſem Werke einen großen Schatz, und ich müßte wenig erkenntlich ſein, wenn ich verhehlen wollte, daß mir daſſelbe, trotz aller Vorſicht, die ich bei dem Gebrauche deſſelben nöthig fand, eine große Hülfe und oft ein wünſchenswerther Wegweiſer zu den letzten Quellen geweſen iſt. Jedenfalls ungerecht ſind die bitteren Urtheile, mit welchen Coſſali den Verfaſſer faſt durch ſein ganzes Werk verfolgt, und worüber dieſer ſich mit Recht beklagt. (T. II. additions et corrections p. 714. 715. der zweiten Aufl.). Einzelne Falſa werde auch ich ihm öfter nachzuweiſen haben, aber wir wollen darum nicht ein Werk verdammen, deſſen Verfaſſer ſo viel geleiſtet hat, wie Montucla. Sicher aber wiegt ein Fehler, den Wallis und Montucla zugleich begehen, bei dem erſteren unendlich ſchwerer, eben darum, weil er einen einzelnen Theil der Wiſſenſchaft behandelt, und man deshalb durchgehende Gründlichkeit von ihm zu fordern berechtigt iſt.

Nach Wrede (Encyklop.-ſcientifiſche Literatur, drittes Heft, S. 5.) iſt der erſte Theil dieſes Werkes ins Deutſche überſetzt und mit berichtigenden Anmerkungen und Zuſätzen vermehrt von J. J. Berghaus. Wrede giebt aber weder Ort noch Jahrzahl an.

Savérien, histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes et dans les arts qui en dependent, savoir, l'arithmétique, l'algèbre, la géometrie, l'astronomie, la gnomonique, la chronologie, la navigation, l'optique, la méchanique, l'hydraulique, l'acoustique et la musique, la géographie, l'architecture

Digitized by Google

etc.; avec un abrégé de la vie des auteurs les plus célèbres dans ces sciences. Paris. 1766. 8.

Die Geſchichte iſt nach den Wiſſenſchaften geordnet. Als Anhang S. 426—500 die Biographien berühmter Mathematiker in chronologiſcher Ordnung. Es iſt unbegreiflich, wie acht Jahre nach dem erſten Erſcheinen des Montucla'ſchen Werkes noch ſolch eine Mißgeburt hat auf die Welt kommen können. Ich will mich ein für allemal der Mühe überheben, dieſes Buch mit ſeinem pomphaften Titel wegen einzelner Unrichtigkeiten in der Folge zu citiren; zu dem Ende ſchreibe ich hier als Probe folgende Stellen aus dem Abſchnitt Histoire de l'algèbre (p. 32. folg.) ab: Malgré les efforts des Mathématiciens pour perfectionner la science des Nombres et pour résoudre par le moyen de cette science les problêmes les plus curieux et les plus difficiles, cependant on reconnut qu'elle étoit resserrée dans des limites étroites. Les Nombres étant déterminés, on ne peut donner, en s'en servant, que des solutions particulières. (Das gilt auch noch von den Algebriſten bis zu Vieta's Zeit, iſt alſo nicht charakteriſtiſcher Mangel der Arithmetik). Chaque problème de même genre exige une solution qui lui soit propre: tout est même donné en Arithmétique. (Das ſoll heißen, in der gewöhnlichen Arithmetik wird keine unbekannte Größe angenommen; das folgende dient noch zur Erklärung). La chose qu'on cherche est presque exprimée (!), quoiqu'elle ne soit point désignée spécialement (Hat der Verfaſſer ſich dabei etwas gedacht?). Il est néanmoins des problêmes où l'inconnue (wo kommt die auf einmal her?) ne peut être représentée par des Nombres. (Das kann ſie überhaupt niemals, eben weil ſie unbekannt iſt). Il faut pour l'indiquer un caractère symbolique qui n'ait aucune valeur (!!!): l'Arithmétique est alors en défaut. Les Mathématiciens Arabes le sentirent les premiers (iſt hiſtoriſch unwahr); et pour y suppléer, ils chercherent à la généraliser, en calculant avec des caractères symboliques. (Das haben die Araber nie gethan; ſie haben überhaupt gar keine Rechnungszeichen, ſondern drücken alle Operationen mit vollſtändigen Worten aus). Par le moyen de deux sortes de caractères (wie geſagt, hat ſie keine einzige) ils distinguerent les choses connues de celles qu'ils ne connoissoient pas, et formerent ainsi une nouvelle Arithmétique, qu'ils appellerent *symbolique* (das iſt alſo ein Arabiſches Wort!).

Digitized by Google

Nous ignorons ce que c'étoient que ces symboles, et en quel tems les Arabes commencerent à les employer (das weiß, aus dem angeführten Grunde, überhaupt kein Mensch): seulement nous savons qu'en suivant cette idée, c'est-à-dire en se servant d'expressions générales et de signes universels, ils vinrent à bout de calculer non seulement ce qu'ils ne connoissoient pas encore (was soll das heißen? giebt sich denn überhaupt irgend ein Mensch die Mühe etwas auszurechnen, was er schon weiß? aber der Zusatz macht die Sache noch besser), mais aussi ce qu'on ne sauroit exprimer par aucun nombre (das ist der Zweck jeder Rechnung; denn wenn man etwas schon durch eine Zahl ausdrücken kann, bedarf es nicht mehr der Berechnung). Ils firent plus: ils soumirent au calcul les quantités positives et les quantités négatives, et dès-lors ils résolurent des questions dans lesquelles il s'agissoit d'évaluer en même-tems et le bien qu'un homme avoit, et celui qu'il ne possedoit pas (! O Saverien! Wie dumm sind unsere Zeitgenossen gegen deine Araber! Sav. hat wahrscheinlich einmal gehört, daß man, um Anfängern den Begriff von positiv und negativ anschaulich zu machen, sich des Bildes bedient, daß Positives und Negatives sich verhalte, wie Vermögen und Schulden). On croit que ces Peuples (es war bisher immer nur von einem die Rede) ont appris tout cela des Indiens. C'est une prétention (sehr apodictisch). Il y a des Erudits, au contraire, qui veulent que ce soient les Grecs qui aient enseigné cette invention aux Arabes (vorher hieß es ja aber ausdrücklich, daß die Arabischen Mathematiker zuerst auf diese Idee gekommen seien). Quoi qu'il en soit, ceux-ci employoient des caractères grecs pour exprimer les quantités connues et les quantités inconnues (da wissen wir ja auf einmal doch, ce que c'étoient que ces symboles). Ils purent par ce moyen décomposer une question (!), pour comparer ensemble ces quantités, et ils formerent ainsi une Arithmétique symbolique, ou un Art qu'ils appellerent *Algial Walmulkabala* (soll heißen Algebre w'almukabala; vorher sollte ja der Arabische Name Arith. symbolique sein), deux mots qui signifient réparer, rétablir (das würde ein Araber in jenen Worten schwerlich entdeckt haben; vergl. mein zweites Kapitel), et que nous avons rendus par le mot *Algebre* (also das französische Wort Algebre ist eine Übersetzung der beiden Arabischen Algial Walmulkabala). Les Ou-

Digitized by Google

vrages qu'ils publierent sur cet art, ne sont point venus jusqu'à nous (zum Glücke iſt das doch geſchehen, und ich hoffe in meinem zweiten Bande Manches daraus mitzutheilen), et nous ignorerions la découverte qu'ils en ont faite, si *Diophante,* qui vivoit vers le milieu du quatrième siècle, ne nous l'eût appris (Diophant hat uns mit den Erfindungen der Araber in der Algebra bekannt gemacht, horribile dictu! aber es kommt noch beſſer): on peut même regarder cet Auteur comme le premier Algébriste (alſo hat doch nach Saveriens Meinung der erſte Algebriſt uns mit den Erfindungen der Späteren bekannt gemacht). Son livre est intitulé, *Questions Arithmétiques.* C'est là qu'on voit les progrès que les Arabes y avoient faits jusqu'à ce tems (!!! Da läuft dem Leſer denn am Ende doch Alles bunt durch einander: „Die Araber haben die Algebra erfunden; ſie haben ſie von den Griechen gelernt und bedienen ſich als Symbole Griechiſcher Buchſtaben; wir würden nichts davon wiſſen, wenn Diophant es uns nicht erzählt hätte; Diophant lebte im vierten Jahrhundert; er war der erſte Algebriſt; ſein Werk macht uns mit den Fortſchritten der Araber bekannt.“ Und dieſes Alles ſo zu ſagen in einem Athemzuge! Da fragt man doch endlich ſelbſt verwirrt: War Diophant ein Araber? Wann haben die Araber Algebra getrieben? Über die erſte dieſer Fragen iſt Saverien gewiß ſelbſt nicht im Klaren geweſen, denn gleich hinterher wundert er ſich, daß Diophant ſich griechiſcher Buchſtaben bedient, was er oben auch von den Arabern ſagte). Il est fâcheux que Diophante ne nous ait fait connoître ni leur (nämlich der Araber) marche, ni celle qu'il a suivie dans ses méditations. (Das erſtere thut er allerdings nicht und zwar aus guten Gründen, das letztere aber immer). Il se sert de caractères grecs pour exprimer les quantités et les signes qui les unissent ou qui les séparent (wenn dieſe Worte einen Sinn haben, ſo ſagen ſie die Unwahrheit; denn wenn hier Verbindung und Trennung ſo viel heißen ſollen als Addition und Subtraction, ſo iſt die Sache inſofern unrichtig, als Diophant für die Addition, die wir durch + ausdrücken, kein Zeichen anwendet); . . . *Xilandre,* dans le cinquième siècle (! die Überſetzung erſchien 1575, alſo etwa elf Jahrhunderte ſpäter) traduisit l'Ouvrage de Diophante du grec en latin. Et environ vers le huitième siècle (daß es ein Jahrhundert ſpäter geſchah, wollen wir hier nicht tadeln) un Arabe, nommé *Mohammed ben-Musa,* composa un traité d'Algebre,

Digitized by Google

dans lequel il donna la résolution des problèmes du second dégré, problèmes qu'on n'avoit point encore résolus parfaitement u. ſ. w. — Noch ein Paar einzelne merkwürdige Stellen will ich herausheben; p. 41. Dans ces calculs (er hatte vorher von Cardan und Bombelli geſprochen) les quantités étoient écrites; c'est-à-dire qu'on nommoit la chose inconnue, *la Cosa*. On appelloit *Censo*, le produit ou le quarré de la quantité cherchée; *Cubo* ou le Cube la troisième puissance de cette quantité. On changea bien en différens tems cette manière d'exprimer les quantités, mais on les écrivoit toujours. A l'égard des signes, on se servoit des premières lettres de l'alphabet. Les Nombres entroient aussi dans les équations, et tout cela embarrassoit beaucoup et ne donnoit guères que des solutions particulières. Die größte Verwirrung aber ſcheinen dieſe Sachen in des Verfaſſers Kopf angerichtet zu haben. Denn S. 43. heißt es ſchon wieder: Cependant on écrivoit toujours les quantités, comme je viens de le dire. Cela formoit un grand embarras dans la résolution des équations. *M. Viete* est le premier qui s'est servi des lettres de l'alphabet, pour désigner les quantités connues. Die bekannten Größen aber hatte man nie durch Worte ausgedrückt (das ſoll das écrire heißen), ſondern immer durch Zahlen. — Was ſoll man aber mit ſolchen Sätzen machen, wie die folgenden: Ce géomètre (Jacques Grégori) découvrit une proprieté des polygones inscrits et circonscrits aux sections coniques (p. 100.); — Mr. de Beaune proposa à Descartes un problème qui est devenu très célèbre sous le nom de Problème de M. de Beaune, lequel consistoit à construire une courbe, avec des conditions qui rendoient cette construction extrêmement difficile (p. 103.). — Quant à Snellius, il enrichit la Géométrie de deux théoremes, par lesquels il détermina les limites du cercle, en lui inscrivant et circonscrivant des polygones avec une exactitude presque aussi grande que celle que *Ludoph Vanceulen* (sic!) avoit eue pour l'extraction de ses racines (p. 89.). Aber ich will den Leſer nicht weiter ermüden. Jedenfalls wird man es nicht übertrieben finden, wenn ich ſage, der Verfaſſer weiß nicht, wovon er ſpricht.

Bei dem Lehrbuch der Mathematik durch B. F. Mönnich (2 Theile, jeder in 2 Abtheilungen) Berlin 1781—97. 8. (zweite

Digitized by Google

Aufl. 1800—1801) befindet sich als Anhang zur zweiten Abtheilung des ersten Theils eine

Kurze Geschichte der theoretischen Mathematik nach der Ordnung der Hauptstücke im Lehrbuche.

Da die kleine Schrift auf Originalität und Quellenstudium keine Ansprüche macht, so kann man es ihr nicht verargen, daß sie die Fehler ihrer Vorgänger reproducirt. Sie steht zu anspruchslos da, als daß man an ihr sollte zum Splitterrichter werden wollen. Sie ist immer eine angenehme und schätzenswerthe Zugabe zu einem Lehrbuche der Mathematik, und es wäre zu wünschen, daß mehre Bücher der Art solche kurze historische Übersichten über ihre Wissenschaft lieferten.

Hollenberg, Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der Mathematiker. Münster. 1788. 8.

Lemoine, traité élémentaire des mathématiques, ou principes d'Arithmétique, de Géométrie et d'Algèbre, avec les sections coniques etc. etc., l'histoire des Mathématiques pures et de Géomètres les plus célèbres. Paris. 1789. 8. (auch 1790. 1793.)

Beide Werke sind mir unbekannt geblieben. Von dem letzteren sagt Rogg (Handb. d. math. Liter. S. 225): „Bei der Geschichte der Mathematik, welche durch alle Jahrhunderte bis zum Ende des 18ten Jahrh. durchgeführt ist, sind auch, in besonderen Noten, die Biographien der berühmtesten Mathematiker angegeben."

Ab. Bossut, Quadro dei Progressi delle Mathematiche tradotto dal Franc. Milano. 1793. 8.

Über dieses Werk siehe unter C. Bossut, essai sur l'histoire générale des mathématiques. 1802.

J. G. Prändel, Algebra nebst ihrer literarischen Geschichte. München. 1795. 8.

L. W. Gilbert, de natura, constitutione et historia matheseos primae vel universalis, seu metaphysices mathemat. commentatio. Halle. 1795. 8.

Beide Werke habe ich nicht gesehen.

A. G. Kästner, Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Vier Bände. Göttingen. 1796—1800. 8.

Ein sonderbares Buch. Im Grunde thut Kästner hierbei nicht

Digitized by Google

viel mehr, als daß er uns seine übrigens recht schöne mathematische Bibliothek beschreibt, lange Titel abschreibt, Stücke aus Vorreden und epistulis nuncupatoriis copirt, durch sechszehn Seiten hindurch ein fades Spiel beschreibt, bei welchem durchaus nichts mathematisch ist (Th. I. S. 226. folgd.), und dann hin und wieder erzählt, wann und von wem er dieses oder jenes Buch gekauft oder als Geschenk erhalten habe. Dazu kommt, daß das Werk in einem aphoristischen Style, der ans Unverständliche gränzt, geschrieben ist, in welchem Käſtner in seinem Alter, wie es scheint, etwas Komisches suchte; in demselben Genre ist z. B. seine Vorrede zu Rosenthal's Encyclopädie der Mathematik, die um dieselbe Zeit erschien. Ich halte es nicht für nöthig, Belegstellen anzuführen, da das Buch gewiß Jedem zugänglich ist. Von einem Eingehen in die Wissenschaft ist fast nirgend die Rede. Das Einzige, was man aus dem Buche lernen kann, ist einige Bücherkenntniß. Aber auch hierin scheint den Verfasser mehr der Zufall, als irgend ein bestimmter Plan geleitet zu haben. Mit einem Worte, das Buch ist alles Mögliche, nur keine Geschichte der Mathematik. Freilich ist dieses Werk auch keine aus freiem Antriebe unternommene Arbeit, sondern Käſtner ist dazu aufgefordert worden, weil man von seiner bekannten ausgebreiteten Bücherkenntniß sich ein günstigeres Resultat versprach.

Desto erfreulicher ist es, wenn man auf Vorarbeiten stößt, wie das folgende Werk ist:

Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa, dell' Algebra, Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di D. Pietro Cossali. 2 ***Vol. Parma.*** 1797—99. 4.

Dieses vortreffliche Werk macht für die Periode, die es umfaßt, nämlich von Leonardo Bonacci, 1200, bis Bombelli, c. 1589, jede andere Geschichte der Algebra überflüssig. Gründliches Studium der Quellen, selbst der handschriftlichen, die nicht leicht Jemandem zugänglich sind, z. B. des Werkes von Bonacci, Liebe zur Sache, geistreiche Auffassung und Darstellung, kurz, Alles vereinigt sich, um dieses Werk zu einem der vorzüglichsten zu machen, welches über irgend einen Theil der Wissenschaft erschienen ist. Es sind zunächst fünf alte Mathematiker, in deren innersten Geist der Verfasser uns hineinführt, Leonardo Bonacci, Luca Pacioli, Tartaglia, Cardano und Bombelli. Daneben aber finden sich geistreiche und gelehrte Discursionen über Diophant, über die Araber, über ältere und neuere

Digitized by Google

Eliminationsmethoden u. a. Wenn es indeß erlaubt iſt, auch einem ſolchen Werke ſeine Mängel nachzurechnen, ſo möchte ich das anführen, daß Coſſali bei der Darſtellung der Methoden der Alten zu viel moderniſirt. Er ſtellt Alles mit den jetzt gebräuchlichen algebraiſchen Zeichen dar, und wenn das immerhin nur Form iſt, ſo ſind doch im ganzen menſchlichen Sein Form und Weſen ſo zart in einander verwachſen, daß man jene nicht verletzen kann, ohne dieſem zu nahe zu treten. Zumal aber ſind im Gebiete der Mathematik Form und Sache durchaus mit einander verſchmolzen, und ich brauche keinen Sachkundigen darauf aufmerkſam zu machen, daß es ſchwerlich möglich geweſen wäre, die Algebra auf den Standpunct der Allgemeinheit und Abſtraktion, den ſie heutzutage behauptet, zu erheben, wenn nicht die Mathematiker des ſiebzehnten Jahrhunderts ihr eine dieſer völligen Verallgemeinerung fähige Bezeichnungsart gegeben hätten. Wir ſchreiben jetzt mit der größten Geläufigkeit den Ausdruck x^n; wie wollten wir dieſen ſcheinbar einfachen, aber allgemeinen Ausdruck, ich will nicht ſagen mit Diophantiſchen oder Cardaniſchen, ſondern nur auch mit Harriot'ſchen Zeichen darſtellen, da dieſer Mathematiker bekanntlich die Potenzen noch durch Wiederholung der Wurzelgröße, *aaa* für a^3 ausdrückt? Wer weiß, ob Newton auf den allgemeinen Ausdruck von $(a + b)^{\pm \frac{m}{n}}$ gekommen wäre, wenn nicht Descartes ihm die Form a^3 ſtatt *aaa* vorher ſubſtituirt hätte. Darum iſt es eine der unerläßlichſten Pflichten des Hiſtorikers, die Leiſtungen eines alten Mathematikers auch in der Form getreu darzuſtellen, um dem Leſer kein falſches Bild von der Vorſtellungsweiſe jener Zeit zu geben. Dieſe Regel nun verletzt Coſſali zu häufig. Man weiß oft nicht, wie viel von dem, was er vorträgt, ihm ſelbſt, wie viel dem Autor angehört, von dem er eben ſpricht. Ja Coſſali ſcheint ſelbſt den Einfluß der Form auf das Weſen und die Vorſtellung in der Mathematik für zu geringe geachtet zu haben, was ſich beſonders dadurch kund giebt, daß er dem gerade durch die Ausbildung und Verallgemeinerung der formellen Darſtellung um die Mathematik im Allgemeinen und namentlich um die Algebra ſo hoch verdienten Vieta nicht die Gerechtigkeit widerfahren läßt, die dieſem großen Manne in ſo hohem Grade gebührt. Aber auch das Vollkommenſte kann auf Erden nicht ohne Mängel ſein; ſo war Vieta es nicht, ſo iſt Coſſali es nicht; deßungeachtet müſſen wir Einen wie den Andern hochſchätzen und ihre Verdienſte dankbar anerkennen, die durch kleine Unvollkommenheiten nicht herabgewürdigt werden können.

Digitized by Google

Cossali citirt in dem genannten Werke mehrmals seine Storia dell' Arithmetica, über die ich aber bis jetzt nichts Näheres, selbst nicht in mathematischen Bücherverzeichnissen habe erfahren können.

Murhard, System der Elemente der allgemeinen Größenlehre nach dem Zustande der Wissenschaft am Ende des 18ten Jahrh., nebst Literatur und Geschichte derselben. Lemgo. 1798. 4.

kenne ich nicht.

C. Bossut, Essai sur l'histoire générale des mathématiques. 2 *tomes. Paris.* 1802. 8. Die zweite Auflage hat den Titel: *Histoire générale des mathématiques. Paris.* 1810.

Geistreiche Gesichtspuncte und Darstellungen, aber mehr Raisonnement als Geschichte; ja der Verfasser nennt historische Untersuchungen oiseuses (z. B. T. I. p. 195). Allerdings ist es für einen geistreichen Mann angenehmer, über Thatsachen, die Andre erzählt haben, zu philosophiren, als zu untersuchen, ob diese Thatsachen selbst wahr sind oder nicht, und ob nicht etwa mit den Thatsachen zugleich das ganze Raisonnement zu Boden stürzt. Solche Untersuchungen erfordern Geduld und Anstrengung. Im Ganzen enthält das Buch zu wenige Facta, und unter diesen wenigen zu viele falsche. Selbst in Betreff solcher Sachen, die zu des Verfassers Zeit schon längst aufgeklärt waren, stellt er sich ganz wieder auf den alten Standpunct; z. B. will er nichts davon wissen, daß die Araber die Ziffern und deren Gebrauch von den Indern erhalten haben, eine Ansicht, die, um Mehrer nicht zu gedenken, Vossius, Wallis, Montucla schon längst durch überwiegende Gründe erhärtet hatten. Dieses übrigens vielfach gepriesene Werk ist indeß ein recht angenehmes Lesebuch für Jemanden, dem an gründlicher und geprüfter historischer Wahrheit nicht eben viel gelegen ist. Es hat daher auch die sonst unverdiente Ehre gehabt, fast in alle gebildeten Sprachen übersetzt worden zu sein, ins Deutsche mit Anmerkungen und Zusätzen von N. Th. Reimer, 2 Thle., Hamburg 1804. 8., ins Italienische von Greg. Fontana, 4 Tomi, Milano 1802. 8., ins Englische von Bonnycastle, London 18.., 8.

Ich führte oben an: Bossut, Ab., Quadro dei Progressi delle Mathematiche trad. dal Franc. Milano. 1793. 8. Ich habe diesen Titel bei Rogg (Handb. d. math. Liter. S. 174) gefunden. Wenn das Ab. kein anderer Vorname (der in Rede stehende

Digitized by Google

heißt Charles), sondern eine Abkürzung von Abbé sein soll, so ist dieser Quadro vielleicht eine kurze, aus desselben Verfassers Cours des mathématiques à l'usage des écoles royales militaires. Paris. 1782 (auch 1783) entnommene Übersicht über die Geschichte der Mathematik. Mir ist weder der Quadro dei Progr. etc., noch der Cours des mathém. zu Gesichte gekommen.

Δημητρίου Παναγιωτάδου τοῦ Γοβδέλα στοιχεῖα Ἀλγεβρᾶς, ὁδοῦ Μαθηματικῆς μέρος πρῶτον. Halle. 1806. 8.

„Eine sehr deutliche, mit einer zweckmäßigen Geschichte der Analysis versehene Anleitung zur Algebra, die H. v. Gobdela eigentlich für seine Landsleute in Griechenland bestimmt hat, wo man bisher bloß die Lehrbücher der alten griechischen Mathematiker kannte." Wrede a. a. O. S. 34. 35. Ich selbst habe das Buch nicht gesehen.

Delambre, Arithmétique des Grecs.

Diese kleine, aber interessante Abhandlung erschien zuerst als Anhang an dem Werke: Les oeuvres d'Archiméd, traduits littéralement avec un commentaire par F. Peyrard. Paris 1807. 4., und nachher vermehrt in des Verfassers Histoire de l'astronomie ancienne. 2 Tomes. Paris. 1817. 4. als Anfang des zweiten Theils. Sie enthält eine vollständige und gründliche Darstellung der praktischen Rechenkunst der Griechen, mit Beispielen aus dem Commentar des Eutokius über Archimed's Kreismessung und des Theon über Ptolemäus Syntaxis, ist also unmittelbar aus den Quellen geschöpft, und das Beste, was wir über diesen Gegenstand haben, wenngleich der Verfasser sich hie und da Abweichungen von der Griechischen Vorstellungsart erlaubt, die nicht zu billigen sind. Eine deutsche Übersetzung (nach der ersten Auflage) haben wir unter dem Titel: Über die Arithmetik der Griechen, aus dem Franz. des H. Delambre übersetzt, mit Verbesserungen und einer Tabelle versehen von J. J. J. Hoffmann. Mainz. 1817. 4. Die Verbesserungen bestehen darin, daß der Schrift als Einleitung ein Artikel aus Klügel's mathem. Wörterbuche B. I. S. 174, die Geschichte der Arithmetik enthaltend, und dazu ein Zusatz, wahrscheinlich aus der Feder des Übersetzers geflossen, vorangeschickt ist. Dagegen ist zu bedauern, daß die Schrift selbst durch eine Unzahl von Druckfehlern, namentlich in den Griechischen Rechnungsbeispielen, völlig entstellt ist.

Digitized by Google

L. Lüder, Pythagoras und Hypathia, oder die Mathematik der Alten. Lpzg. 1809. 8. 2te Aufl. Altenburg. 1812. 8.

Das Werk ist aus dem Buchhandel verschwunden, und ich habe es nicht zu Gesichte bekommen können.

Algebra of the Hindus with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhaskara, by Colebrooke. London. 1817. 4.

Die gelehrte Vorrede zu diesem herrlichen Werke enthält sehr schätzenswerthe Beiträge zur Geschichte der Algebra, besonders in Bezug auf ihre Fortbildung in Asien. Wohl selten findet man so vielen lehrreichen Stoff auf einen so kleinen Raum zusammengedrängt.

F. Buchner, de algebra Indorum. Elbing. 1821. 4.

ist ein interessanter und schätzenswerther Auszug aus dem vorigen Werke. Namentlich hat der Verfasser das Verdienst, die in der Colebrookeschen Übersetzung, welche dem Original treu folgt, ziemlich unverständlich ausgedrückten Regeln der Indischen Mathematiker durch eine Übertragung in verständliche Formeln unsern Mathematikern zugänglich gemacht zu haben.

P. Franchini, Saggio sulla storia delle mathematiche. Lucca. 1821. 8.

J. H. M. Poppe, Geschichte der Mathematik seit der ältesten bis auf die neueste Zeit. Tübing. 1828. 8.

Libri, histoire des sciences mathématiques en Italie . .

Alle drei Werke sind mir noch unbekannt; das letzte kenne ich nur aus den Citaten bei Chasles, hoffe aber es für die folgenden Bände meiner Geschichte zu benutzen.

Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, par M. Chasles. Bruxelles. 1837. 4.

Dieses in seiner Art vorzügliche Werk kenne ich nur aus der deutschen Übersetzung, welche den Titel führt:

Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, von Chasles. Aus d. Franz. übertragen von L. A. Sohncke. Halle. 1839. 8.

Obwohl nicht unsern nächsten Zweck betreffend, hat doch dieses Werk einen so entschiedenen Werth für die allgemeine Geschichte der Mathematik, daß ich nicht umhin kann, es hier anzuführen. Die Geschichte selbst ist kurz und gedrängt, fast kompendienartig. Die

Digitized by Google

wahre Gelehrsamkeit, der eigentliche Werth steckt in den Noten, welche, verschiedene abgerissene Gegenstände behandelnd, den bei weitem größten Theil des Ganzen ausmachen. Gründlichkeit und Belesenheit zeichnen den Verfasser aus. Indeß giebt die Art, wie er die Mathematik der Inder und Araber (in der 12. Note) abhandelt, hie und da einem gerechten Tadel Raum, wie wir an passendem Orte sehen werden. Auch scheint Chasles seine Vorarbeiten nicht immer aufmerksam genug benutzt zu haben. Um nur ein Beispiel zu nennen, so vermengt der Verfasser in der eben angeführten 12. Note durchgehend zwei Arabische Mathematiker, die beide Mohammed ben Musa hießen, von denen der ältere aber von den Arabern immer nach seinem Vaterlande Alkharezmi genannt wird, der jüngere dagegen zum Unterschiede noch den Namen seines Großvaters erhält und Mohammed ben Musa ben Schaker heißt. Dieser jüngere war Geometer und hatte noch zwei Brüder, Ahmed und Husain, die ebenfalls als Mathematiker bekannt sind. Jener ältere dagegen ist der Verfasser der von Rosen herausgegebenen **Algebra of Mohammed ben Musa** (London. 1831.), den Chasles fälschlich für einen der drei Brüder, der Söhne des Musa ben Schaker hält. Ich würde diesen Irrthum hier nicht erwähnt haben, wenn der Verfasser ihn nicht leicht hätte vermeiden können. Denn schon Cossali (T. I. p. 214. 215.) warnt vor dieser Verwechselung der beiden gleichnamigen Mathematiker. Nach Casiri bibl. arab. hisp. Escur. T. 1. p. 418. 419. 427. hatten auch beide denselben Vornamen (oder Kunjah), nämlich Abu Dschafar; dagegen hieß nach Rosen (a. a. O. pref. p. V.) der ältere Abu Abdallah.

Diese Übersicht über die Literatur der Geschichte der Mathematik im Allgemeinen und der Arithmetik und Algebra insbesondre mag hier genügen. Auf große Vollständigkeit, namentlich in den unbedeutendern Schriften, macht dieses Verzeichniß keine Ansprüche. Wesentliche und wichtige Werke habe ich nicht ausgelassen.

Werfen wir nun einen vorläufigen Blick auf die historische Entwickelung der Algebra, so wird sich uns die interessante, aber keineswegs beispiellose Thatsache herausstellen, daß diese Wissenschaft zweimal erfunden worden ist, in Griechenland (oder wenigstens von Griechen, wahrscheinlich in Alexandrien) und in Indien, wie es scheint bei beiden Völkern unabhängig von einander; aber weder hier noch dort sind wir im Stande, den Strom der neuen Wissenschaft bis zu seinen Quellen zu verfolgen. Einige hie und da zerstreut vor-

Digitized by Google

kommende Vorarbeiten abgerechnet, steht Diophant's berühmtes Werk in der Reihe der Griechischen Mathematiker ganz isolirt da, nicht bloß in Bezug auf die alten Mathematiker, die ihm vorangingen, sondern auch in Bezug auf die nachfolgenden. Das Werk scheint für seine Zeit, in welcher Griechenlands Cultur bereits bedeutend bergab ging, zu hoch gewesen zu sein; wenigstens ist es ohne sichtbaren Einfluß auf die Fortbildung der späteren Griechen geblieben. Aber freilich sind auch Pappus, Theon und, wenn man will, noch Proklus und Eutokius, kaum hundert Jahre nach Diophant, überhaupt die letzten Griechen, die als Mathematiker mehr als Schüler waren. Die Wissenschaft sinkt, wie das Kaiserthum, mit Riesenschritten immer tiefer herab, bis wir endlich den Faden verlieren, an dem wir ihre Existenz weiter verfolgen könnten. Aber was am Hofe zu Constantinopel keine Nahrung mehr fand, das erhob sich allmählig in üppiger Fülle auf fremdem Boden. Der glänzende Hof der Abassiden in Bagdad, der Schrecken der Griechischen Kaiser, ward das schützende Asyl für Griechische Wissenschaft. Indeß gingen die von ihren hochherzigen Khalifen aufgemunterten Araber keineswegs unvorbereitet an das Studium der Griechischen Mathematiker; ihnen war schon vorher eine andere Quelle, die Indische Mathematik zugeflossen. Indien, die wahrscheinliche Wiege des Menschengeschlechts, scheint sich frühe auf eine nicht unbedeutende Stufe wissenschaftlicher Bildung emporgeschwungen zu haben. Zwar sind wir mit unsern jetzigen Hülfsmitteln bis auf diesen Tag nicht im Stande, die Mathematik der Inder sehr weit aufwärts zu verfolgen. Brahmagüptas, dessen Werk in mancher Beziehung sich allerdings wesentlich über Diophant erhebt, lebte erst am Anfange des siebenten Jahrhunderts. Aber wir haben Andeutungen auf viel frühere Mathematiker, von denen einer, Arjabhatlas, leicht älter als Diophant sein kann. Aber lassen wir einstweilen diese Specialuntersuchungen auf sich beruhen und verfolgen wir den Faden der Geschichte. Aus dieser Quelle nun waren den Arabern bereits, vielleicht unmittelbar, vielleicht auch durch Persische Vermittelung, bedeutende mathematische Kenntnisse zugeflossen, bevor sie die Griechen, zumal aber Diophant (den sie erst gegen das Ende des zehnten Jahrhunderts erhielten) sich angeeignet hatten, und Almamun, schon vor seiner Erhebung zum Khalifate der Mäcenas des Orients, sah sich bereits veranlaßt, durch Mohammed ben Musa Alkharezmi die Algebra wegen ihres häufigen Gebrauchs im Leben in einem

Digitized by Google

Compendium bearbeiten zu lassen [16]). So vereinigten sich in Bagdad zwei Bäche, welche allmählig zu einem bedeutenden Strome anwuchsen, in welchem sich die beiden verschiedenartigen Elemente, Griechische Geometrie und Indischer Calcul, gegenseitig an einander abschliffen und zu einer scheinbar neuen Bildung gestalteten; und in dieser neuen und eigenthümlichen Gestalt kehrte die Wissenschaft, die aus Europa seit dem fünften Jahrhundert so ziemlich verschwunden war, in diese ihre Heimath mit dem Beginne des dreizehnten Jahrhunderts zurück. Freudig ward die lange Abwesende begrüßt und sorgsam gepflegt. Zumal schien es, als wollten die Italiener jetzt gut machen, was ihre Vorfahren die alten Römer, denen die Mathematik immer fremd geblieben war, verabsäumt hatten. Viertehalb Jahrhunderte hindurch blieb die Förderung und Pflege der Algebra fast ausschließlich in den Händen der Italiener, und nur sporadisch rankt sich hie und da ein Zweig des schönen Baumes über die Gipfel der Alpen hinaus. Aber mit dem letzten Viertel des sechszehnten Jahrhunderts, nachdem die Wissenschaft bereits durch die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen einen wesentlichen Zuwachs erhalten hatte, trat für sie eine neue Periode ein, indem fast zu gleicher Zeit zwei bedeutende Erscheinungen auftraten, die dem ganzen mathematischen Studium eine neue Richtung und einen neuen Schwung gaben; es war einerseits die Übersetzung des bis dahin den Europäern nur dem Namen nach bekannten Werks von Diophant durch Xylander, andrerseits die Reformation der Algebra durch Vieta; von beiden Ereignissen werde ich gehörigen Orts mehr sagen. Von hier an beginnt, wie gesagt, eine ganz neue Periode für die Algebra; sie wird allgemeines Europäisches Eigenthum, während sie bisher nahe daran war, die Wenigen, die ihre Kunstgriffe kannten, in den Ruf der Zauberei zu bringen; Erfindungen und Verbesserungen folgen Schlag auf

16) S. Rosen's Ausgabe dieser Algebra S. 3. (S. 2. des Arab. Textes). Interessant ist auch folgende Bemerkung von Chasles (Übers. v. Sohncke S. 566.): „Merkwürdig ist es auf jeden Fall, und wohl der Betrachtung der Gelehrten von Europa würdig, daß ein Werk über Algebra, welches von den Arabern im elften Jahrhundert als ein elementares betrachtet wurde, und gewisser Maaßen als ein practisches Handbuch zum Gebrauch des Volks diente, daß dieses 700 Jahre später die ars magna der Europäer war, und die Basis und der Ursprung ihrer großen wissenschaftlichen Entdeckungen." In den Zahlen herrscht hier einige Verwirrung; Mohammed ben Musa schrieb am Anfange des neunten Jahrhunderts.

Digitized by Google

auf Schlag so schnell auf einander, daß es schwer wird, einen neuen festen Haltpunct zu gewinnen; neue Entdeckungen drängen sich von allen Seiten fast gleichzeitig herbei, und es gehört im siebzehnten Jahrhundert zu den Alltäglichkeiten, daß die Mathematiker streitig sind, wem bei einer neuen großen Erfindung die Ehre der Priorität gebührt. Zu der von Vieta eingeführten Methode der allgemeinen Coefficienten gesellte sich noch im Laufe dieses Jahrhunderts, was ohne Widerrede für die Mathematik das größte und resultatenreichste gewesen ist, die Methode der allgemeinen Exponenten; ja es erwächst aus dem von Fermat gesäeten Keime, der Methode der Maxima und Minima und der Tangenten, welche in mannigfacher Form und unter verschiedenen Namen von Hand zu Hand gehend sich immer vollkommener entwickelt, die Differentialrechnung, welche wie mit einem Zauberbande das ganze Gebiet der Mathematik umstrikkend, plötzlich die Scheidewände einreißt, welche bisher die einzelnen Disciplinen aus einander hielten, so daß es von da an keine Geschichte der Algebra mehr, sondern nur noch eine Geschichte der Mathematik giebt.

Ich kann nicht umhin, hier eine Bemerkung zu machen, die übrigens für nichts weiter als einen gelegentlichen Einfall gelten soll; die nämlich, daß gerade die größten mathematischen Genies aller Zeiten, denen die Wissenschaft ihre eclatantesten Erweiterungen verdankt, der Mehrzahl nach nicht Mathematiker von Profession, sondern Dilettanten gewesen sind. Unter allen Mathematikern des Alterthums ragt Archimedes hervor; er war ein Verwandter des Königs Hieron von Syracus, und lebte privatim den Wissenschaften, wogegen die übrigen Griechischen Koryphäen, Euklides, Apollonius, Pappus u. s. w. Lehrer der Mathematik an der Alexandrinischen Schule waren. Unter den Neuern eröffnet den Reihen Leonardo Bonacci, der Einführer der Algebra nach Europa; er war Kaufmann in Pisa; Kopernikus, der Entdecker der Weltordnung, war Doctor der Medicin und späterhin Domherr in Frauenburg; Vieta, der Erfinder der Buchstabenrechnung, wodurch er die Algebra zu dem Range einer Wissenschaft erhob, war Maître-de-Requêtes am Hofe Heinrichs IV.; Bachet de Meziriac, Erfinder der allgemeinen Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades und Hauptbegründer der Diophantischen Analysis in Europa, war ein reicher Privatmann; Fermat, für dessen tiefe Sätze aus der Theorie der Zahlen man bis auf den heutigen Tag noch nicht die von ihm er-

Digitized by Google

fundenen aber verschwiegenen Beweise alle hat wiederfinden können, und der den ersten Anstoß zur Erfindung der Differentialrechnung gab, war Jurist und Parlamentsrath in Toulouse; Napier Baron von Merchiston, der Erfinder der Logarithmen, lebte eingezogen auf seinem gleichnamigen Landgute in Schottland; Descartes, der Erfinder der analytischen Geometrie und vieler wichtigen Lehren über die Natur der allgemeinen Gleichungen, war Officier; Leibnitz, der Erfinder der Differentialrechnung, um weiter nichts zu nennen, war Doctor der Rechte, dann erst churfürstlich Mainzischer, hernach Braunschweig-Lüneburgischer Rath, zuletzt Präsident der von ihm eingerichteten Academie der Wissenschaften in Berlin. Nach diesem Intermezzo kehren wir auf unsern Gegenstand zurück.

Nach dem gegebenen Überblicke theilt sich die Geschichte der Algebra ziemlich ungezwungen in folgende fünf Perioden:

1. Die Algebra der Griechen, von Pythagoras (rechtwinkliges Dreieck in rationalen Zahlen) bis auf Diophantus.
2. Die Algebra in Asien, und zwar
   a) bei den Indern.
   b) bei den Arabern.
3. Die Algebra numerosa in Europa, von Bonacci (1200) bis Bombelli (1589).
   a) Von Bonacci bis Pacioli (1494), quadratische Gleichungen.
   b) Das sechszehnte Jahrhundert, kubische (Tartaglia) und biquadratische (Ferrari) Gleichungen.
4. Von Vieta und Xylander (1575), (Allgemeine Coefficienten, Algebra speciosa, Einfluß Diophant's) bis zur Erfindung der Differentialrechnung (Newton, Leibnitz).
5. Das achtzehnte und neunzehnte Jahrhundert.

Diesem oberflächlich dargestellten Plane werde ich in meiner Geschichte der Algebra folgen und jeder der vier ersten Perioden einen Band widmen, welcher einen in sich abgeschlossenen Zeitraum behandeln wird, so daß jeder derselben als ein für sich bestehendes Ganze angesehen werden kann. Mit dem Ende des siebzehnten Jahrhunderts gedenke ich aber auch meine Arbeit zu beschließen und die historische Behandlung der Algebra in der fünften Periode, von Leibnitz und Newton bis auf unsere Zeit, einem Anderen zu überlassen.

Ich habe in der oben gegebenen Übersicht und Recension meiner Vorarbeiten manches strenge, vielleicht manches zu strenge Urtheil gefällt. Es wird mir und meinem Werke vielleicht künftig nicht besser

Digitized by Google

gehen; ja ich weiß mit Gewißheit, daß ich bei dem besten Willen nicht im Stande bin, ein vollkommen tadelfreies Werk zu liefern. Es sei mir aber erlaubt, bevor ich meinen Gegenstand selbst angreife, hier auf einige Fehler aufmerksam zu machen, die ich in so vielen der oben recensirten Werke gefunden habe, und die ich nun desto geflissentlicher zu vermeiden mich bemühen will, je grausamer sie bei meinen Vorstudien in fremden Werken mich oft gequält haben, und je geeigneter sie sind, dem Zwecke einer wissenschaftlich historischen Arbeit störend entgegenzutreten.

Meine erste Bemerkung betrifft die Citate. Die Regel, daß ein historischer Schriftsteller, was seine Belege und Auctoritäten anlangt, erstens dieselben richtig und genau, zweitens aber nur das citirt, was er gesehen hat, scheint so natürlich zu sein, daß man es leicht für überflüssig halten kann, über einen so trivialen Gegenstand noch Worte zu machen. Und doch, wie oft und wie vielfach wird gegen beide Regeln gefehlt! Was soll man z. B. bei der Unzahl von Werken, welche Regiomontanus theils selbst verfaßt, theils mit Vorreden und Anmerkungen herausgegeben hat, mit einem solchen Citat machen, wie es Bachet in der **Epistola ad Lectorem** vor seiner Ausgabe Diophant's giebt: **Joannes tamen Regiomontanus, tredecim Diophanti libros se alicubi vidisse asseverat?** Nun suche, wenn Du wissen willst, ob das wahr ist. Genauer ist Vossius (**de IV. artibus pop. p. 432**): **Diophanto inventionem Algebrae adscribit Jo. Regiomontanus, praef. in Alfraganum.** Beide Citate sind aber außerdem ihrem Inhalte nach unrichtig; denn Regiomontan's Worte in der die Vorrede vertretenden **Oratio habita Patavii in praelectione Alfragani** (S. 4.) lauten also: **Diofanti autem tredecim libros subtilissimos nemo usquehac ex Graecis Latinos fecit, in quibus flos ipse totius Arithmeticae latet, ars videlicet rei et census, quam hodie vocant Algebram Arabico nomine.** Von dem Sinne, den Vossius in die Stelle hineinlegt, ist keine Spur vorhanden, und daß Regiomontanus Diophant's Werk selbst gesehen habe, wie Bachet sagt, kann zwar aus seinen Worten geschlossen werden, steht aber so geradezu auch nicht da, und Bachet's „**se alicubi vidisse asserit**" ist jedenfalls unwahr, wenn er anders diese Stelle gemeint hat. Aber es ist mir nicht gelungen, in Regiomontan's Werken, soweit sie mir zugänglich waren, eine andere Stelle zu finden, die von Diophant handelt. Ein zweites Beispiel mag uns Montucla suppeditiren, wel-

Digitized by Google

cher T. 1. p. 383 ſagt: Mohammed ben Musa . . . est donné par Cardan pour l'inventeur de la résolution des équations du second dégré; j'ignore sur quel fondement. In einer Note zu dieſer Stelle ſteht: Algebra. Abgeſehen nun davon, daß kein Werk von Cardan den Titel Algebra führt, und wahrſcheinlich ſeine Ars magna seu de regulis Algebraicis gemeint iſt, ſo iſt doch das Citat noch immer unbeſtimmt genug, um den Leſer, dem daran liegt, die Auctorität ſelbſt zu prüfen, beim Nachſuchen zu ermüden. Cardan erwähnt Mohammed's dreimal, einmal zu Anfang der Ars magna mit den Worten: Haec ars olim a Mahometo Mosis Arabis filio initium sumsit; etenim hujus rei locuples testis Leonardus Pisanus. Sodann De subtilitate l. XVI. p. 445. (ed. Basil. 1553): Huic Mahometus Moisis filius Arabs, Algebraticae, ut ita dicam, artis inventor, succedit. Endlich De mathematicis quaesitis II, 9. Fuit et Mahomet Moisis filius (sic enim inveni), qui celebratam artem, quam vulgo Algebrae vocant, in Arabia condidit, non totam, sed quatuor tantum ejus prima capita. Nun iſt erſtens an allen drei beigebrachten Stellen nicht von den quadratiſchen Gleichungen, ſondern von der Algebra im Allgemeinen die Rede; zweitens aber nennt ja Cardan in der Stelle aus der Ars magna, welche Montucla doch wahrſcheinlich im Sinne gehabt hat, mit klaren Worten ſeinen Gewährsmann; wie konnte alſo Montucla ſagen, j'ignore sur quel fondement? Daß auch Cardan falſch citirt, und daß bei Leonard von Piſa ſich eine ſolche Stelle nicht findet [17]), iſt eine Sache für ſich. Und ſolcher Beiſpiele könnte ich unzählige beibringen. Beiſpiele von dem zweiten Fehler, daß Schriftſteller fremde Citate abſchreiben, ohne von deren Richtigkeit ſich ſelbſt überzeugt zu haben, haben wir ſchon in unſerer 7. und 11. Note vor Augen gehabt, und ſie ſind überhaupt nicht weniger häufig, als die der erſten Art. Wallis z. B. ſagt in ſeiner Algebra (Op. T. II. p. 2.): Analyseos inventionem Platoni adscribit Theo, saltem si Theonis ea sint, quae sub initium libri 13. Euclidis habentur huc spectantia. Von hier iſt dieſer Ausſpruch in die oben genannte Diſſertation von Krebs (De originibus et antiq. math. 1702) übergegangen, wo es S. 28 ſo heißt: Theo, vetus quidam scholiasta, Platoni, referente Wallisio, analyseos inventionem adscribit. Das hätte nun der

17) S. Cossali Orig. etc. T. I. p. 183.

Digitized by Google

Verfaſſer nicht abſchreiben ſollen; denn was wäre leichter geweſen, als einen Euklid aufzuſchlagen, und ſich zu überzeugen, daß an der citirten Stelle Plato's mit keiner Sylbe gedacht wird? Durch dieſe Methode des Citirens fremder Citate ſind unglaubliche Verwirrungen in die Geſchichte der Mathematik gekommen, indem Irrthümer und Unrichtigkeiten oft Jahrhunderte lang aus einem Buche in das andere übergegangen ſind, weil Niemand ſich die Mühe genommen hat, auf die letzte Quelle zurückzugehen. Am bequemſten aber iſt es, wenn man gar nichts citirt und ſich ſelbſt für hiſtoriſche Auctorität genug hält. Da hört dann freilich alle kritiſche Prüfung auf. Und doch hat dieſe Schreibart eine große Auctorität für ſich, nämlich alle Griechiſchen Hiſtoriker. Aus dem Geſagten folgen für den Geſchichtſchreiber zwei unerläßliche Regeln. Erſtens, er muß nicht nur mit genauer Angabe der Stelle citiren, ſondern auch ſolche Stellen, auf welche er Hypotheſen bauen und aus denen er wichtige Schlußfolgen ziehen will, zumal wenn ſie aus Büchern entnommen ſind, die ſich nicht in Jedermanns Händen befinden, wörtlich und in der Sprache des Originals abſchreiben. Dieſe Regel werde ich im Verlauf meiner Geſchichte ſogar bei den Citaten aus orientaliſchen Auctoren befolgen, zum Beſten der Mehrzahl der Leſer aber in dem Falle eine treue Überſetzung hinzufügen. Zweitens, man muß nur Bücher citiren, die man ſelbſt geleſen hat, und ungeprüft kein fremdes Citat abſchreiben. Und ſo können meine Leſer ſich darauf verlaſſen, daß ich, weit entfernt durch unnöthig angehäufte Citate mir den äußern Anſchein großer Beleſenheit geben zu wollen, auch dieſe zweite Regel ſtrenge befolgen werde. Iſt mir aber die letzte Quelle nicht zugänglich geweſen, und bin ich genöthigt worden, mich auf ein Zwiſchenglied zu ſtützen, was ich leider nicht immer habe vermeiden können, da ich nach manchem für meinen Zweck wichtigen Werke bis jetzt vergebens geſtrebt habe, ſo werde ich nie unterlaſſen, dieſes ausdrücklich zu bemerken.

Die zweite Bemerkung, die ich zu machen habe, und die ſchon oben gelegentlich berührt worden iſt, betrifft die treue und dem Geiſte jedes einzelnen Schriftſtellers angemeſſene Darſtellung fremder Lehren und Vorträge. Jedes Jahrhundert erweitert den menſchlichen Geſichtskreis und ſteht in wiſſenſchaftlicher Beziehung über dem vorigen. Nichts iſt alſo bei der Lectüre alter Werke gewöhnlicher und natürlicher, als daß wir unſern eigenen Standpunct dem alten Schriftſteller, den wir leſen, ſubſtituiren. Namentlich hat die Mathematik

Digitized by Google

in neueſter Zeit ſich zu einem erſtaunenswerthen Grade von Allgemeinheit der Anſchauung erhoben, und wenn immerhin der Keim der heutigen Univerſalität in der vorhergehenden Stufe bereits ausgeſäet liegt, weil jene ſich nicht hätte entwickeln können, wenn die Vorſtellung der Alten nicht dieſer Verallgemeinerung und Abſtraction von dem Partiellen fähig geweſen wäre, ſo wäre es doch ſehr unrecht, wenn wir den Alten darum auch ſchon factiſch dieſe Univerſalität der Vorſtellung beilegen wollten. Es iſt zum Beiſpiel, was die ſubjective Vorſtellung anbelangt, ein gewaltiger Unterſchied, ob ein heutiger Mathematiker einen Satz oder eine Formel von vorne herein in ihrer ganzen Allgemeinheit deducirt und ausſpricht, oder ob ein Älterer die Sache durch Induction an einigen Fällen darthut, und dann ſagt, et sic in infinitum. Was dort in ſeinem Geſammteindruck dem Geiſte auf einmal klar vor Augen geſtellt wird, iſt hier erſt als ſich ſtufenweiſe entwickelnd gedacht. Es gehört daher mit zu den ſchwierigſten Geſchäften des Hiſtorikers, die Vorſtellungsweiſe nicht nur jedes Auctors, ſondern auch jeder Zeitperiode in ihrem individuellen Charakter aufzufaſſen und wiederzugeben, und den Standpunct der Gegenwart im Auge zu behalten, ohne den früheren Schriftſteller aus ſeiner eigenthümlichen Sphäre in dieſe heraufzuziehen. Gegen dieſe Grundregel iſt ſehr oft gefehlt worden, und man iſt bald nach einer, bald nach der andern Seite davon abgewichen; man hat entweder das aus dem beſchränkteren Geſichtskreiſe Hervorgegangene in eiteler Selbſtgefälligkeit als völlig unbeachtenswerth verworfen, oder man hat im Gegentheil, und das iſt faſt noch öfter geſchehen, das den Keim der Verallgemeinerung in ſich Tragende ſchon für das wirklich Univerſelle gehalten. Hier die Mittelſtraße zu treffen iſt nicht leicht, und ich weiß nicht, ob es mir immer gelingen wird. Wo es mir nicht gelingen ſollte, da hoffe ich wenigſtens in der Anerkennung meiner redlichen Abſicht einen Erſatz für gerechten Tadel zu finden.

Ich brauche wohl kaum zu bemerken, daß man ſich täuſchen würde, wenn man in dieſem Werke eine vollſtändige Aufzählung algebraiſcher Werke und ihrer Verfaſſer ſuchte. Die älteren Hiſtoriographen haben, wie ſchon aus der gegebenen Überſicht erhellt, drei verſchiedene Dinge in der Regel mit einander verwechſelt, Biographien der Mathematiker, mathematiſche Bibliographie und Geſchichte der Mathematik als Wiſſenſchaft. Eine Geſchichte des Entſtehens und der allmähligen Fortbildung und Entwickelung der Algebra als

Digitized by Google

Wiſſenſchaft zu liefern, eine treue Darſtellung zu geben von den verſchiedenen Stufen der Vervollkommnung, welche dieſelbe durchlaufen mußte, um von ihren erſten Keimen bis zu ihrem jetzigen Standpuncte zu gelangen, das iſt die Abſicht, in welcher ich dieſes Buch ſchreibe. Darum erwarte man hier nicht Namen, ſondern Sachen, nicht vollſtändige Regiſter von Büchertiteln, ſondern Darlegung des Inhalts der wenigen Bücher, welche weſentlich auf die Förderung der Wiſſenſchaft eingewirkt haben. Der Erſte, der dieſen Unterſchied rein aufgefaßt hat, ohne ihn indeß immer factiſch durchzuführen, iſt Montucla, der ſchon ſehr richtig bemerkt: **L'histoire d'une science n'est pas celle de tous les auteurs, qui en ont écrit, mais seulement de ceux, qui ont contribué par leurs travaux à en reculer les bornes: l'énumeration exacte des premiers est l'ouvrage du bibliographe et non de l'historien.** (Hist. des math. T. 1. p. 648).

Digitized by Google

Zweites Kapitel.

Ueber die verschiedenen Namen der Algebra.

Die Griechen unterscheiden ziemlich genau zwei verschiedene Theile derjenigen Wissenschaft, welche wir Arithmetik nennen. Bei ihnen ist Ἀριθμητικὴ keinesweges die Rechenkunst, sondern es ist die Zahlenwissenschaft, deren Gegenstand die Eintheilung der Zahlen nach ihren besonderen Eigenschaften und Eigenthümlichkeiten, z. B. grade und ungrade, Primzahlen und zusammengesetzte u. s. w. ist. Arithmetik ist also bei ihnen eine ganz theoretische Wissenschaft, und man würde vergebens in den Werken von Nikomachus und den übrigen sogenannten Arithmetikern irgend eine Anleitung, oder auch nur eine Erwähnung der praktischen Rechenkunst suchen. Diese letztere führt dagegen bei ihnen den Namen Λογιστικὴ, vielleicht auch Λογισμός [1]). Dieser Unterschied wurde schon von Plato gemacht [2]), ja er war vielleicht schon zu seiner Zeit gebräuchlich. Deutlicher noch als Plato setzt Proklus [3]) den Unterschied zwischen den theoretischen Wissenschaften, der Geometrie und Arithmetik auf der einen, und den praktischen, der Geodesie und Logistik auf der andern Seite, aus einander, indem er sagt: die ersteren betrachten die Figuren und Zahlen an und für sich, die zweiten aber behandeln Figuren und Zahlen nur insofern, als sie gestaltete und gezählte sinnliche Gegenstände sind. Die Stelle, die Eintheilung der Mathematik im Sinne des Geminus darstellend, lautet so: κατὰ ἄλλον δ' αὖ τρόπον τὸν μαθηματικὸν [4]) τέμνειν τινὲς ἀξιοῦσιν ὥσπερ καὶ Γεμῖνος· καὶ ποιοῦσι τὴν μὲν περὶ τὰ νοητὰ μόνον, τὴν δὲ περὶ τὰ αἰσθητα καὶ τούτων ἐφαπτομένην· νοητὰ δέ που καλοῦντες ὅσα καθ' ἑαυτὴν ἡ

1) Λογισμὸς· ἡ λογιστικὴ τέχνη. Suidas.
2) Gorgias c. 13.
3) Ed. Bas. p. 11. 12. Baroc. p. 22. Lib. 1. c. 13.
4) Soll wohl τὴν μαθηματικὴν heißen, wie ich übersetzt habe.

Digitized by Google

ψυχὴ ϑεάματα ἀνακίνει χωρίζουσα τῶν ἐνύλων ἑαυτὴν εἰδῶν. Καὶ τῆς μὲν περὶ τὰ νοητὰ πραγματευομένης, δύο τὰ πρώτιστα [5]) καὶ κυριώτατα μέρη τίϑενται, ἀριϑμητικὴν καὶ γεωμετρίαν· τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσϑητὰ τὴν ἐνέργειαν ἐχούσης, ἓξ, μηχανικὴν, ἀστρολογίαν, ὀπτικὴν, γεωδεσίαν, κανονικὴν, λογιστικήν [6]). Das heißt alſo: „Manche glauben die Mathematik auf andere Weiſe eintheilen zu müſſen, wie auch Geminus; und ſie beſtimmen den Unterſchied ſo, daß die eine ſich allein mit dem Intelligibeln, die andere ſich mit dem Senſibeln beſchäftigt und dieſem anhängt; indem ſie intelligibel alle diejenigen Anſchauungen nennen, welche die Seele durch ſich ſelbſt erregt, indem ſie von materiellen Formen abſtrahirt. Diejenige, welche mit dem Intelligibeln ſich beſchäftigt, theilen ſie in zwei urſprüngliche und Hauptttheile, in die Arithmetik und Geometrie; diejenige aber, welche an dem Senſibeln ihre Thätigkeit entwickelt, in ſechs, in die Mechanik, Aſtronomie, Optik, Geodeſie, Muſik, Logiſtik.“ Nach einigen Zwiſchenreden über Wiſſenſchaften, die nicht zur Mathematik gehören, giebt der Verfaſſer die Eintheilungen der Geometrie in Planimetrie und Stereometrie, und fährt dann (S. 12) ſo fort: τῆς δὲ ἀριϑμητικῆς ὡσαύτως ἡ διαίρεσις, εἴ τε τὴν τῶν γραμμικῶν [7]) ἀριϑμῶν ϑεωρίαν, καὶ τὴν τῶν ἐπιπέδων, καὶ τὴν τῶν στερεῶν· καὶ γὰρ τὰ εἴδη τοῦ ἀριϑμοῦ καϑ' αὐτὰ σκοπεῖ προϊόντα ἀπὸ μονάδος, καὶ τὰς γενέσεις τῶν ἐπιπέδων τῶν τε ὁμοίων καὶ τῶν ἀνομοίων, καὶ τὰς εἰς τρίτην αὔξησιν προόδους. Γεωδεσία δὲ καὶ λογιστικὴ ταύταις ἀνάλογοι [8]), οὐ περὶ νοητῶν ἀριϑμῶν ἢ σχημάτων, ἀλλὰ περὶ αἰσϑητῶν ποιούμεναι τοὺς λόγους· οὐ γὰρ κύλινδρον ἢ κῶνον ἔργον τῆς γεωδεσίας μετρεῖν, ἀλλὰ σωροὺς ὡς κώνους καὶ φρίατα ὡς κυλίνδρους, οὐδὲ δι' εὐϑειῶν νοητῶν, ἀλλὰ αἰσϑητῶν, τότε μὲν, ἀμειβεστέρων οἷον διὰ σπάρτων καὶ διὰ στάϑμης * * * [9]). Οὐδ' αὖ

---

5) Ed. Bas. πρῶτηστα! monstrum vocabuli.

6) Ed. Bas. λογικήν, offenbar fehlerhaft, wie aus dem Folgenden klar hervorgeht.

7) Ed. γραμματικῶν. Aber γραμμικοὶ heißen die Zahlen von einer Dimenſion d. h. die Primzahlen bei Theon von Smyrna (Arithm. c. 6.) und εὐϑυγραμμικοὶ bei Jamblichus (Ed. Tennulii p. 36).

8) Ed. ἀνάλογον.

9) Hier iſt im gedruckten Text offenbar eine Lücke. Barocius füllt ſie ſo aus: neque intellectibilibus id assequitur rectis lineis, sed sensibilibus, inter-

Digitized by Google

ὁ λογιστικὸς αὐτὰ καθ' αὑτὰ θεωρεῖ τὰ πάθη τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' ἐπὶ τῶν αἰσθητῶν, ὅθεν καὶ τὴν ἐπωνυμίαν τοῖς [10]) ἀπὸ τῶν μετρουμένων τίθεται μηλίας *) καλῶν τινὰς καὶ φιαλίτας etc. D. h. „Auf gleiche Weiſe wird die Arithmetik eingetheilt in die Theorie der linearen, in die der ebenen und in die der körperlichen Zahlen; ſie betrachtet nämlich die Geſtaltungen der Zahl an und für ſich als aus der Einheit hervorgehend, ferner die Entſtehungsart der ebenen, ſowohl ähnlichen als unähnlichen, Zahlen, ebenſo die Fortſchritte zur dritten Dimenſion. Die dieſen analogen Wiſſenſchaften dagegen, die Geodeſie und die Logiſtik, beſchäftigen ſich nicht mit intelligibeln Zahlen oder Figuren, ſondern mit ſenſibeln. Denn es iſt nicht das Geſchäft der Geodeſie einen Cylinder oder Kegel zu meſſen, ſondern kegelförmige Haufen und cylinderförmige Brunnen .. (ſ. Note 9.) ... Auf der andern Seite betrachtet der Logiſtiker die Eigenſchaften der Zahlen nicht an und für ſich, ſondern mit Bezug auf ſinnliche Gegenſtände; daher giebt er ihnen auch die Benennung von dem Gemeſſenen, indem er ſie μηλίτας und φιαλίτας nennt." Mit einem Worte, Arithmetik iſt eine theoretiſche, Logiſtik eine praktiſche Wiſſenſchaft. Dieſen Unterſchied haben auch die Araber und die von ihnen wiſſenſchaftlich abhängigen ſpäteren Perſer richtig aufgefaßt. So finde ich in der Perſiſchen Paraphraſe des **Khilâsat-al-Hisâb** (Eſſenz der Rechenkunſt) von Mohammed Beha-eddin [11]) aus dem ſechszehnten Jahrhundert (die Paraphraſe iſt aber wohl jünger) folgende Diſtinction: „Die Zahlenkunde iſt doppelter Art; die eine iſt ſpeculativ, und das iſt die Wiſſenſchaft, in welcher man über die an der Zahl weſentlich haftenden Eigen-

---

dum quidem certioribus (?) quodam pacto, ut radiis solaribus; interdum vero crassioribus, ut spartis et perpendiculo.

10) Wahrſcheinlich iſt αὐτοῖς oder τούτοις zu leſen.

*) Leg. μηλίτας sc. ἀριθμούς, Schaafzahlen. Dieſes bezieht ſich auf eine Aufgabe von Schaafen und Schalen (φιάλη).

11) The Khoolasut-ool-Hisab, a compendium of arithmetic and geometry in the arabic language by Buhae-ood-Deen of Amool in Syria, with a translation into Persian and commentary by the late Muolawee Ruoshun Ulee of Juonpoor; to which is added a treatise on Algebra by Nujm-ood-deen Ulee Khan, head Qazee, to the Sudr Deewanee and Nizamut Udalut etc. Calcutta. 1812. 8. Das Buch iſt nicht für Europa beſtimmt; ſonſt wären Ausgaben Arabiſcher und Perſiſcher Mathematiker ohne Überſetzung in einer Europäiſchen Sprache nicht zu billigen.

Digitized by Google

schaften nachforscht; diese Wissenschaft heißt in der Griechischen Sprache Arithmetik; die zweite ist praktisch, und das ist die Wissenschaft, aus welcher man lernt, wie man unbekannte Zahlen aus bekannten Zahlen ableitet. Der Auctor giebt eine Unterweisung in der zweiten Art [12]." Indeß haben die Araber für die Arithmetik, im Griechischen Sinne des Worts, keinen eigenen Ausdruck, sondern sie behalten den Griechischen Namen ἀριθμητικὴ, ارثماطيقي bei; eben so die Perser, wie aus der eben beigebrachten Stelle hervorgeht. Um eine echt Arabische Auctorität anzuführen, nenne ich nur den Titel, welchen Thabet-ben-Korah seiner Bearbeitung der Arithmetik des Nikomachus giebt: جوامع عملها لكتاب نيقو مخس في الارثماطيقي مقالتان „Auszug aus dem Werke des Nikomachus über Arithmetik, zwei Bücher [13]." Griechische Arithmetiker sind in nicht geringer Anzahl auf uns gekommen; ich nenne nur die Werke des eben erwähnten Nikomachus, dann des Theon von Smyrna, Jamblichus, Plotinus, Psellus, und die lateinisch geschriebene, aber ganz im Griechischen Sinne nach Nikomachus gearbeitete Arithmetik von Boëthius, vieler späterer nicht zu gedenken; ja selbst das siebente bis zehnte Buch der Elemente Euklid's bilden ein Lehrbuch der Arithmetik. Dagegen haben wir keine einzige alte Logistik von den Griechen über-

---

12) p. 5. علم حساب دو گونه است یکی نظري وآن علمیست که در آن بحث کرده شود از اعراض ذاتیه مر عدد را واین علم را ارثماطیقي نامند بزبان یونان دوم عملي وآن علمیست که از آن در یافت شود که چگونه مجهولات عددیه را از معلومات عددیه استخراج کنند ومصنف تعریف قسم دوم کرد ✡

Und noch auf derselben Seite zu den Worten des Textes وموضوعه العدد „und ihr (der Rechenkunst) Gegenstand ist die Zahl" sagt er: „Der Gegenstand der Rechenkunst, derjenigen nämlich, deren Regeln Gegenstand der Untersuchung in der zweiten Art der Zahlenkunde sind, ist die Zahl, in dem Sinne, wie man aus einer bekannten Zahl eine unbekannte finden kann, nicht die Zahl an und für sich (نه عدد مطلقا), nämlich in dem Sinne, welcher, wie erwähnt, Gegenstand der Arithmetik ist."

13) Casiri bibl. arab. hisp. Escur. T. 1. p. 390., wo الارثاماطيقي ein Druckfehler zu sein scheint, woran dieses schöne Werk zumal in seinen schätzenswerthen Auszügen aus Arabischen Manuscripten leider nur zu reich ist.

Digitized by Google

kommen; das älteſte Buch, welches ganz dieſem Gegenſtande gewidmet iſt, iſt die Logiſtik des Mönchs Barlaam aus dem vierzehnten Jahrhundert. Die Commentare von Theon Alexandrinus und von Eutokius enthalten nur Einzelnes, was hieher gehört.

Für die Algebra, wie ſie in dem Werke von Diophantus erſcheint, haben die Griechen keinen eigenen Namen erfunden. Es fragt ſich alſo, welcher der beiden genannten Namen dem Gegenſtande dieſes Werks angemeſſener iſt. Diophant lehrt praktiſch die Auflöſung der Gleichungen, inſofern wäre Logiſtik der Inhalt ſeines Buchs. Aber auf einer Seite betrachtet er in ſeinen Aufgaben immer nur Zahlen an und für ſich, ohne Hindeutung auf praktiſche Anwendung (was bei Theon von Alexandrien geſchieht, deſſen Zahlen Theile des Halbmeſſers, Kreisſehnen u. ſ. w. ſind); auf der andern Seite lehrt er namentlich die Auflöſung der unbeſtimmten Gleichungen, welche ſowohl auf einer gründlichen Kenntniß der Zahlentheorie ſich baſirt, als auch in ihren Reſultaten auf Zahlentheorie und Zahleneigenſchaften zurückführt; inſofern iſt ſein Werk reine Arithmetik, wie er es bekanntlich ſelbſt genannt hat, Ἀριθμητικά (neutr. pl.).

Bei den Indern heißt die Algebra im engern Sinne vîja-gaṇita, vîja-kriyâ,[14]) „Urſprungsrechnung, Urſprungsoperation, Cauſalrechnung," inſofern als die algebraiſche Operation, entgegengeſetzt der gewöhnlichen Zahlenrechnung, zugleich die Gründe des Verfahrens an den Tag legt; auch kommt vîja allein in derſelben Bedeutung vor; ferner heißt die Wiſſenſchaft avyakta-gaṇita, avyakta-kriyâ, „Rechnung oder Operation mit der Unbekannten" (avyakta), im Gegenſatze der gemeinen Arithmetik, welche unter andern auch vyakta-gaṇita, „Rechnung mit bekannten Größen" heißt. Alle dieſe Namen ſind, wie die meiſten Kunſtausdrücke der Art bei den Indern, zugleich Definitionen, und bedürfen keiner weitern Erklärung. Über die beſonderen Namen kuttaka und varga-prakriti für die Theorie der unbeſtimmten Glei-

14) Ich drücke hier, wie im Folgenden immer, durch j einen Buchſtaben ſowohl des Indiſchen als des Arabiſchen Alphabets aus, den wir im Deutſchen nicht haben; er lautet etwa wie unſer dsch, oder wie das j bei den Engländern, denen dieſe Schreibart entlehnt iſt. Ich ziehe es vor j, und nicht dsch zu ſchreiben, weil es indecent erſcheint und auch zu Mißverſtändniſſen Veranlaſſung geben kann, wenn man ein fremdes Zeichen durch vier deutſche wiedergiebt. Daher iſt zu ſprechen Vîdscha, Dschebr, Dschâber, Hedschra u. ſ. w.

Digitized by Google

chungen, jener für die des ersten, dieser für die des zweiten Grades, werden wir gehörigen Orts sprechen.

Mehr historische Bedeutung hat, wegen ihres Einflusses auf Europa, die Benennung unserer Wissenschaft bei den Arabern, wo sie vollständig **Aljabr** (oder **Aljebr**) **wa'lmukâbalah** (الجبر والمقابلة) heißt, nie aber, wie es bei uns jetzt gebräuchlich ist, **Aljebr** allein. Vielfach sind beide Namen, besonders aber der erstere, gedeutet worden. Rafael Canacci, ein Florentiner, welcher im vierzehnten oder funfzehnten Jahrhundert eine Algebra unter dem Titel **Ragionamento di algebra** schrieb, leitet den Namen der Wissenschaft von einem Arabischen Mathematiker **Jeber** (oder **Jâber**, جابر) ab [15]), und manche Spätern, z. B. noch Michael Stifel und Jacob Peletarius [16]) im sechszehnten Jahrhundert, sind ihm in dieser Annahme gefolgt, obgleich dieselbe durchaus nichts weiter für sich hat, als den zufälligen Anklang des Namens. Denn erstens hat, soviel bis jetzt bekannt ist, der in Rede stehende Mathematiker oder vielmehr Astronom, dessen vollständiger Name **Abu-Mohammed Jâber ben Aflah Al-Ischbîlî** (d. h. aus Sevilla) ist, keine Algebra geschrieben; zweitens aber lebte er erst im fünften Jahrhundert der Hejra, oder im elften unserer Zeitrechnung, also, um Mehrer nicht zu gedenken, wenigstens zweihundert Jahre nach Mohammed ben Musa Alkharezmi, welcher sein Werk schon **Aljebr w'almukâbalah** betitelt [17]). Aber solche Anachronismen klingen noch sehr raisonnabel, wenn man sie

---

15) Cossali Orig. T. 1. p. 35.

16) Stifel Arithm. integra. Norimb. 1544. 4. p. 30. „Cossa seu ars Gebri." Ebenso p. 230. „De partium regulae Gebri ostensione." Es kann übrigens fraglich scheinen, ob Stifel unter dem Namen Gebri den Mathematiker Jâber gemeint habe, denn er braucht z. B. Lib. III. cap. II. die Namen regula Gebri und regula Algebrae ohne Unterschied abwechselnd. — Arithm. practicae methodus facilis per Gemmam Frisium. Huc acc. Jac. Peletarii annotationes etc. Colon. 1571. 8. p. 72. *Nota Peletarii.* Algebra autem dicta videtur a Gebro Arabe ut vox ipsa sonat; hujus artis si non inventore, saltem excultore.

17) Cardan scheint die Sache umzukehren und zu glauben, daß Mohammed ben Musa und der erwähnte Jaber oder Jeber eine Person gewesen seien, und daß der Erstere diesen Beinamen als Algebrist erhalten habe. Er sagt nämlich De subtil. l. XVI. sub fin. (p. 445): Huic Mahometus Moisis filius Arabs, Algebraticae, ut ita dicam, artis inventor, succedit. Ob id inventum ab artis nomine cognomen adeptus est. Ich weiß nicht, ob dieser an sich dunkle Zusatz anders zu verstehen ist.

Digitized by Google

mit folgender Stelle aus der Vorrede des Rechenbuchs von Andreas Helmreich (1595) vergleicht, die in der That ganz neue Aufschlüsse über die Geschichte der Algebra giebt: „Algebras zu Vlem, der große Geometer in Egypten, zur Zeit des Alexandri Magni, der da war ein Praeceptor oder Vorfahrer Euclidis, des Fürsten zu Megarien, als der köstlichst und berümste in der Zahl Pithagorä hero, hat auch gründlich Ding von den Zahlen mit Fleiß gesetzt, und das Buch in arabischer Sprach genannt Gebra und Almchabula, welches ein Buch ist von dem Dinge, das sie gesagt, die Zahl und Frage sei ein Ding, dadurch unerkannte Zahlen und Fragen werden geschrieben, so hernach von Arithmedo aus arabischer Sprach in griechisch ist transferirt, und weiter von Apuleio aus griechisch ins latein gebracht worden ... Denn diß Buch auch bey den Juden oder Indianern in großer Uebunge, mehr denn bey andern Völkern gewesen, und Alboreth von ihnen genannt ist [18])." Das Buch muß Saverien nicht gekannt haben, sonst wäre diese Stelle eine herrliche Eroberung für seine histoire de l'esprit humain gewesen. Bevor ich die richtige Erklärung der fraglichen Namen gebe, erwähne ich noch einige falsche Deutungen, welche alle darin ihren Grund haben, daß meistens den Orientalisten Sachkenntniß und den Mathematikern Sprachkenntniß abgeht. Unklar ist Golius [19]) und scheint selbst nicht recht zu wissen, was er sagen will: Hinc et vulgatum illud nomen Algebra Analysin mathematicam notat, utpote cujus praecipuum munus sit comparationis terminos reducere ad optatam aequationis formam, et speciatim eorundem partes ad integros redigere. In dem letzten Sinne, von der Wegschaffung der Brüche, versteht es auch Casiri [20]), indem er den Ausdruck Aljebr durch restitutio numerorum fractorum in integrum erklärt. Zwar könnte, wie wir sogleich sehen werden, dem Lexicon zufolge das Verbum jábara (جبر) diese Bedeutung haben; die Erklärung ist aber factisch unwahr; denn die

18) Ich habe die Stelle aus Kästner's Gesch. der Math. Th. I. S. 147. 148. abgeschrieben. Kästner fügt hinzu: „Helmreich war auch Notarius Publicus. Ich hoffe bei diesem Amte wird er besser protocollirt haben."

19) Muhammedis Fil. Ketiri Ferganensis, qui vulgo Alfraganus dicitur, elementa Astronomica, Arabice et Latine, cum notis etc. opera Jacobi Golii. Amstel. 1669. S. Notae p. 11.

20) Bibl. Arab. hisp. Escur. T. I. p. 370.

Digitized by Google

Arabiſchen Mathematiker brauchen für dieſe Operation nie das Verbum jábara, ſondern entweder kámmala (Conj. II. von كمل), oder ákmala (Conj. IV. ej.) oder támmama (Conj. II. von تمّ)[21]). Hören wir nach dieſen beiden gelehrten Orientaliſten nun noch die Anſicht eines eben ſo berühmten Mathematikers. Wallis[22]) folgert ſo: **Arabibus dicitur Algja'br W'almukábala .... Et quidem Lucas de Burgo Restitutionis et Oppositionis regulam interpretatur. Aut etiam si gjabara interpretemur componere, et kábala apponere seu contrariari, non male exponas algjabr w'almukabala per compositionem ejusque contrarium, hoc est Synthesis et Analysis.** Dieſe Deduktion iſt geiſtreich, aber willkührlich, und entſpricht weder den Worten, noch der Sache.

Über dieſe falſchen Erklärungen des in Rede ſtehenden Namens unſerer Wiſſenſchaft muß man ſich um ſo mehr wundern, als ſchon die älteſten Europäiſchen Algebriſten die richtigen Deutungen gegeben haben[23]). Wir wollen der genaueren Erklärung wegen ein wenig in die Sache eingehen. Die Araber hatten eben ſo wenig, wie ihre nächſten Schüler, die alten Italiener, den allgemeinen Begriff aufgefaßt, den wir mit dem Worte Gleichung verbinden. Die Einen, wie die Andern kannten nur, wie wir künftig ſehen werden, Gleichheiten zweier abſolut poſitiven Größen, und eine Formel, wie $x^2 + 5x + 6 = o$ war in ihren Augen ein wahres Monſtrum, ein algebraiſcher Unſinn[24]). Da nun die allgemeine Form

---

21) Vergl. Rosen in The Algebra of Moh. b. Musa. London. 1831. 8. p. 186.

22) Opera T. II. p. 2.

23) Z. B. Leonard von Piſa und Lucas de Burge. S. Cossali T. I. p. 25.

24) Darum vernachläſſigt z. B. Cardan, der alle möglichen Combinationen der kubiſchen Gleichungen durcharbeitet, die drei Fälle $x^3 + px + q = o$, $x^3 + nx^2 + q = o$ und $x^3 + nx^2 + px + q = o$, und ebenſo die entſprechende quadratiſche Gleichung $x^2 + px + q = o$. Daſſelbe thut noch Vieta, ja ſelbſt Harriot, bei dem man ſich über die Vernachläſſigung dieſer Formen um ſo mehr verwundert, da er der Urheber der Sitte iſt, die Gleichungen auf o zu reduciren, indem er alle Glieder ohne Rückſicht der Zeichen auf eine Seite ſtellt. Vieta ordnet die Gleichungen ſo, daß das abſolute Glied (bei ihm homogeneum comparationis) poſitiv auf einer Seite allein ſteht. Jene Gleichungen mit lauter poſitiven Gliedern auf einer Seite ſcheint zuerſt Descartes betrachtet zu haben.

Digitized by Google

der quadratiſchen Gleichung $x^2 \pm px \pm q$ vier Fälle in ſich begreift, von denen ſie aber einen verwerfen, ſo bleiben ihnen nur drei Fälle übrig, $x^2 + px - q = o$, $x^2 - px + q = o$, $x^2 - px - q = o$, welche ſie nach der obigen Bemerkung aber ſo ordnen, daß alle Glieder poſitiv erſcheinen; demnach haben ſie drei zuſammengeſetzte quadratiſche Gleichungen: 1) $x^2 + px = q$ 2) $x^2 + q = px$ 3) $x^2 = px + q$. Für dieſe drei Formeln geben ſowohl die Arabiſchen, als auch die alten Italieniſchen Algebriſten beſondere Regeln. Sind ſie nun durch den Anſatz auf irgend eine Gleichung geführt worden, ſo iſt es ihr erſtes Geſchäft, die negativen Glieder durch Transpoſition aus derſelben zu entfernen, und dieſe Operation eben iſt es, welche ſie mit dem Namen jebr oder aljebr bezeichnen. Herſtellung, restitutio, restauratio (von jábara, restituit, auch von chirurgiſchen Operationen gebraucht, zumal von der Heilung der Knochenbrüche, woher auch in der Spaniſchen Sprache, welche ſo viele Wörter aus dem Arabiſchen aufgenommen hat, noch jetzt ein Wundarzt algebrista heißt) nennen die Araber dieſe Operation darum, weil die Gleichung erſt nach der Austilgung der negativen Glieder die für die fernere Behandlung brauchbare Form erhält. Dem Jebr folgt nun die zweite Operation mokâbalah, Vergleichung (von dem Verbum kábala, قبل, in der dritten Conjugation oppositus fuit; auch tranſitiv opposuit, comparavit), welche darin beſteht, daß die gleichnamigen Glieder auf beiden Seiten der Gleichung mit einander verglichen, und, ſoweit es ſich thun läßt, gegen einander aufgehoben werden. Nach Anwendung beider Operationen iſt die Gleichung des erſten Grades aufgelöſt in der Form $x = a$, die Gleichungen des zweiten Grades aber erſt auf eine der drei kanoniſchen Formen $x^2 + px = q$, oder $x^2 + q = px$, oder $px + q = x^2$ reducirt, und es kommt alſo bei den letzteren noch eine dritte Operation, die Auflöſung hinzu. Dieſes iſt die übrigens nicht neue Erklärung der ſo oft gemißdeuteten Namen. Der älteſte Arabiſche Algebriſt, Mohammed ben Muſa Alkharezmi, gebraucht die beiden Namen, ohne ſie zu erklären; alſo waren ſie wohl ſchon vor ſeiner Zeit, das heißt, vor dem Anfange des neunten Jahrhunderts, im Gebrauch. Beha-eddin in ſeinem ſchon erwähnten Khilâsat-al-Hisâb giebt die Erklärung in folgenden einfachen Worten: والطرف ذو الاستثناء يكمل ويزاد مثل ذلك علي الآخر وهو الجبر والاجناس المتجانسة المتساوية في الطرفين يسقط

يسقط منهما وهو المقابلة d. h. „Die Seite, welche mit einer Negation behaftet ist, wird ergänzt, und etwas dieser Gleiches auf der andern Seite addirt; das ist Al-jebr. Die homogenen und gleichen Glieder auf beiden Seiten werden ausgeworfen, und das ist Al-mokâbalah [25])." Mehr Stellen der Art stellt Rosen in seinen Erläuterungen zu Mohammed's ben Musa Algebra zusammen [26]), welche alle in andern Worten dasselbe sagen. Ich füge hier nur

---

25) Khil.-al-His. p. 334. 335. Der Persische Paraphrast dehnt die Bedeutung des Wortes Aljebr allerdings weiter aus, indem er sagt: اگر در طرفي يا در هر دو طرف از متعادلين استثنا بود پس طرف ذو الاستثنا را كامل كنند يعني استثنا ازوي دور كنند تا مستثني منه تمام وكامل شود وهمان مقدار استثنا را بر طرف ديگر از متعادلين بيفزايند ونيز اگر در طرفي كسر باشد كسر را حذف كنند وبجايش واحد كامل بگيرند وموافق آن بطرف ديگر افزايند وهمين استثنا را يا كسر را حذف كردن ومستثني منه را كامل ويا كسر را واحد كامل گرفتن وموافق آن بر طرف ديگر زيادت كردن جبر باشد چنانچه در لغت معني جبر شكسته را بستن است d. h. „Wenn auf einer oder auf beiden Seiten der Gleichung eine Negation sich befindet, so ergänzt man die mit der Negation behaftete Seite, das heißt, man entfernt die Negation aus ihr, damit das subtractiv an ihr haftende vollständig und ganz werde; zugleich addirt man den Werth der Negation auf der andern Seite der Gleichung. Aber auch, wenn auf einer Seite ein Bruch ist, so entfernt man den Bruch, indem man an seinem Platze die Einheit ergänzt, und das Entsprechende auf der andern Seite addirt. Also eine Negation oder einen Bruch entfernen, und das Subtractive zu etwas Additivem, und den Bruch zur ganzen Einheit ergänzen, und das Entsprechende auf der anderen Seite addiren, ist Jebr, wie auch in der Sprache der Sinn von jabara ist, etwas Zerbrochenes zusammenfügen." Was sich der Paraphrast hier bei der Wegschaffung der Brüche gedacht hat, ist nicht ganz klar; von einer Wegschaffung des Nenners durch Multiplication ist nicht die Rede, sondern er meint, wenn auf einer Seite der Gleichung z. B. $\frac{1}{2}x$ steht, so muß man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}x$ addiren, damit wir auf der ersten Seite ein ganzes x erhalten. Dadurch ist aber wenig gewonnen, weil nun der Bruch $\frac{1}{2}x$ auf der andern Seite steht. Der Fehler scheint darin seinen Grund zu haben, daß der Paraphrast den Ausdruck استثناء (welcher ganz allgemein eine Ausnahme von der gewöhnlichen Ordnung, im mathematischen Sinne aber die Negation, Subtractivität bedeutet) in einer zu weiten Bedeutung genommen hat.

26) S. 180—185.

Digitized by Google

noch folgende zierlichen Verse aus der Algebra des Persers Nejm-eddîn Khân hinzu, welche in gereimten Distichen geschrieben und zugleich mit dem Khilâsat-al-Hisâb in Calcutta (1812) gedruckt ist. Sie befinden sich in dieser Ausgabe S. 447 (Vers 11—15), und bei Rosen a. a. O. S. 185.

طرفي كه در وست حرف الا
تكميل نما ومثل آن را
بر طرف دگر فزون كن اي حبر
در مصطلح است نام اين جبر
هنگام معادله تو بشناس
افتد اگر اين كه بعض اجناس
با وصف تجانس از سوبت
در هر طرف اند بي مزيت
بايد كه زهر دو سو براني
نامش تو مقابله بخواني

d. h. Die Seite, die ein Minusglied enthält,
Ergänz' und setze ein demselben gleiches
Bejahend auf die andre, o Gelehrter;
Im Kunstausdrucke nennt man dieses Jeber.
Zur Zeit, wenn Du die Gleichung bildest, wisse:
Wenn sich's ereignet, daß gewisse Glieder,
Einander homogen und völlig gleich,
Auf beiden Seiten unverhüllt sich zeigen,
So wirf aus beiden Seiten sie heraus,
Und dieses nenne dann Mokabalah.

Ich will hier nur noch darauf aufmerksam machen, daß, wie aus den angeführten Beispielen erhellt, bei den Arabern Aljebr wa'lmukâbalah nicht eigentlich der Name der von uns Algebra genannten Wissenschaft ist, sondern daß diese beiden Ausdrücke nur die Namen von zwei in dieser Wissenschaft vorkommenden Operationen sind. Daher bemerkt Hâji-Khalfa in seinem noch ungedruckten biographischen Werke [27]) sehr richtig: وسمي العلم بهذين

27) Moh. ben Musa ed. Rosen. p. 181. 182.

علم الجبر والمقابلة لكثرة وقوعها فيه (28 العمليين „Die Wissenschaft wird von diesen beiden Operationen die Wissenschaft des Jebr und Mukabalah genannt, wegen des häufigen Gebrauchs, den sie von ihnen macht.“ Übrigens braucht nicht erwähnt zu werden, daß nicht nothwendig bei jeder Aufgabe beide Operationen angewandt werden müssen.

Die Inder, welche bei ihrer vollständigen algebraischen Bezeichnung und ihrem weiteren Gesichtskreise nicht nöthig haben, die Gleichung auf die specielle Form zweier positiven Gleichheiten zurückzuführen, haben für die Operation, welche die Araber Aljebr nennen, deshalb auch keinen eigenen Namen; eben so wenig hat Rosen [29]) in Feizi's Persischer Bearbeitung der Lilavati von Bhaskaras, welche sich den Indern anschließt, den Namen Jebr angetroffen. Die viel wesentlichere Operation der Mukabalah dagegen kennen die Inder unter dem Namen sama-çódhanam oder tulya-çuddhis [30]), Subtraction des Gleichen, und Rosen a. a. O. versichert, den Namen Mukabalah bei Feizi mehrmals in demselben Sinne gefunden zu haben, in welchem die Araber ihn gebrauchen.

Von den Arabern ging seit dem Anfange des dreizehnten Jahrhunderts zugleich mit der Wissenschaft der Name nach Europa über; jedoch fing der zweite Theil des Namens, almukábalah, sehr bald an, sich zu verlieren, und erscheint seit dem Ende des sechszehnten Jahrhunderts gar nicht mehr. Bis dahin aber kommen die Namen *Algebra* und *Algebra et Almucabala* ziemlich promiscue vor. Leonardo Bonacci (1202) in dem Index des 15. Capitels seines Liber Abaci sagt: Tertia pars erit super modum algebrae et almucabalae; und dieser dritte Theil selbst beginnt dann so: incipit pars tertia de solutione quarundam quaestionum secundum modum algebrae et almucabalae, scilicet oppositionis et restaurationis [31]). Canacci (Saec. XIV.) braucht den ersten

28) Ich lese in meinem Excerpten aus Rosen's Anm. zum Moh. ben Musa العلميين „Wissenschaften“; das ist entweder ein von mir begangener Schreibfehler, oder schon Druckfehler bei Rosen. Es muß durchaus العمليين „Operationen“ heißen.

29) Rosen a. a. O. p. 186.

30) Colebrooke Algebra of the Hindus, Diss. p. XIII. Vijag. §. 171. note.

31) Cossali T. I. p. 25. Ein anderes Manuscript von Leonardo hat

Digitized by Google

Namen allein; der Titel seines Werks ist Ragionamento di algebra; im Verlauf braucht er bald den Ausdruck algebra, bald regola di algibra, auch falsch geschrieben la regola di argibra [32]). Ebenso Regiomantanus, im funfzehnten Jahrhundert; er sagt in seiner Schrift gegen den Cardinal Nicolaus von Cusa: paucis enim admodum artem Algebrae sive rei et census satis cognitam scio [33]). Luca Pacioli, 1494, braucht wieder meistens beide Namen, arte di algebra ed almucabala, aber er bildet schon von dem ersteren allein das Adjectiv algebratico [34]). Zur Erklärung der beiden Namen sagt er, die Wissenschaft werde genannt algebra et almucabala in lingua araba, ovver caldea secondo alcuni, che in la nostra sona quanto che a dire restaurationis et oppositionis. Algebra idest restauratio. Almucabala, idest oppositio, vel contemptio et solidatio [35]). Von nun an wird der zweite Theil des Namens seltener. Bei Rogg finde ich Rudolff, Ep. Algebra. 1526 [36]). Michael Stifel behandelt die Algebra in dem

---

proportionis für oppositionis; noch ein anderes hat die Worte: scilicet ad proportionem et restaurationem. S. Coss. T. I. p. 27. Es ist zu bemerken, daß Bonacci die Übersetzung der beiden Arabischen Worte in verkehrter Ordnung giebt.

32) Cossali T. I. p. 32. Außerdem ebend. p. 7. „Non debbo anzi dissimulare ciò che di lui (Guglielmo di Lunis) dice il Canacci sul principio del suo ragionamento, ponendo: *La regola dell' argibra, la quale regola Ghughelmo di Lunis la traslato darabico a nostra lingua.*"

33) Jo. de Regio Monte. De triangulis omnimodis, libri quinque. Norimb. 1533. fol. Dabei mit besonderer Seitenzahl: de quadratura circuli dialogus, gegen Nic. von Cusa. S. daselbst p. 49. und des Herausgebers, Joh. Schoner's, Fortsetzung p. 87.

34) Cossali T. I. p. 32. Ebenso bilden die Araber, obgleich sie immer beide Namen gemeinschaftlich brauchen, doch das Adjectiv von dem ersten allein, جبري, جبرية. Z. B. Khil. al-Hisâb p. 333.

35) Über das unpassende contemptio sagt Cossali T. I. p. 26.: L'abbreviatura *cōtēptio*, che trovasi nel testo di Fra Luca, non appare in qual parola rilevar si possa, ed io la reputo un errore di stampa in luogo di *compῖtio*, abbreviatura di *comparatio*.

36) Handbuch d. math. Liter. S. 524. Ich zweifle an der Richtigkeit dieser Angabe. Ich habe nur die Stifel'sche Bearbeitung des Werks von Rudolff gesehen, welche 1553 erschienen ist unter dem Titel: „Die Coss Christoffs Rudolffs, wo es gleich am Anfange der Vorrede heißt: Es hat Christoff Rudolff vom Jawer, löblicher gedechtnis, anno 1524 (also nicht 1526),

Digitized by Google

dritten Buche ſeiner 1544 erſchienenen **Arithmetica integra**, und nennt ſie abwechſelnd **Algebra, regula Algebrae** und **regula Gebri**, nie aber **Almucabala**. Scheubel gab 1551 ſeine **Algebrae compendiosa facilisque descriptio**. Cardan braucht immer nur den Namen Algebra. Eben ſo Gemma Friſius in ſeiner, 1540 zuerſt herausgekommenen practiſchen Arithmetik [37]). Von Nuñez erſchien 1567 (vielleicht auch ſchon früher) **Libro de Algebra en arithmetica y geometria**. Dagegen führt Goſſelin's 1577 herausgekommene Algebra wieder den Titel: **De arte magna seu de occulta parte numerorum, quae et Algebra et Almucabala vulgo dicitur**. Eine ſpätere Auctorität für Almukabalah weiß ich jetzt nicht anzuführen. Jedenfalls aber beweiſen dieſe Angaben, daß es nicht ganz genau iſt, wenn Roſen ſagt, der Name Almukabalah erſcheine ſeit dem Anfange des ſechszehnten Jahrhunderts nicht mehr auf den Büchertiteln [38]). Goſſelin beweiſt auf einer Seite, daß der Name noch ſpäter erſcheint, auf der andern Seite aber hatte man auch ſchon ſehr viel früher angefangen, ihn wegzulaſſen, ſo daß der Anfang des ſechszehnten Jahrhunderts hier gar keinen Haltpunct gewährt.

Neben dieſem aus Aſien herübergepflanzten Namen entwickelten ſich aber ſchon frühzeitig andere mehr einheimiſche, die indeß alle über lang oder kurz von dem jetzt gebräuchlichen verdrängt worden ſind. Schon bei den älteſten Italienern ſtanden dem eben beſprochenen Namen andere zur Seite, deren Urſprung aber, zum Theil wenigſtens und mittelbar, ebenfalls in Arabien zu ſuchen iſt. Wir finden hier für unſere Wiſſenſchaft die Benennungen der **Ars magna**, der **Practica speculativa** und der **Ars rei** oder **Ars rei et census**, zu deren Erklärung Folgendes dienen möge.

Die Algebra erſchien Anfangs nur als ein höherer Theil der Arithmetik; ſo bei Bonacci, Pacioli, Stifel, Cardan und vielen An-

---

die wunderbarliche und gantz Philoſophiſche Kunſt deſſ rechnens, genennet Die Coſſ (alſo nicht Algebra), in deutſche ſprach durch den Truck gebracht u. ſ. w.

37) **Arithmeticae practicae methodus facilis, per Gemmam Frisium. Antw. 1540. 8.** Ich habe die Ausg. **Coloniae 1571. 8.** in Händen gehabt, wo man vergl. p. 71. 81. 110. u. ſ. w.

38) a. a. O. S. 186. **Since the commencement of the sixteenth century, the word mokābalah does no longer appear in the title of Algebraic works.**

Digitized by Google

deren, und erhielt so als Gegensatz der niedern oder gemeinen und praetischen, zumal auf kaufmänniſche Verhältniſſe angewandten Arithmetik den Namen der **Ars magna**, oder Italieniſch **Arte maggiore**, indeß jene die **Ars minor** hieß. Wie es ſcheint braucht dieſen Namen ſchon Leonard Bonacci; ſicher aber iſt er vor Luca Pacioli im Gebrauch geweſen; denn dieſer zählt ihn unter den gebräuchlichen Namen der Algebra mit auf [39]). Dieſe Benennung ſcheint indeß nur ſehr vereinzelt die Grenzen Italiens überſchritten, und mit Cardan's **Ars magna**, die zuerſt 1545 erſchien, daheim ihre Exiſtenz beendigt zu haben. Außer Italien iſt mir der Name bis jetzt erſt einmal vorgekommen, und zwar auf dem Titel der ſchon angeführten Algebra von Goſſelin, **De arte magna etc. Paris. 1577.** Ob der Name der **Ars magna** oder vielmehr die Unterſcheidung der **Ars magna** von der **Ars minor** vielleicht ſchon im Arabiſchen begründet iſt, läßt ſich nicht eher mit völliger Gewißheit beſtimmen, als bis die Arabiſchen Mathematiker uns etwas vollſtändiger als bis jetzt vorliegen werden. Bei Caſiri kommt der Titel der **Ars magna** zweimal vor, aber in anderem Sinne; es bedeutet daſelbſt nämlich eine encyklopädiſche auf eine eigenthümliche Weiſe dargeſtellte Bearbeitung verſchiedener Wiſſenſchaften, als deren Erfinder oder wenigſtens Verbeſſerer Mohammed ben Ahmed Almarakſchi genannt wird [40]).

Den alten Italienern war lange Zeit die Algebra weiter nichts, als ein Hilfsmittel arithmetiſche Räthſel aufzulöſen; man verſtand, wie es ſcheint, noch nicht ſie auf praktiſche Lebensverhältniſſe anzuwenden. Dieſes Letztere, die Anwendung der verſchiedenen Rechnungsarten auf das geſellige Bedürfniß, machte einen weſentlichen Theil der **Ars minor** aus, die **Practica mercantilis**. In dieſem Gegenſatz erhielt die Algebra als eine ganz theoretiſche Wiſſenſchaft den Namen der **Practica speculativa**, ein Titel, der hier nur kurz

---

39) Cossali T. I. p. 11. 25.

40) Bibl. Arab. Hisp. Escur. T. I. p. 380. nennt der Verf. ein encyklopädiſches Werk von Scha'yâ ben Ferîgûn (unter dem Titel كتاب جوامع العلوم) „ubi scientiarum ferme omnium regulae ductis quibusdam lineis atque circulis, mira brevique arte traduntur. Id scribendi genus Arabum Scriptores *Artem Magnam* appellant." T. II. p. 90. Moh. ben Ahmed, vulgo Almarakschi . . . . Artem quam vocant Magnam vel invenit vel saltem adornavit. Alſo hat die Arabiſche **Ars magna** mit der Italieniſchen wohl nichts gemein.

Digitized by Google

angeführt werden darf, weil er weiter keine hiſtoriſche Bedeutung erlangt hat.

Weiter verbreitete und länger behauptete ſich der letzte der angeführten Namen in verſchiedenen Sprachen; um denſelben zu erklären, iſt es nöthig auf das Arabiſche zurückzugehen. Die Arabiſchen Mathematiker nennen die unbekannte Größe *schai*, شيء, res, aliquid (vielleicht dem Sinne nach entlehnt von dem Indiſchen yâvattâvat, quantum tantum, d. i. quantumcunque sit) und dem Quadrat mâl, مال, possessio, opes. Hiervon bildete Leonard Bonacci, der unmittelbar von ihnen ſchöpfte, die wirklichen Lateiniſchen Überſetzungen, und nannte die Unbekannte res und deren Quadrat census, in der Bedeutung, nach welcher dieſes Wort im ſpätern Latinismus dem Arabiſchen mâl entſpricht [41]). Wie nun im Arabiſchen von zwei Operationen, ſo erhielt in Europa die Wiſſenſchaft ihren Namen von den beiden erſten Potenzen der Unbekannten, und wurde Ars rei et census, oder auch blos Ars rei genannt. Dieſe Benennung erhielt ſich längere Zeit auch außerhalb Italien. Ich führe hier folgendes Beiſpiel von Regiomontanus [42]) an, weil es

41) Es iſt mir nicht überzeugend, was Cossali T. I. p. 12. 13. ſagt: Non fu già invenzion di Leonardo chiamare il quadrato *censo;* per l'opposto dal suo scrivere *quadratus qui videlicet census dicitur,* si raccoglie, che il nome di *censo* in luogo di quadrato era già usitato, anzi il più usitato presso la latina gente. Es wäre allerdings möglich, daß das Wort census in dieſer Bedeutung ſchon früher im Gebrauche geweſen; wie das aber aus Leonard's citirten Worten hervorgehen ſoll, ſehe ich nicht ein. Ich möchte, anſtatt in dieſen Worten census für eine Erklärung von quadratus zu nehmen, das Verhältniß vielmehr umkehren und annehmen, daß Leonard ſagen wolle, er werde, was man gewöhnlich Quadrat nenne, im Verlauf ſeiner Schrift census nennen. Dieſer Sinn ergiebt ſich ganz einfach, wenn man zu den Worten qui videlicet census dicitur, ſich eine Ergänzung wie nobis oder in hac arte hinzudenkt.

42) De triangulis omnimodis L. II. prop. 12. Ungenau iſt, was Montucla T. I. p. 536 in Bezug auf dieſe Stelle ſagt: Regiomontanus ... se proposant un problême qu'il analyse algébriquement, et qui le conduit à une équation du second degré, il renvoie aux règles de l'art, qu'il dit connues (?), *fiat,* dit il, *secundum cognita artis praecepta.* Schwerlich hat Montucla die Stelle ſelbſt geleſen, ſondern er hat ein fremdes falſches Citat abgeſchrieben. Dieſe Formel, die er fälſchlich dem genannten Auctor in den Mund legt, iſt ihm ein Beleg für die Bemerkung: Nous rémarquons en effet, dès le milieu du XV. siècle, que les règles de l'algèbre, pour la résolution du second degré, étoient *vulgairement connues.* Wenn man ſo citirt, kann

Digitized by Google

ugleich zeigt, wie man mit dieſen Benennungen umging. Die Aufgabe iſt: Data perpendiculari atque basi, et proportione laterum cognitis, utrunque latus cognoscere. Hoc problema geometrico more absolvere non licuit hactenus, sed per artem rei et census id efficere conabimur. etc. etc. Pono lineam *eg* 2 res, ita unde linea *be* erit 20. demptis duabus rebus, et ejus medietas *bd* 10 minus 1 re, reliqua vero *dg*, erit 10 et una res. duco *bd* in *se*, producitur 1 census et 100, demptis 20 rebus u. ſ. w. Am Ende heißt es: restauransque ut assolet defectibus (d. i. Aljebr), et ablatis aequalibus (d. i. Almukabalah), utrobique perducemur ad 16 census et 2000 aequales 680 rebus: quam ob rem, quod restat, praecepta artis edocebunt. Das Reſultat ſelbſt giebt er nicht. Als ſeit Guglielmo di Lunis im vierzehnten Jahrhundert die Mathematiker anfingen die Lateiniſche Sprache mit der Italieniſchen zu vertauſchen, nahmen auch jene Benennungen Italieniſche Formen an; die Unbekannte hieß nun cosa oder cossa, das Quadrat derſelben censo (von Ausländern ziemlich allgemein, aber fälſchlich zenso geſchrieben) und die Wiſſenſchaft ſelbſt arte oder regola della cosa. Dieſer Name ſcheint in Italien am Ende des funfzehnten Jahrhunderts der gebräuchlichſte geweſen zu ſein; denn Luca Pacioli in ſeiner Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità, 1494, ſagt, indem er die verſchiedenen Namen der Wiſſenſchaft aufzählt, ſie ſei von dem großen Haufen (dal volgo) la rogola o l'arte della cosa, von Andern arte d'algebra ed almucabala, von Andern pratica speculativa, von noch Andern arte maggiore genannt worden [43]). Dieſer Name nun, arte della cosa, wurde wiederum, aber wohl nur von Nicht-Italienern, ins Lateiniſche übertragen oder vielmehr barbariſch latiniſirt als ars cossica, ars cosae, auch cossa und

---

man leicht Hypotheſen bauen. Hätte Montucla einen ſo wichtigen Auctor, wie Regiomontan, aufmerkſam geleſen, ſo würde er gerade die entgegengeſetzte Behauptung bei ihm gefunden haben. Es heißt nämlich in deſſen Quadratura circuli p. 49: Quo autem pacto concluserim lineam *ap* esse oportere inter praedictos terminos, longum esset enarrare; et *fortasse obscurum videretur, paucis enim admodum artem Algebrae, sive rei et census, satis cognitam scio,* qua quidam arte hoc in negocio usus sum. Weit entfernt alſo, daß die Algebra vulgairement connue geweſen wäre, fürchtet Reglom. ſogar den Mathematikern undeutlich zu werden, wenn er ſie anwendete.

43) Cossali T. I. p. 11.

Digitized by Google

ähnlich. So sagt Gemma Frisius per Regulam Cosae sive Algebrae [44]); so finde ich Logistice Astronomica Hexacontadōn etc. Item Logistice Regulae arithmeticae quam Cossam et Algebram quadratam vocant. Autore C. Peucero. Viteb. 1556. u. A. Und in Deutschland erscheint seit Christoph Rudolff (1524) und Michael Stifel (1553) die Coß [45]). Selbst die unbekannte Größe erhielt den barbarischen Namen numerus cossicus, cossische Zahl, und behielt denselben ziemlich lange [46]). Der Name der Coß scheint sich noch im siebzehnten und am Anfange des achtzehnten Jahrhunderts neben den gebräuchlicheren erhalten zu haben. Beispiele sind: Nic. Reimari, ursi Dithmarsi arithmetica analytica vulgo Coss oder Algebra. Frankf. a. O. 1601. 4. — P. Rothe,

---

44) Arithm. pract. methodus facilis. Coloniae 1571. p. 81. 105. 110. 112. etc.

45) Die Coss Christoffs Rudolffs, mit schönen Exempeln der Coss durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt. Zu Königsperg in Preussen. 1553. 4. Vergl. Note 36. Daselbst fol. 62. heißt es: „Die alten unser vorfarn ... habenn nach ernstlichem vleyss erfunden die Coss, das ist die rechnung von einem ding" u. s. w. Und fol. 140: „Da mit aber bekant werde der ursprung, von welchem geflossen ist der Nahm diser übung, das es die Coss genennet wirt, verstehe, das die alten diss werck genennet haben ein Kunst von dingen, darumb das durch sye verborgenheyt der fragen, so von dingen, das ist, von zalen und massen geschehen, auffgelöset werden. Das bezeugen alte bücher (nicht vor wenig jaren) von der Coss geschriben. In welchen die quantitet, Dragma, Res, substantia ꝛc. nicht durch Character, sondern durch gantz geschribene wort, dargegeben sind. Unn sonderlich in practicirung eines yeden Exempels, wird die Frage gesetzt, Ein ding, mit sollichen worten. Ponatur una Res. Dieweyl nu dise Kunst von den Graecis zu den latinischen kommen, von jhnen mit sampt aller Philosophi auffgenommen, haben sye die wahlen, dem latin nach, zu welsch genennet Regule de le Cosse. Denn Cossa bedeut ein ding, von dannen kompt das es von den Teutschen Die Coss genent wirt." Derselbe Verfasser gebraucht indeß in seiner oben erwähnten Arithmetica integra immer die Namen Algebra, ars Algebrae, ars Gebri.

46) So noch immer Dechales in seinem Cursus s. mundus mathematicus, dessen theoretische Abhandlungen, beiläufig gesagt, bedeutend besser sind, als der historische tractatus proemialis. Vergl. T. I. p. 571 sqq. Algebra. Da heißt es z. B. p. 572. prop. II. Denominatio numerorum cossicorum ... Propterea dicuntur numeri denominati, *cossici* item vocantur, quia Itali quadratum cosam dixerunt (falsch!) et consequenter numeros cossicos quasi numeros radicis et quadrati.

Digitized by Google

Arithmetica philosophica oder ſchöne neue und wohlgegründete künſtliche Rechnung der Coß und Algebra. Nürnb. 1607. fol. — **J. R. Brasser, Regula Cos of Algebra, zynde de allerkonstryksten Regel om het onbekende bekent te maken etc.** Amsterd. 1663. 4. — Neu vermehrter arithmetiſcher Raritäten-Kaſten, in welchem die curieuſen **regula falsi, caeci** und **coss** oder Algebra ꝛc. Leipz. 1716. Aus den claſſiſchen Werken iſt indeß dieſer Titel ſeit dem Ende des ſechszehnten Jahrhunderts verſchwunden. Ganz ohne hiſtoriſche Bedeutung iſt das Erſcheinen dieſes Namens auf Büchertiteln in dem gegenwärtigen Jahrhundert, weil da dieſe Erſcheinung nicht mehr natürlich und aus dem Geiſte der Zeit hervorgegangen, ſondern willkührlich herbeigezogen iſt. So in **Christmann, ars cosae promota. Francof. 1813.** und deſſelben **Cardanus suevus sive de functionibus cosae resolventibus tractatio. Stuttg. 1815.** Solche Titel ſind Anachronismen.

Seit dem letzten Viertel des ſechszehnten Jahrhunderts erhielt die Algebra durch Vieta eine andere Geſtalt und einen andern Namen. Vieta that den ungeheuern Schritt, für die Zahlencoefficienten, an denen bis dahin die ganze Theorie der Gleichungen haftete, allgemeine oder Buchſtabencoefficienten zu ſubſtituiren, und dadurch die Wiſſenſchaft über den bisherigen Standpunct der Auflöſung arithmetiſcher Kunſtſtückchen zu erheben. Dieſe allgemeinen Coefficienten nannte er **species**, und daher die Algebra ſelbſt **logistica** oder **arithmetica speciosa**, im Gegenſatze zu der gemeinen Arithmetik oder **arithmetica numerosa**. Dieſer Name, **arithmetica speciosa**, erſcheint nach Vieta abwechſelnd mit dem der **arithmetica universalis**. So groß indeß die Verdienſte Vieta's um die Wiſſenſchaft waren, ſo hat ſich doch weder die Form, noch der Name, den er derſelben gab, lange erhalten; denn er hatte das Unglück, und die Wiſſenſchaft das Glück, daß mit ihm eine neue Periode begann, in welcher eine Erfindung die andere faſt gewaltſam drängte; es iſt genug, die Namen Harriot, Oughtred, Descartes, Wallis, Leibnitz, Newton zu nennen, um es begreiflich zu machen, daß die wichtigen Theorien und Formen Vietas verdrängt werden konnten, bevor ſie ſo recht eigentlich in das Leben der Wiſſenſchaft eingedrungen waren. Daher erſcheint auch der Name der **Arithmetica speciosa** ſehr vereinzelt auf den Titeln algebraiſcher Werke, wenngleich der Ausdruck **species**, ſo wie die Unterſcheidung der beiden Formen der Algebra in eine **numerosa** und eine **speciosa** noch lange im Gebrauch blieb.

Digitized by Google

So sagt Dechales: Algebram communiter his temporibus in duas partimur, in numerosam scilicet, seu vulgarem et antiquam, et in speciosam, utramque iisdem nixam principiis ... Prima Diophantum authorem agnoscit, haec Vietam ...[47]). Und Newton's allbekannte Arithmetica universalis beginnt mit den Worten: Computatio vel fit per *numeros*, ut in vulgari Arithmetica, vel per *species*, ut Analystis mos est.

In dieser Stelle werden wir zugleich auf einen anderen Namen geführt, der sich meines Wissens gleichfalls bei Vieta zuerst vorfindet, und sich bedeutend länger als der vorerwähnte, bis weit in das vorige Jahrhundert, ja wohl noch bis in das gegenwärtige hinein, gehalten hat. Es ist der der ars analytica, arithmetica analytica, analysis. Schon dasjenige Werk Vieta's, welches die Gestalt, die er der Algebra zu geben gedachte, aus einander setzt, führt den Titel: In artem analyticam isagoge. Darauf erschienen: Reimari ursi Dithmarsi arithmetica analytica. Francf. 1601. — Harrioti artis analyticae praxis. London. 1631. — Renaldini opus algebraicum in quo ... Ars analytica quam obscure Fr. Vietu litteris mandavit, traditur. Anconae. 1644. — Deff. Ars analytica mathematum. Florent. 1655. — de la Hire, la construction des équations analytiques. Paris. 1679, und unzählige andere. Als nach den großen Erfindungen der letzten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts die Infinitesimalrechnung den Namen der analysis infinitorum erhielt, behauptete sich die Algebra als analysis finitorum, und noch Käſtner's Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen ist jedem Mathematiker bekannt. In der neuen und neuesten Zeit haben einige Zeloten für das Studium der Griechen gegen diesen vermeintlichen Mißbrauch des Worts Analysis geeifert, und gemeint, dasselbe gehöre allein der Geometrie an. Aber diese Ansicht ist offenbar falsch, und selbst diejenigen Worte, mit welchen Euklides, oder wenn man will, sein Scholiast und Überarbeiter Theon von Alexandrien, den Begriff der Analysis definirt, schließt die Anwendung dieses Namens auf den Calcul auf keine Weise aus. Er sagt nämlich nach dem ersten Satze des dreizehnten Buchs: Ἀνάλυσίς ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου, διὰ τῶν ἀκολούθων, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον, d. h. Analysis ist die Annahme des Gesuchten als etwas

47) Cursus T. I. p. 29. und fast wörtlich dasselbe p. 571.

Digitized by Google

Gegebenen, (um) durch Schlüſſe zu etwas wahrem Gegebenen (zu gelangen). Da iſt nun erſtens von Geometrie ausſchließlich gar nicht die Rede, und zweitens iſt es doch in der That weſentlich gar nicht verſchieden, ob ich ſage, *ABC* ſei das geſuchte Dreieck, oder ob ich ſage, *x* ſei die geſuchte Zahl; in beiden Fällen ſchließe ich mit Hilfe dieſer Präoccupation aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe auf den Zuſammenhang des Gegebenen mit dem Geſuchten, und dieſe Annahme des Unbekannten als etwas ſcheinbar Gegebenen dient nur dazu, um jenen Zuſammenhang, in dem einen Falle durch Zeichnung an der Figur, in dem andern durch hingeſchriebene Formeln, der ſinnlichen Anſchauung darzuſtellen. Geometriſche Analyſis und Algebra beruhen demnach durchaus auf einem und demſelben Principe. Ganz klar hat das Dechales gedacht, wenn er ſagt: Algebra, quae analytica dici potest, eo quod per analysin procedat, nempe id quod quaeritur, jam quasi cognitum et datum supponat, habet pro fine etc. etc. [48]). Nicht weniger klar hat ſchon Vieta ſelbſt das gedacht, wenn gleich ſeine Darſtellung wie im Allgemeinen, ſo auch hier, etwas ſchwerfällig iſt. Er beginnt nämlich ſeine In artem analyticam Isagoge mit folgenden Worten: Est veritatis inquirendae via quaedam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, a Theone nominata Analysis, et ab eodem definita, Adsumptio quaesiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Ut contra Synthesis, Adsumptio concessi per consequentia ad quaesiti finem et comprehensionem. Et quanquam veteres duplicem tantum proposuerunt Analysin ζητητικὴν καὶ ποριστικὴν, ad quas definitio Theonis maxime pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quae dicatur ῥητικὴ ἢ ἐξηγητικὴ, consentaneum est, ut sit Zetetice quâ invenitur aequalitas proportiove magnitudinis, de qua quaeritur, cum iis quae data sunt. Poristice, qua de aequalitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, qua ex ordinata aequalitate vel proportione ipsa de qua quaeritur exhibetur magnitudo. Atque adeo *tota ars Analytice* triplex illud sibi vendicans officium definiatur, *Doctrina bene inveniendi in Mathematicis.* Demnach iſt die Algebra wirkliche Analyſis, auch im Sinne der alten Griechen, und es ſind diejenigen, welche

48) Cursus T. I. p. 29.

Digitized by Google

dieſer Wiſſenſchaft zuerſt den Namen Analyſis beilegten, deshalb nicht zu tadeln, gleich als hätten ſie Fremdartiges mit einander vermengt, ſondern vielmehr zu loben, weil ihr Scharfblick ſcheinbar Getrenntes unter einem gemeinſchaftlichen höhern Geſichtspuncte zuſammenfaßte. Jedenfalls aber iſt der Name Analyſis für unſre Wiſſenſchaft bezeichnender, als der gebräuchliche Name Algebra. Denn gerade das, was dieſes Arabiſche Wort bezeichnet, iſt uns fremde geworden, wie aus dem oben über dieſen Ausdruck Geſagten ſattſam erhellt.

Ich habe oben ſchon etwas von der Benennung der Unbekannten und ihres Quadrats erwähnen müſſen. Die vollſtändige Entwickelung dieſes Gegenſtandes ſpare ich mir für eine andere Gelegenheit auf, wo dieſelbe mehr an ihrem Platze ſein dürfte; ich erwähne nur vorläufig, daß dieſe Benennungen ſowohl als die dafür gebrauchten Zeichen in verſchiedenen Zeiten und bei verſchiedenen Völkern faſt noch mehr variirt haben, als die Namen der Wiſſenſchaft, der ſie angehören, und daß eine hiſtoriſche Kenntniß der einen wie der andern zum Verſtändniſſe älterer Schriften durchaus nothwendig iſt.

Die Algebra iſt Rechnung und führt demnach, wie jede Betrachtung von Menge und Größe, in ihren letzten Elementen auf den Begriff der Zahl zurück. Von ihrer Geſchichte kann daher die Geſchichte der elementaren Zahlenkunde, der Arithmetik, nicht ganz getrennt werden. Ich muß alſo, bevor ich auf die Algebra ſelbſt komme, zunächſt mich etwas ausführlicher über die Geſchichte der Zahlen und der Zahlenkunde im Allgemeinen, und der Griechiſchen insbeſondre ausbreiten, und das ſoll der Gegenſtand der nächſten Capitel werden.

Digitized by Google

Drittes Kapitel.

Ueber Zahlensysteme und Zahlzeichen.

Der Begriff der Zahl ist ein einfacher und dem Geiste ursprünglich gegebener; deshalb sind alle Versuche, denselben wissenschaftlich zu definiren, ebenso wohl gescheitert, wie die Bemühungen die Euklidischen Grundsätze zu beweisen. Zu dieser Ursprünglichkeit des Begriffs an und für sich gesellt sich die frühe Nothwendigkeit, Zahlen zu gebrauchen, so daß die Erfindung einer elementaren Rechenkunst sich in die Zeiten der allererſten Entwickelung des gesellschaftlichen Lebens verliert und der historischen Nachforschung sich entzieht; und es heißt nur auf die nächste Quelle hinweisen, wenn z. B. von den Griechen die Phönizier als Erfinder dieser Kunst genannt werden. Weniger noch, als irgend eine andre Wissenschaft, hat die Kunst zu zählen und Zahlen zu addiren und zu subtrahiren einen sichtbaren Ursprung gehabt; das früheste Bedürfniß hat dieselbe mit sich gebracht, die Natürlichkeit und Ursprünglichkeit des Begriffs hat das Vorhandensein der Kunst vor dem ungebildeten Verstande, der gerade das Einfache, Nächstliegende am wenigsten bemerkt, versteckt gehalten, und gewiß Jahrtausende lang sind die einzelnen Regeln des Rechnens nicht nur vorhanden, sondern sogar allgemein im Gebrauche gewesen, bevor eine Arithmetik oder Logistik als Wissenschaft sich herausbilden konnte. Mit Recht sagt Plato in Bezug auf die Sage, daß Palamedes der Erfinder der Zahlenkunde sei: Wie, hat denn etwa Agamemnon ohne Palamedes nicht gewußt, wie viele Füße er habe [1])? Die vergeblichen Bemühungen, den Ursprung der Rechenkunst auf irgend einen historischen Namen zurückzuführen, haben ihre Veranlassung in der Anerkennung der allgemeinen Wahrheit, daß jegliches Ding seinen Grund haben müsse. Das ist allerdings auch ganz richtig, nur liegt dieser Grund hier tiefer als in irgend einer äußeren

1) Plato de republica, Ed. Stephani. Francof. 1602. fol. p. 697.

Digitized by Google

Veranlaſſung, er liegt in der innerſten Natur des menſchlichen Geiſtes. Ebenſo wenig, als es der Nilüberſchwemmungen und der in Folge derſelben nothwendig gewordenen Waſſerbauten und Ländereintheilungen in Ägypten bedurfte, um der Geometrie ihren erſten Urſprung zu geben, ebenſo wenig bedurfte es eines Palamedes oder gar eines Phöniziſchen Welthandels, um eine dem menſchlichen Geiſte und Bedürfniſſe ſo verwandte und nahe liegende Kunſt, wie die Kunſt zu zählen und zu rechnen, ins Leben zu rufen.

Wie ſich nun frühe die Nothwendigkeit, mit Zahlen umzugehen, einſtellte, ſo bildete ſich gewiß auch verhältnißmäßig frühzeitig das Bedürfniß heraus, dem Gedächtniſſe durch Notirung und Aufzeichnung gewiſſer Zahlen und Summen zu Hilfe zu kommen. Für eine gewiſſe Anzahl von Einheiten ebenſo viele Striche in ein Brett zu ſchneiden oder in einen Stein zu kratzen, liegt dem Bedürfniſſe des geſelligen Verkehrs ſo nahe, und iſt ſo ſehr viel einfacher, als die Zergliederung und graphiſche Darſtellung der articulirten Laute der menſchlichen Rede, daß gar nicht daran zu zweifeln iſt, daß die Zahlenſchrift lange vor der Buchſtaben- und Wortſchrift vorhanden geweſen. Dieſes beweiſt auf einer Seite noch heutzutage der gemeine Mann, der des Schreibens unkundig, dennoch an ſeiner Stubenthür gewiſſe willkührliche, nur ihm verſtändliche Zahlzeichen als Gedächtnißſtützen ankreidet, wie ich ſelbſt öfters zu beobachten Gelegenheit gehabt habe; auf der andern Seite liefern den hiſtoriſchen Beweis für dieſe Hypotheſe mehre Amerikaniſche Völker, z. B. die Azteken in Mexico, die Muyska's in den Hochebenen von Cundinamarca und Andere, welche bekanntlich, wie alle Völker Amerika's, mit der ſchriftlichen Darſtellung der Rede bis zur Ankunft der Europäer in Amerika unbekannt geblieben waren, bei denen ſich aber nichts deſto weniger graphiſche Syſteme von Zahlzeichen vorfinden [2]). Zum momentanen Gebrauche im Verkehr ſind indeß geſchriebene Zahlen gewiß viel ſpäter verwendet worden. Man bediente ſich urſprünglich kleiner Steinchen (daher calculare, ψηφίζειν), Samenkörner, Kügelchen, welche ſpäterhin, bei weiterer Fortbildung zu conſtanten Zahlenſyſtemen, auf Schnüre gezogen, und dieſe wiederum in feſte Rahmen geſpannt zu Rechenbrettern (abacus, Suanpan) umgeſtaltet wurden,

2) S. Alexander v. Humboldt Über die bei verſchiedenen Völkern üblichen Syſteme von Zahlzeichen, in Crelle's Journal für Mathematik, Bd. IV. S. 205—231 an mehren Stellen.

Digitized by Google

von denen wir bei einer spätern Gelegenheit weitläufiger reden wollen.

Die erste und natürlichste Art, Zahlensummen zu bezeichnen, war unstreitig die, daß man so viele Striche zeichnete oder einschnitt, als man Einheiten andeuten wollte. Daher ist noch in den meisten bekannten Systemen von Zahlzeichen, welche nicht dadurch, daß sie die Buchstaben des Alphabets als Zahlen gebrauchen, ihren spätern Ursprung verrathen, ein einfacher Strich das Zeichen für die Einheit geblieben; und es beruht auf einem übel angebrachten spätern Witze, wenn dieses Zeichen wegen einer zufälligen äußeren Ähnlichkeit allmählig mit irgend einem Buchstaben des Alphabets vermengt, oder einem solchen nachgebildet wird, wie im Lateinischen der I, im Arabischen dem Elif, ا. Bei Bezeichnung größerer Summen mußte indessen diese Aneinanderreihung von Einheiten beschwerlich, ja unmöglich werden, und das Bedürfniß führte so auf die Einführung des Gebrauchs gewisser Perioden in der Zahlenreihe, bei denen man wieder von vorne anfing, d. h. man bediente sich eines einfachen Zeichens für fünf, zehn oder zwanzig Einheiten. Es lag nahe, sich grade dieser drei Zahlen als Periodenabtheiler zu bedienen, welche durch die Anzahl der Finger und Zehen an Händen und Füßen der unmittelbaren Anschauung dargeboten wurden, und man wählte die eine oder die andere der genannten Zahlen als Haltpunct, je nachdem man eine Hand, oder beide Hände, oder Hände und Füße zusammen durchzählte, bevor man zu einer neuen Einheit höherer Ordnung seine Zuflucht nahm. Diese Begriffe von Hand und Fuß sind sogar in die Sprache übergegangen, indem in mehrern Amerikanischen Sprachen fünf eine Hand, zehn zwei Hände, zwanzig Hände und Füße, oder auch ein Mensch genannt werden [3]). Diese Perioden nun, so wie wiederum die Art der Zusammenfassung derselben zu neuen Perioden der zweiten, dritten und höheren Ordnungen haben bei den verschiedenen Völkern und in verschiedenen Zeiten sehr mannigfache Arten der Darstellung veranlaßt, und der menschliche Geist hat in mancherlei Modificationen, durch sehr abweichende Zwischenglieder die Stufenleiter von

3) Ebend. S. 211. Daß aber im Persischen penjeh die Faust und penj fünf heißt (پنجه , پنج), gehört wohl nicht hieher, vielmehr ist hier der Zusammenhang ein umgekehrter, und penjeh ist erst aus penj entstanden, was schon die Ableitungsendung andeutet.

Digitized by Google

von der einfachen rohen Nebeneinanderstellung von Einheiten bis zu dem vollendeten Indisch-Arabischen Decimalsystem mit Stellenwerth der Ziffern durchschreiten müssen. Die Abweichungen der einzelnen vorhandenen Systeme von einander bestehen hauptsächlich in der verschiedenen Art und Weise, wie die höheren Periodenzeichen mit den niederen und den Einheiten zur Bezeichnung zusammengesetzter Zahlen verbunden werden. Fast keines der bekannten Zahlensysteme aber bleibt hierin durchaus einem und demselben Principe getreu; ich will daher, bevor ich zur historischen Darlegung der üblichsten und uns am nächsten interessirenden Zahlensysteme übergehe, im Allgemeinen die wesentlichsten Methoden, welche sich im Gebrauche in den verschiedenen Systemen vermengt vorfinden, aus einander setzen, damit dieselben sich nicht in ihrer factischen Vermischung in den einzelnen Systemen gegenseitig verdunkeln.

1. Nebeneinanderstellung durch Addition oder Subtraction. Diese Methode findet sich bei den ältern Semitischen Völkern, bei den Griechen, bei den Römern und Andern. Im Römischen z. B. bedeutet **C** hundert, **L** funfzig, **V** fünf, also **CLV** hundert und funfzig und fünf, d. i. 155. Ja die Römer sind bei der geringen Anzahl von Zeichen, die ihr System enthält, sogar gezwungen, dasselbe Zeichen öfter zu wiederholen, z. B. **III**, **XXX**, **CCC** u. s. w. Dieses ist die roheste Art von Zahlenbezeichnung, und darum wahrscheinlich die ursprünglichste, wie wir schon erwähnt haben. Sie führte späterhin, um die unbequeme Aufeinanderfolge zu vieler gleicher Zeichen zu vermeiden und die Schrift abzukürzen, auf den Gebrauch der subtractiven Nebeneinanderstellung, als **IV**, **IX**, **XC** u. s. w. Vollkommener ist das Semitische und das daraus entstandene Griechische System, weil es eigene Zeichen für die neun Einheiten (πυθμένες) und deren Producte in zehn und dessen Potenzen hat, also für 20, 30, 40 u. s. w., für 200, 300, 400 u. s. w. Diese Zeichen werden dann aber zur Andeutung der dazwischen liegenden Zahlen, wie im Römischen Systeme, durch bloß additive Nebeneinanderstellung verbunden, z. B. aus ϱ hundert, λ dreißig, η acht, wird gebildet ϱλη gleich hundert und dreißig und acht, 138. Daß die Römer sich eigener Zeichen, die Semiten und Griechen dagegen sich der Buchstaben des Alphabets bedienen, ist ein unwesentlicher Unterschied. Der letztere Umstand hat, zumal wenn, wie in diesen Systemen, viele Zeichen gebraucht werden, den Vortheil, daß die Zeichen selbst ihrer Form und ihrer Reihenfolge nach

Digitized by Google

ſchon bekannt ſind. Subtraction durch die Stellung kennen und bedürfen dieſe beiden Syſteme nicht.

2. Multiplication durch beigefügte Coefficienten oder Exponenten. Ich ziehe dieſe beiden Methoden in eine zuſammen, weil ſie nur in der graphiſchen Form von einander abweichen, im Weſen aber durchaus zuſammenfallen. Das Weſentliche dieſer Methode beſteht nämlich darin, daß ein höheres Periodenzeichen durch ein daneben oder darüber geſchriebenes Zeichen einer niedrigern Periode oder einer Einheit multiplicirt wird. So ſchreiben z. B. Diophant und Pappus, Letzterer in dem von Wallis herausgegebenen Fragmente des zweiten Buchs βΜυ. und Μυ.β für zwei Myriaden, γΜυ. und Μυ.γ für drei Myriaden, u. ſ. w. Ähnlich findet ſich bei den Römern die Ausdrucksweiſe **VM**, **XM** für fünftauſend, zehntauſend. Diophant läßt auch zuweilen das Myriadenzeichen aus, und ſetzt an deſſen Stelle einen bloßen Punct, der den Coefficienten der Myriade von den folgenden niedrigern Zahlen ſcheidet, z. B. **IV**, 18. ρκζ. φξη d. h. 127 Myriaden und 568 Einheiten, oder 1270568. Hier vertritt alſo der Punct als abkürzendes Zeichen die Stelle des Μ oder Μυ. Ob nun der Multiplicator als Coefficient neben, oder als Exponent über das Myriadenzeichen (denn bei andern als den Myriadenzeichen findet ſich dieſe Methode bei den Griechen nicht) geſtellt wird, iſt, wie geſagt, unweſentlich. Eutokius in ſeinem Commentare über Archimed's Kreismeſſung thut beſtändig das Letztere, und ſchreibt z. B. $\overset{\beta}{\text{M}}$, $\overset{\rho}{\text{M}}$ für zwei Myriaden, hundert Myriaden, und das Syſtem des Herodian, welches wir unten näher kennen lernen werden, zieht den Multiplicator 5, welcher durch Π dargeſtellt wird, um die zu multiplicirende Zahl; Δ iſt zehn, alſo ΠΔ funfzig. Was bei den Griechen auf dieſe Weiſe ſich nur bei den Myriaden, bei den Römern nur bei den Tauſenden findet, wird von den Chineſen und Japanern, ferner in dem Syſtem der Tamilziffern durchgehend bei allen Vielfachen der Periodenzeichen gebraucht, ſo daß, mit den uns geläufigen Zeichen ausgedrückt, z. B. X^5 funfzig, C^4 vierhundert u. ſ. w. bedeutet [4]).

3. Veränderung des Zahlenwerthes durch beigeſetzte Apices. Der weſentliche Unterſchied zwiſchen dieſer Methode und der Exponenten-Methode in der vorigen Nummer beſteht darin, daß

4) A. v. Humboldt a. a. O. S. 223. 225.

Digitized by Google

dort das Myriadenzeichen als Grundzahl hingestellt und ihr Multiplicator als gewöhnliches Zahlzeichen darüber geschrieben wird, hier dagegen einerseits dieser letztere Multiplicator die Grundzahl bildet, andererseits aber diejenige Potenz von zehn (oder was immer als Periodenzahl angenommen wird), in welche diese Grundzahl multiplicirt werden soll, nicht in ihrer gewöhnlichen Gestalt hingestellt, sondern durch willkührliche Zeichen, Puncte oder Häkchen, angedeutet wird. Am consequentesten ist diese Methode aufbewahrt in den Arabischen sogenannten Ghobar-Ziffern; dieses System hat, wie das Indisch-Arabische, nur neun Zeichen für die neun Einheiten; für die Zehner wiederholt es dieselben Zeichen mit einem Punct oben, für die Hunderter mit zwei, für die Tausender mit drei Puncten. Hier vertreten die Puncte die Stellen der von uns gebrauchten Nullen, wie Humboldt geistreich bemerkt, nur mit dem Unterschiede, daß in der Ghobarschrift die Puncte auch da stehen bleiben, wo bei uns durch nachfolgende Ziffern die Nullen entbehrlich werden [5]). Übrigens scheint dieses System wenig im Gebrauch gewesen zu sein. Im gewöhnlichen Griechischen System finden wir diese Methode bei den Zahlen von 1000 bis 9000 angewandt, indem den μυριάδες oder Einern unten ein Häkchen angesetzt wird, so daß α 1000, β 2000 u. s. w. bis ϡ 9000 bedeutet. Hier gilt dieser unten angesetzte Apex als Multiplicator tausend, und die Griechen hätten dieses System durch ihre siebenundzwanzig Zahlzeichen bis ϡ gleich 900000 fortsetzen können. Das haben sie aber nicht gethan, sondern nach ϡ oder neuntausend gebrauchen sie das Zeichen M oder Mυ. für zehntausend. Dagegen wird ein altes, aber wie es scheint wenig gebräuchliches System angeführt, welches bis ϡ, neuntausend, mit dem gewöhnlichen System übereinstimmt, aber von zehntausend an einen neuen Weg einschlägt, indem es den Einheitszeichen oben zwei Puncte ansetzt, welche das Zeichen in die Myriaden multipliciren, und dieses geht durch alle Zahlen von $\alpha = 1$ bis ϡ $= 9000$ durch, so daß ä eine Myriade oder 10000, ï zehn Myriaden, ö hundert Myriaden, ü tausend Myriaden bedeutet. Dann beginnt die Reihe abermals von vorn, aber mit vier Puncten, welche die Grund-

5) S. de Sacy, grammaire Arabe. Paris. 1831. T. 1. p. 91. (§. 177) und Planche VIII. Humboldt a. a. O. S. 223. 224. Von diesen Puncten scheint es den bildlichen Namen Ghobâr (غبار), Staub, erhalten zu haben.

Digitized by Google

zahl in zehntausend Myriaden oder μύριαι μυριάδες multiplicirten, $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$ u. s. w. bis $\ddot{\mathrm{M}}$; dann folgt dieselbe Zahlenreihe mit sechs Puncten für die dritte Potenz der Myriaden und so weiter fort. Dieses System ist übrigens ganz der Griechischen Denkweise angemessen, indem es das diesem Volke eigenthümliche Fortschreiten von vier zu vier Stellen (um in unserer Vorstellungsweise zu sprechen) scharf ausprägt. Sehr interessant ist die Bemerkung von A. v. Humboldt, daß, wenn die Griechen, anstatt die Wiederholung der Pythmenes erst bei tausend anzufangen, sich derselben schon bei zehn u. s. w. statt der Buchstaben ι, ϰ u. s. w. bedient, und nachträglich, mit Andeutung der leer gebliebenen Stellen, die Apices weggelassen hätten, sie auf die Erfindung des Indisch-Arabischen Systems mit Stellenwerth der Ziffern gerathen wären [6]). Noch mehr aber gilt das von dem System der Ghobar-Ziffern. Eine eigenthümliche Anwendung dieser Bezeichnungsmethode finden wir noch in dem von Ptolemäus und allen späteren Astronomen gebrauchten Sexagesimalsystem, welches nach Potenzen von 60 abwärts steigt; die Ganzen (μοῖραι, Grade), d. h. die in die nullte Potenz von $\frac{1}{60}$ multiplicirten Zahlen, werden im Griechischen gar nicht, wenigstens nicht anders als jede Zahl, nämlich durch einen darüber gesetzten Horizontalstrich, bei den Späteren dagegen durch den Exponenten o angedeutet; die in die erste Potenz von $\frac{1}{60}$ multiplicirten Zahlen, (ἑξηκοστὰ πρῶτα, Minuten) erhalten oben einen senkrechten Strich, die Secunden (ἑξηκοστὰ δεύτερα) zwei solcher Striche und so fort [7]).

Dieses sind die drei wesentlichsten Methoden, welche in der Zahlenbezeichnung und Zahlenbildung verschiedener Völker sichtbar sind. Es finden sich zwar, namentlich bei den Griechen, noch andere Methoden, zumal bei der Bildung höherer Zahlen; dieselben sind aber ganz vereinzelt und meistens nur von einem Auctor zu einem bestimmten Zwecke angewendet worden, so daß sie in das Zahlensystem im strengen Sinne des Worts nicht eingreifen. Ich übergehe sie deshalb hier und ziehe es vor, sie gehörigen Orts als Einzelnheit darzustellen.

---

6) A. a. O. S. 222.

7) Humboldt a. a. O. S. 225. macht aus dieser Abtheilung von Zahlschichten nach geometrischer Progression eine eigene Methode; ich finde aber zwischen dieser und der eben beschriebenen keinen wesentlichen Unterschied. Auch scheint mir die Methode der Myriaden bei Eutokius besser in die zweite als in die dritte Klasse, wohin Humboldt sie zieht, zu gehören.

Digitized by Google

Welche Zeichen nun ein Volk zum Ausdruck seines Zahlensystems gewählt hat, ist für die Sache selbst ganz unwesentlich. Indeß lassen sich auch hier drei Klassen deutlich unterscheiden. Erstens, *willkührliche, von der Buchstabenschrift unabhängige Zeichen* mit oder ohne Hindeutung auf die darzustellende Zahl; zu der ersten Art gehören die Römischen, zu der zweiten die Indisch-Arabischen Ziffern, obgleich bei den letzteren selbst noch in der Arabischen Gestalt die Zeichen für 2 und 3 noch ziemlich deutlich als aus zwei und drei Strichen zusammengewachsen erscheinen, ٢, ٣. Zweitens, *die Buchstaben des Alphabets in ihrer gewöhnlichen Reihenfolge*, für die Einheiten und die Vielfachen der Periodenzahl gebraucht; dieser Art ist das Semitisch-Griechische Zahlensystem. Beide Klassen von Zahlzeichen sind unabhängig von den Zahlworten. Darum unterscheiden wir von ihnen drittens, *Anfangsbuchstaben oder Abbreviaturen der Zahlworte*; hieher gehört das alt-griechische System des Herodian, und die Arabischen sogenannten Diwani-Zahlen der Mehrzahl nach.

Ganz unabhängig von dieser graphischen Bezeichnung der Zahlen sind die Zahlensysteme, welche die Sprache darbietet, und auffallender Weise hat die Sprache meistens ein vollkommneres System als das durch Ziffern dargestellte. Die große Mehrzahl der bekannten Sprachen bekennt sich zu einem consequenten Decimalsystem, selbst bei solchen Völkern, welche in der graphischen Bezeichnung der Zahlen von demselben abweichen; ein nahe liegendes Beispiel davon ist die Lateinische Sprache, während die Römische Zahlengraphik das dekadische System mit dem pentadischen untermischt, und zwischen die Zeichen für 1, 10, 100, 1000 noch eigene Zeichen für 5, 50, 500 einschiebt. Wie wenig indeß die Sprache auf die Zahlengraphik eingewirkt hat, erhellt daraus, daß selbst gebildete Völker, wie Semiten, Griechen und andere, den Wink, welchen ihnen die Sprache über den Zusammenhang zwischen den Zahlen drei, dreißig, dreihundert giebt, nicht verstanden, und daher diesen innern Zusammenhang in ihren Zahlensystemen nicht dargestellt haben [8]). Eben darauf führt der

8) Es ist eine auffallende Erscheinung, daß das Zahlwort für 20 in so vielen Sprachen an irgend einer Unregelmäßigkeit laborirt. Regelmäßig gebildet ist es im Deutschen (zwanzig für zweizig, von der Form zween) und im Lithauischen (dwi-dessimts); das Lateinische viginti und Sanskrit vinçati (Persisch bîst), haben vorn das d verloren; ebenso wahrscheinlich das Griechische εἴκοσι, wenn

Digitized by Google

Umſtand, daß eine Erſcheinung in der Sprache und die entſprechende in der Zahlenſchrift hinſichtlich der Stelle nicht übereinſtimmen, ferner, daß die Sprache eines Volks eine Bildung darbietet, welche ſich in der Zahlengraphik eines andern Volks wiederfindet. So entſprechen den Römiſchen Zeichen **IV, IX** u. ſ. w. dem Geiſte und der Methode nach die Zahlworte undeviginti, undetriginta; dieſe Zahlen ſelbſt aber werden in der Graphik nicht ſo gebildet; man ſchreibt nicht **IXX** ſondern **XIX**, das iſt **X plus IX**. Dieſe nämlichen Formen **IV, IX, XL** kennen die Griechiſche und die Sanskrit-Sprache, indem ſie ſagen können ἕκοντα δυοῖν δέοντα für acht und neunzig, ûnavinçati, ûnatrinçat (verminderte zwanzig, verminderte dreißig) für neunzehn, neun und zwanzig; aber der Reihe ihrer Zahlzeichen ſind dieſe Formen der Darſtellung fremde geblieben. Ähnlich finden ſich auch, zumal in Afrika und Amerika, Sprachen, welche in der Reihe ihrer Zahlworte die Reihe der Lateiniſchen Zahlzeichen darſtellen, z. B. die ſogenannten Falatiga-Araber und Fulah's in Afrika, welche von eins bis fünf zählen, und dann fortfahren fünf und eins, fünf und zwei u. ſ. w. bis zehn [9]). Ebenſo die Amerikaniſchen Völker, welche nach Hand und Fuß zählen [10]). Lächerlich aber iſt es, daraus, daß ein Volk für ſechs ſagt fünf und eins, zu ſchließen, dieſes Volk ſei ſo roh, daß es nicht weiter als bis fünf zählen könne. Und doch finden ſich dergleichen geiſtreiche Bemerkungen,

---

man vorn das Digamma annimmt. (κοσι iſt Bildungsendung, entſprechend dem κοντα in den folgenden). Im Armeniſchen ſind zwei und zwanzig ganz verſchiedene Worte (aber ebenſo auch vier und vierzig). Ganz eigenthümlich bilden die Semitiſchen Sprachen dieſes Wort; während nämlich die Namen der Zehner von dreißig bis neunzig die Pluralformen der entſprechenden Einer ſind, iſt zwanzig Pluralform von zehn; Hebräiſch עֶשְׂרִים, Aramäiſch עֶשְׂרִין, كسع, Arabiſch عِشْرُونَ, Aethiopiſch ĕsrâ (für ĕsrân, wie auch die folgenden). Dieſes ſind entweder urſprünglich Dualformen von zehn, עשר etc. geweſen, und erſt ſpäter den folgenden dreißig, vierzig analog modificirt, oder die Formen ſind umgekehrt ſchon da geweſen, bevor die Sprache den Unterſchied zwiſchen Dual und Plural kannte. Die Dualvorſtellung liegt wenigſtens ſicher zu Grunde, weil der wirkliche Plural gar keinen Sinn giebt.

9) J. S. Vater im Königsberger Archiv für Philoſ., Theol., Sprachk. u. Geſch. Bd. I. (1812) S. 51. 60. Über dieſelbe Erſcheinung bei andern Afrikaniſchen Völkern ſiehe Rüdiger Geſch. d. menſchl. Sprache Th. I. §. 217. 219. 231. 232. 240. 247.

10) Humboldt a. a. O. S. 211. Rüdiger §. 275. 279. 283.

Digitized by Google

namentlich in älteren Büchern [11]). Eine leiſe Spur des pentadiſchen Syſtems bei den Griechen iſt uns in dem Verbum πεμπάζειν [12]) (πεμπε = πέντε) aufbehalten.

Ein Vigeſimalſyſtem oder Fortſchreiten von zwanzig zu zwanzig, mit Überſpringung der ungeraden Vielfachen von zehn, findet ſich gleichfalls bei vielen Völkern, in Europa freilich nur in einigen wenig bekannten Dialekten, z. B. in dem Kymriſchen in Wales, und etwas weniger conſequent in dem Baskiſchen Dialekte [13]). Eine Spur davon iſt noch in dem Franzöſiſchen quatre-vingt geblieben, wovon quatre-vingt-dix ebenſo gebildet wird, wie quatre-vingt-deux, das heißt, das ungrade Vielfache von zehn, hier neunzig, wird als Periodenabtheiler überſprungen und die Zahlen werden ohne neue Abtheilung von achtzig bis hundert fortgezählt. Daſſelbe geſchieht, aber ſchon mit einem eigenen Zahlworte für ſechzig, bei ſiebzig durch den Ausdruck soixante-dix; das Zahlwort soixante aber, als Ableitung von six, gehört dem Decimalſyſteme an, wogegen quatre-vingt, und ebenſo die ſeltneren Formen quinze-vingt, six-vingt, sept-vingt, huit-vingt treu ausgeprägte Formen des Vigeſimalſyſtems ſind; und der Celtiſche Dialekt in der Bretagne kennt, dem quatre-vingt analog, auch daou-ugent (deux-vingt) und tri-ugent (trois-vingt). Am meiſten verbreitet ſind aber die Vigeſimalſyſteme in Amerika, wo viele Völker die Zahl zwanzig allein als Periodenabtheiler gebrauchen, und conſequent alle ungraden Vielfachen von zehn, analog den übrigen zwiſchen je zwei Zwanzigern liegenden Zahlen, durch Addition von zehn bilden, z. B. 20 + 10, 40 + 10 u. ſ. w. Ja dieſe Völker ſind darin ſo conſequent, daß ſie ſelbſt bei hundert keinen Abſchnitt machen, ſondern, regelrecht genug, erſt für vierhundert, als Quadrat von zwanzig, ein neues Wort gebrauchen, mit dem ſie dann wieder bis achttauſend, dem Cubus von zwanzig, die Reihe fortbilden [14]). Bei den Azteken in Mexico iſt das Vigeſimalſyſtem der Sprache auch in die Zahlengraphik überge-

---

11) Huet demonstr. evangel. p. 295. Americani Topinambae nullos supra quinque numeros *norunt;* unicam scilicet manum numerando adhibere soliti. Vergl. Humboldt a. a. O. S. 209 (Note).

12) Hom. Od. IV, 412. Apoll. Rhod. Argon. II, 975. u. a.

13) Humboldt a. a. O. S. 209. 210.

14) S. die vergleichenden Sprachtabellen in Vater Proben deutſcher Volksmundarten S. 374. 375. Humboldt a. a. O. S. 212.

Digitized by Google

gangen; sie haben einfache Zeichen für 20, 400, 8000; daneben aber auch für die Zwischenperioden von 5, 10, 15, so daß also das ursprüngliche Vigesimalsystem von dem dekadischen und pentadischen durchbrochen wird, wie bei den Römern das dekadische von dem pentadischen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir auf die wirklich vorhandenen Zahlzeichensysteme derjenigen Völker, welche uns zunächst interessiren, einige specielle Aufmerksamkeit verwenden, und zwar vor Allen auf die der Semiten, Griechen und Römer. Die Semiten gebrauchen bekanntlich zur Bezeichnung der Zahlen die Buchstaben ihres Alphabets in der ursprünglichen alten Reihenfolge, in welcher das Alphabet der Hebräer, Syrer und Samaritaner sich bis auf diesen Tag erhalten hat. Die Araber haben späterhin diese Reihenfolge geändert, ohne aber den Zahlenwerth der einzelnen Buchstaben zugleich zu verändern, was für sie die Unbequemlichkeit mit sich führt, daß sie ihr Alphabet in zwei Reihenfolgen lernen müssen. Die Vertheilung der Buchstaben an die Zahlen geschieht nun in der Art, daß die Buchstaben von א bis ט die Einheiten von 1 bis 9, die folgenden neun Buchstaben von י bis צ die jenen entsprechenden Vielfachen von zehn, also von 10 bis 90 bezeichnen. Nun bleiben aber in dem alten aus zwei und zwanzig Buchstaben bestehenden Alphabet nur noch vier Buchstaben für die Zahlen von 100 bis 400 übrig, ק, ר, ש, ת. Bis hieher stimmen alle jene Alphabete genau mit einander überein; in der Bildung der Zahlen von 500 bis 900 aber haben namentlich Hebräer und Araber verschiedene Ausflüchte gesucht. Die Hebräer helfen sich auf zwiefache Weise, entweder unvollkommner dadurch, daß sie die Buchstaben ק, ר, ש, ת additiv zusammen stellen, so daß z. B. תר 400 + 200 = 600 bedeutet, so daß sie 900 nicht anders als durch drei Zeichen ausdrücken könnten; oder sie verwenden zur Bezeichnung der noch übrigen fünf Zahlen die fünf Finalzüge der Buchstaben כ מ נ פ צ, nämlich ך ם ן ף ץ; doch geschah dieses wohl erst späterhin. Das erstgenannte Hilfsmittel, die additive Zusammenstellung der vier letzten Buchstaben, haben auch die Araber angewandt; späterhin aber haben sie, gleich wie die Hebräer, dieser unvollkommenen Methode eine vollkommnere substituirt, die aber von der Hebräischen ganz abweicht. Die Araber haben nämlich die verschiedene Modification der Aussprache einiger Buchstaben des alten Semitischen Alphabets, von der sich schon im Hebräischen Spuren zeigen, bereits in die Schrift aufgenommen, indem

Digitized by Google

sie die beiden Aussprachen eines Zeichens durch einen oder mehrere über oder unter dem Buchstaben angebrachte Puncte andeuten, und dieser punctirten Buchstaben, welche sie ziemlich uneigentlich ausländische (معجمة) nennen, bedienen sie sich zu dem vorliegenden Zwecke, so daß die Zeichen ث خ ذ ض ظ der Reihe nach die Zahlenwerthe von 500, 600, 700, 800, 900 erhalten, und sie behalten dann noch das Zeichen غ für die Zahl 1000 übrig. Die zwischen diesen Grenzen liegenden zusammengesetzten Zahlen werden durch additive Zusammenstellung gebildet, indem man, nach Semitischer Weise, von der größern Zahl zu der kleinern von der rechten nach der linken Seite fortschreitet; so bedeutet z. B. der Ausdruck תעג oder تعج die Zahl 473, als Summa von ת, ت = 400, ע, ع = 70 und ג, ج = 3. Um nun die auf solche Weise ausgedrückten Zahlen im Contexte von den Worten gehörig zu unterscheiden, ziehen die Araber über den ganzen Zahlenausdruck einen Horizontalstrich, تعج, oder schreiben auch jeden einzelnen Buchstaben in seiner Finalform تعج; die Hebräer dagegen machen zwei kleine Häkchen über den letzten Zahlbuchstaben, "תעג oder auch zwischen dieselben ת"ע"ג. Um die Tausender auszudrücken, fangen die Hebräer wieder von א an, und unterscheiden diesen tausendfachen Werth des Buchstabens durch zwei darüber gesetzte Pünctchen, א̈. Bei zusammengesetzten Zahlen fallen jedoch diese Pünctchen oft weg, weil die von der Rechten zur Linken mit abnehmendem Werthe geordnete Reihenfolge der Zeichen über die Bedeutung keinen Zweifel gestattet; dagegen wird bei vierstelligen Zahlen das Zifferzeichen (") öfter wiederholt. So lesen wir z. B. in der Masora die Zahlen א"רל"ד 1534, אר"ט 1209 und andere. Bei den Arabern, welche überhaupt die Zahlen gern mit Zahlworten ausschreiben, besinne ich mich nicht Zahlen über das erste Tausend hinaus nach diesem System bezeichnet gefunden zu haben; für eintausend aber haben sie, wie bemerkt, das Zeichen غ, z. B. غثمب 1542, غمج 1043. Kleinere Zahlen dagegen bieten uns unter Andern Abulfeda's verschiedene geographische Tafeln dar, welche, beiläufig gesagt, in allen bisherigen Ausgaben durch eine Unzahl von Druckfehlern entstellt sind, so daß Länder, die man nach diesen Angaben der Lage einzelner Städte in Graden und Minuten construiren wollte, oft eine ziemlich befremdende Gestalt annehmen würden.

Diese Methode der Zahlenbezeichnung war durch alle Semitischen Stämme verbreitet, und hat sich selbst bei den Arabern noch

Digitized by Google

neben dem von Indien oder Persien her eingedrungenen vollkommenen System mit Stellenwerth erhalten. Daß die Äthiopier in Abyssinien nebst einem völlig unsemitischen Schriftcharakter auch ein eigenes System von Zahlzeichen haben, ist hier von keinem Belange; denn einerseits ist dieses Volk, wie in allgemein historischer Hinsicht, so namentlich in Bezug auf Geschichte der Wissenschaften zu unbedeutend, andrerseits sind die Zahlzeichen desselben so sichtbare Entstellungen der Griechischen Buchstaben, daß über den historischen Ursprung derselben kein Zweifel obwalten kann, und wahrscheinlich sind sie erst mit dem Christenthum und der neutestamentlichen Literatur dorthin eingewandert. Der sicherste Beweis für das hohe Alter des Zahlenwerths der Semitischen Buchstaben ist der, daß die Griechen diesen Zahlenwerth schon zugleich mit den Buchstaben von den Phöniziern erhielten. Auf einen Phönizischen Ursprung des Griechischen Alphabets deuten einerseits alle alten Traditionen, andererseits trägt das Griechische Alphabet noch so unverholen die Wahrzeichen Semitischer Herkunft zur Schau, daß nicht nur die Reihenfolge und die Namen der Buchstaben noch ganz Semitisch sind, und zwar letztere in der Aramäischen Form in dem von den Grammatikern sogenannten status emphaticus oder demonstrativus, mit dem Ausgange auf ā (אָ), sondern auch die Figuren zum Theil noch jetzt, noch mehr aber in alten Inschriften, mit den alten Phönizischen und den diesen ähnlichen Samaritanischen ziemlich übereinstimmend sind, nur daß sie in der Regel, angemessen der von der Semitischen abweichenden Gewohnheit der Griechen, von der Linken zur Rechten zu schreiben, umgekehrt stehen. So ist z. B. das Griechische P das umgekehrte Samaritanische, welches den Kopf zur Linken, also auch vorwärts, kehrt, ϥ; eben so sind B, Γ, E, K, L fast nicht weiter verändert, als daß sie sich umgewandt haben. Die dem Semitischen Organ eigenthümlichen Gutturalbuchstaben א ה ח ע sind im Griechischen Munde in die entsprechenden Vocale α, ε, η, ο, zum Theil aber mit Beibehaltung der Namen, übergegangen. Das Semitische samek, ס, (Aramäisch semkath) erscheint im Griechischen verhärtet als ξ mit eigenthümlichem Namen, wenn nicht vielleicht der Name ξῖ selbst aus dem Semitischen sîn oder schîn mit Abwerfung des n herzuleiten ist; dann wäre weiter nichts geschehen, als daß die beiden Buchstaben sîn und samek ihre Stellen vertauscht hätten. Denn daß der Name des samek, durch eine leichte Transposition in σίγμα umgewandelt, an der Stelle des Semitischen sîn wieder erscheint, ist

Digitized by Google

Thatſache [15]). In Hinſicht des Zeichens ſind in dem Griechiſchen Σίγμα beide Semitiſche Buchſtaben vermiſcht, indem C, σ aus dem Semitiſchen samek, ס, dagegen Σ, ς aus dem sîn, ש, alt-Phöniziſch W entſtanden ſind. Nur drei Buchſtaben des Semitiſchen Alphabets, nämlich vâv oder vau ו, zade (צ) und koph (ק) finden wir im Griechiſchen Alphabete nicht wieder. Indeß ſtellt ſich hier die intereſſante Thatſache heraus, daß wenigſtens zwei dieſer Buchſtaben, nämlich vâv und koph, welche in Folge des abweichenden Sprachcharakters in die Wortſchrift der Griechen nicht übergegangen oder doch als unnöthig frühe daraus verſchwunden ſind, ſich nichtsdeſtoweniger als Zahlzeichen an ihrem Platze und mit ihren echt Semitiſchen Namen erhalten haben. Beide Zeichen, ſo wie noch ein drittes, von dem wir unten ſprechen werden, führen den Titel ἐπίσημον, Stellvertreter, und wir finden das vâv wieder zwiſchen ε und ζ als ἐπίσημον βαῦ für die Zahl ſechs, das koph als ἐπίσημον κόππα oder κοφῆ [16]) zwiſchen dem π und ϱ für die Zahl neunzig. Nur das als Buchſtabe ebenfalls verlorene Zade iſt wenigſtens an ſeiner Stelle durch kein ἐπίσημον erſetzt worden, ſondern ſein Platz iſt ganz leer geblieben. Dieſes Ausfallen eines Zeichens aus der

---

15) Böckh, die Staatshaushaltung der Athener, Berlin, 1817. Th. 2. S. 386. nimmt an, daß alle Ziſchlaute ihre Plätze vertauſcht haben. „Das Sain (ע) iſt das Xi (Ξ); das Tſade (צ) Zeta (Z); das Samech (ס) Sigma (Σ), wie ſchon die Namen beweiſen; das Schin und Sin aber nichts anderes als der rohe, nur im Doriſch-Aeoliſchen Dialekt übrig gebliebene Ziſchlaut, der wahrſcheinlich wie Sch klang und San genannt wurde." Was der gelehrte Verfaſſer hier über Xi und Zeta ſagt, iſt ganz gewiß nicht richtig; der Übergang des Namens zādê, צָדֵי in Ζῆτα iſt unnatürlich und ohne Analogie; dagegen ſind die Namen Ζῆτα und Sain, ſo verſchieden ſie auch ausſehen, ſicher identiſch; denn Ζῆτα iſt nichts anderes, als die Aramäiſche Femininalform von sain, ܣܝܢܐ mit occultirtem n vor t; ganz wie ܡܕܝܢܬܐ (Medînto) geſprochen wird Medito, ſo iſt ܣܝܬܐ (Sainto, wo das o ſtatt a ſpäterer Syriasmus iſt) Saito geſprochen worden. Demnach wird das Semitiſche Sain ſowohl an ſeinem Platze, als auch mit ſeinem Namen durch das Griechiſche Ζῆτα vertreten; es entſpricht alſo weder das Sain dem ξῖ, noch dem Ζῆτα das Zade; gegentheils iſt das letztere wahrſcheinlich ſpurlos aus dem Griechiſchen Alphabete verſchwunden.

16) Es führt auch den von der Geſtalt hergenommenen Namen ἀντίῤῥω. S. die Tabelle bei Montfaucon Palaeogr. Graeca p. 122, und die Erläuterung dazu p. 132.

Digitized by Google

Reihe der Zahlbuchstaben hat für das Zahlensystem die Folge gehabt, daß von neunzig an, welche Zahl eben an dem Semitischen Zade haftet, die Griechischen und Semitischen Zahlen nicht mehr mit einander übereinstimmen; während nämlich die Semiten die Hunderte mit ק, Koph, beginnen, fangen die Griechen dieselben mit ϙ an, weil ihr κόππα die Stelle des verloren gegangenen Zade, ϡ, als neunzig ersetzt.

Diese Darstellung scheint mir dem Wesen angemessen und natürlich zu sein, und sich auf historische Wahrscheinlichkeit zu stützen. Ganz sonderbar nimmt die Sache sich bei Montucla aus, dessen Worte fast so klingen, als hätten die Griechen mit selbstthätigem Bewußtsein sich bestrebt, durch Einschaltung der ἐπίσημα ihr Zahlensystem dem Semitischen gleichförmig zu machen, sie hätten sich aber nach der Einschaltung des κόππα überzeugt, daß das doch nicht gehen würde, und darum das Unternehmen für die folgenden Zahlen aufgegeben, um nicht, wie Montucla sich ausdrückt, zu viel embarras zu verursachen [17]). Anders freilich verhält es sich mit dem dritten ἐπίσημον. Als nämlich die Griechen zu dem von Osten her [18]) erhaltenen Alphabete, um dem Genius ihrer Sprache zu genügen, noch fünf Buchstaben, υ, φ, χ, ψ, ω hinzugefügt [19]), und auch diese als

---

17) Hist. des Math. T. I. p. 46. Eben diese komische Darstellung wiederholt Mönnich, Lehrb. d. Mathem. Th. 1. Abth. 2. S. 455.

18) In der Sage, daß Kadmus die Schrift nach Griechenland gebracht habe, scheint nichts weiter zu liegen, als daß die Schrift orientalischen Ursprungs ist. Denn auffallend ist das Zusammentreffen, daß im Semitischen קֶדֶם, kédem, (in der Flexion kadmo) Osten bedeutet. Also heißt wohl in dieser Sage der Ausdruck „von Kadmos" nichts anderes, als „von Osten her."

19) Aus dem ererbten Zahlenwerthe der Griechischen Buchstaben scheint deutlich zu erhellen, in welcher Gestalt die Griechen ihr Alphabet von den Semiten erhalten haben, und es werden dadurch die Sagen, als hätte Kadmos zuerst nur sechszehn Buchstaben nach Griechenland gebracht, und späterhin Palamedes vier und Simonides abermals vier hinzugefügt, als ganz grundlos niedergeschlagen. (Vergl. Plinius hist. nat. VII, 56. Suidas in d. Art. Παλαμήδης). „Was die Alten von einem Kadmischen, Palamedischen und Simonideischen Alphabet erzählen, widerspricht den gesunden Ansichten schnurstracks," sagt Böckh a. a. O. S. 387. Der an den Buchstaben haftende Semitische Zahlenwerth stellt die Buchstaben von A bis T als alt und ursprünglich dar; dagegen sind υ, φ, χ, ψ, ω Griechischen und späteren Ursprungs; von denen υ und ω sich vielleicht auf das zu voreilig vernachlässigte Vâv basiren, welches auch noch vereinzelt in der Form F als Digamma erscheint; φ und χ aber

Digitized by Google

Zahlzeichen für die noch fehlenden Hunderte angewendet hatten, so reichten sie damit doch nur bis achthundert, so daß ihnen noch ein Zeichen für neunhundert fehlte. Für diese Zahl nun gebrauchen sie abermals ein Episemon, gewöhnlich dieser Gestalt , welches sie Σαμπῖ nennen, dessen Zeichen und Namen zu mannigfachen Deutungen Anlaß gegeben haben. Das Zeichen, welches übrigens in mancherlei Variationen erscheint, als , , , , , , , , scheint in allen diesen verschiedenen Gestaltungen auf ein verunstaltetes und halb oder ganz umgewandtes Semitisches ש (sîn oder schîn) hinzuweisen, und für diese Deutung desselben entscheidet sich auch Böckh [20]), welcher mit Recht bemerkt, daß der Name Σαμπῖ weiter nichts bedeute als Σὰν, und daß der zweite Theil desselben bloß von der Gestalt hergenommen sei, in welcher man eine Verschlingung der Buchstaben C und Π zu sehen glaubte. Das Σὰν, welches gewöhnlich für gleichbedeutend mit dem Σίγμα gehalten wird [21]), hält Böckh für einen von demselben verschiedenen rauheren Zischlaut; vielleicht ist uns in den Griechischen Buchstaben Ξῖ und Σὰν die doppelte Aussprache des Semitischen ש als schîn und sîn aufbehalten. Ganz leer geblieben war aber oben die Stelle des Semitischen Zādê, und so ließe sich erwarten, daß auf eine solche Schadloshaltung durch Aufnahme in die Zahlenreihe gerade dieser Buchstabe Ansprüche hätte machen können, wofür sich auch viele, namentlich ältere Stimmen erhoben haben, wie Joseph Scaliger, Wallis, Montfaucon, Heilbronner [22]), und wenn die Angabe bei Heilbronner, daß dieses Zeichen auch unter dem Namen τσάδδι vorkomme, auf einer haltbaren Auctorität beruht, so dürfte die Ansicht, das Σαμπῖ für ein Überbleibsel des Zade zu halten, leicht das Übergewicht gewinnen. Indeß weiß Montfaucon von dieser Variante des Namens nichts, und dieselbe

---

sind aus der schon im Semitischen begründeten doppelten Aussprache des po und kaph hervorgegangen; ψ endlich ist analoge Bildung, um in der Reihe der Labialen den Zischlauten ξ und ζ in der Reihe der Gutturalen und Dentalen zu entsprechen.

20) Die Staatshaush. d. Athener Th. 2. S. 385—387.

21) Vergl. Böckh a. a. O. Herod. I, 139 sagt von den Persern: τὰ οὐνόματα σφι ἐόντα ὁμοῖα τοῖσι σώμασι καὶ τῇ μεγαλοπρεπείῃ τελευτῶσι πάντα ἐς τωὐτὸ γράμμα, τὸ Δωριέες μὲν σὰν καλέουσι, Ἴωνες δὲ σίγμα.

22) *Wallis* Opera T. 1. p. 42. *Heilbronner* hist. math. p. 727. *Montfaucon* Palaeographia Graeca p. 132.

Digitized by Google

erregt auch zu leicht den Verdacht, daß sie selbst erst der Hypothese nachgebildet ist. Schließlich bemerke ich noch, daß die Stellung dieses Zeichens am Ende der ganzen Reihe wohl darauf hindeutet, daß dasselbe erst später, und zwar nach der Einführung der echtgriechischen Buchstaben υ bis ω, als Zahlzeichen gebraucht worden ist, und, was von βαῦ und κόππα nicht gilt, einem bereits klar gefühlten Bedürfnisse seine Entstehung verdankt.

Die Zeichen der beiden andern ἐπίσημα sind in Manuscripten und Drucken ebenso schwankend, wie die des σαυπῖ. Das ἐπίσημον βαῦ hat in der Regel die Gestalt des sogenannten στίγμα, ϛ, mit dem es häufig und noch in neuester Zeit völlig mit Unrecht ist verwechselt worden; noch Ast in seiner Ausgabe der Theologumena Arithm. und der Arithmetik des Nikomachus schreibt, das ϛ fälschlich auflösend, durchgehend στ dafür, und wenn auch vermöge des Zahlenwerths beider Buchstaben aus einer solchen Schreibart eben keine Zweideutigkeit entstehen kann, so ist es doch, abgesehen davon, daß es historisch falsch ist, unnatürlich und dem Charakter des Griechischen Systems unangemessen, eine einfache Zahl, wie sechs, durch zwei Zeichen auszudrücken. Varianten für ϛ sind S, C, F, ⊏ und ähnliche. Die gewöhnliche Form ϛ ist das umgewandte Zeichen des altsemitischen vâv, Samaritanisch 𐤅. Eben so ist das Zeichen κόππα, mit umgewandtem Kopfe, das Semitische Koph, (ק, P); es erscheint nämlich in den Gestalten 𐤒 𐤒 𐤒 𐤒 und mehr abgeleitet 𐤓 𐤓 𐤓.

Fassen wir nun das bisher Gesagte zusammen, so gestalten sich die Zahlenreihen der Hebräer, Araber und Griechen auf folgende Weise:

Erste Klasse. Einer, πυθμένες.

1.	א	—	ا	—	α
2.	ב	—	ب	—	β
3.	ג	—	ج	—	γ
4.	ד	—	د	—	δ
5.	ה	—	ه	—	ε
6.	ו	—	و	—	ϛ (ἐπίσημον βαῦ)
7.	ז	—	ز	—	ζ
8.	ח	—	ح	—	η
9.	ט	—	ط	—	ϑ

Digitized by Google

Zweite Klasse. Zehner.

10.	י	ي	ι
20.	כ	ك	κ
30.	ל	ل	λ
40.	מ	م	μ
50.	נ	ن	ν
60.	ס	س	ξ
70.	ע	ع	ο
80.	פ	ف	π
90.	צ	ص	ϟ (ἐπίσημον κόππα)

Dritte Klasse. Hunderter.

100.	ק	ق	ϱ
200.	ר	ر	σ
300.	ש	ش	τ
400.	ת	ت	υ
500.	ך	ث	φ
600.	ם	خ	χ
700.	ן	ذ	ψ
800.	ף	ض	ω
900.	ץ	ظ	ϡ (ἐπίσημον σαμπῖ)
1000.		غ	

Ähnlich, wie die Araber, unterscheiden die Griechen diese Buchstaben, wenn sie Zahlenausdrücke sind, durch einen über dieselben gezogenen Horizontalstrich, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\varrho\kappa\delta}$, nicht, wie oft fälschlich bemerkt worden ist, durch einen Acutus $\acute{\alpha}$. Indeß finden sich Zahlen in alten Inschriften, welche durch kein Abzeichen von dem Contexte unterschieden werden. Wie die Griechen die Zahlen von tausend aufwärts bezeichneten, habe ich oben schon im Vorbeigehen berührt. Die Buchstaben von α bis ϑ mit einem unten angebrachten kleinen Striche, wie $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$ u. s. w., dienten zur Bezeichnung der Zahlen von tausend bis neuntausend, nicht aber höher hinauf, wie ebenfalls oft fälschlich angeführt wird, als hätte man 10000 durch $\iota_{,}$, 20000 durch $\varkappa_{,}$, 100000 durch $\varrho_{,}$ u. s. w. ausgedrückt [23]). Ich

23) Heilbronner p. 728 führt zwar von der letzteren Bezeichnungsmethode Beispiele aus Geminus (Elem. astron. c. XV) an; da ich aber das letztere Werk nicht zur Hand habe, mag ich über die Zuverlässigkeit der beigebrachten Beispiele

muß hier eine Bemerkung machen, welche wichtig iſt, weil ſie in die ganze Vorſtellungsweiſe der Griechen eingreift, die nämlich, daß die Griechen bei der Abtheilung größerer Zahlen nicht, wie wir, von Tauſenden zu Tauſenden, oder nach unſerer Art zu ſprechen, von drei zu drei Stellen, ſondern von Myriaden zu Myriaden, alſo von vier zu vier Stellen fortſchreiten, ſo daß ſie z. B. die Zahl 531789643 nicht, wie wir, ſo abtheilen 531,789,643, ſondern ſo 5,3178,9643. Die Art der Abtheilung iſt in ihre Vorſtellungsweiſe weſentlich übergegangen. Demgemäß nennen ſie die niedrigſte Abtheilung oder die vier unterſten Stellen Einheiten, μονάδες, die vier folgenden Myriaden, μυριάδες, die vier nächſtfolgenden μύριαι μυριάδες, dann μυριάκις μύριαι μυριάδες u. ſ. w. f. Dieſer Vorſtellungsweiſe analog iſt ihre Zahlenbezeichnung. Bei ϡ, 9000, hört die Reihe der Einheiten auf, und die größte Zahl dieſer Reihe iſt ϡϑϡ d. h. 9999 Einheiten. Nun beginnt die zweite Klaſſe oder die Reihe der Myriaden mit einer neuen Bezeichnung; ſie bedienen ſich nämlich des erſten oder der beiden erſten Buchſtaben des Wortes Μυριὰς, alſo M oder Μυ., welchen Zeichen die bisher betrachteten Einheitszahlen als Factoren entweder vorgeſtellt, oder übergeſchrieben, oder auch wohl hinten angehängt werden. Wirkliches Zahlzeichen iſt dieſes M indeß nur in dem zweiten Falle, in welchem die multiplicirende Einheitszahl über daſſelbe geſchrieben wird, wie immer bei Eutokius zu Archimed's Kreismeſſung; im erſten und dritten Falle iſt es eigentlich nur Abbreviatur der Worte Μυριὰς oder Μυριάδες, und dieſe Worte werden daher auch oft ganz ausgeſchrieben. So drückt z. B. Pappus (Fragmente des zweiten Buchs, Satz 23) die Zahl 18000 ſo aus: μυριάδες $\overline{\alpha}$ μονάδες $\overline{\eta}$. Ich erwähnte oben ſchon, daß das Myriadenzeichen auch oft ganz wegfällt und durch einen bloßen Punct, der die Myriaden von den Monaden ſcheidet, erſetzt wird. So ſchreibt Diophant IV, 29. die Zahlen ρν.ϛϡπδ für 1507984, κϛ.βρμδ für 262144, und V, 11. αϡ α.ϵσιδ für 19915214, und ſo oft. Dieſe Auslaſſung des Myriadenzeichens iſt ein Schritt zur Erfindung des Syſtems mit Stellenwerth. Auf ähnliche von den Griechen gemachte Schritte werden wir bald öfters ſtoßen. Aber es war ihnen nicht zugedacht, dieſe große mächtig in

nichts entſcheiden. Bei Ariſtarch, Archimedes, Pappus, Diophantus, Eutokius u. A. findet ſich keine Spur davon.

in die Wissenschaft und in das Leben eingreifende Erfindung zu vollenden.

Es wird noch eine andere Methode, die Myriaden und höheren Zahlen zu bezeichnen, erwähnt, welche ich auch oben schon berührte, die ich aber durch keine Auctoritäten Griechischer Schriftsteller belegen kann. Camerarius[24]) nämlich, nachdem er die Zahlbuchstaben für die Einer, Zehner, Hunderter und Tausender in der gewöhnlichen Weise dargestellt hat, sagt, die Myriaden und folgenden Zahlen würden so bezeichnet:

α̈	β̈	γ̈	δ̈	ε̈	ϛ̈	ζ̈	η̈	ϑ̈
ϊ	κ̈	λ̈	μ̈	ν̈	ξ̈	ο̈	π̈	[illegible]
ϱ̈	σ̈	τ̈	ϋ	φ̈	χ̈	ψ̈	ω̈	[illegible]
͵α̈	͵β̈	͵γ̈	͵δ̈	͵ε̈	͵ϛ̈	͵ζ̈	͵η̈	͵ϑ̈

so daß also α̈ eine Myriade, ϊ zehn, ϱ̈ hundert, ͵α̈ tausend Myriaden oder zehn Millionen bezeichnet. Dem vorigen analog wird nun die ganze Zahlenreihe noch einmal mit vier Puncten oben, und dann noch mit sechs Puncten durchgemacht; demnach bedeutet, wenn wir nur das erste Glied jeder Zeile betrachten,

α̈̈ μύριαι μυριάδες = 100 Millionen
ϊ̈ δεκάκις μύριαι μυριάδες = 1000 Millionen
ϱ̈̈ ἑκατοντάκις μύριαι μυριάδες = 10000 Millionen
͵α̈̈ χιλιάκις μύριαι μυριάδες = 100000 Millionen

---

24) De Graecis Latinisque numerorum notis, et praeterea Saracenicis seu Indicis cum indicio elementorum ejus, quam Logisticen Graeci nominant (quae est methodus conficiendarum Rationum) et vocabulorum artis interpretatione et aliis quibusdam ad hanc pertinentibus. Accesserunt explicatiunculae Arithmetices doctrinae Nicomachi et alia quaedam, ad contemplationem scientiae istius pertinentia: studio Joachimi Camerarii Papeberg: 8. Ohne Ort und Jahr und ohne Seitenzahlen. Unter der ersten Dedication an Sebastianus Theodoricus Vinesimus steht das Datum: Lipsiae D. XXV. M. Sextilis Anno Christi Jesu M. D. LXIX. Unter der zweiten an Johannes Ulrichus Zasius: V. Calend. Decembris. Anno Christi M. D. LVI. Die hieher gehörige Stelle steht in dem Tractatus Logistices. Prima part. Στοιχεῖα quibus numeri designantur. — Dieselbe Methode berührt Samuel Tennulius in seinen Notae in librum quartum Jamblichi Chalcid. de arithmetica Nicomachi introductione. Daventr. 1667. 4. p. 157—159. (Befindet sich auch unter besonderem Titel bei Tennulius Ausgabe des Jamblichus, Arnhem. 1668. 4.) Vergl. Humboldt a. a. O. S. 224.

Digitized by Google

und die folgende Klasse

ᾰ̈ μυριάκις μύριαι μυριάδες = 1 Billion

u. s. w.

Camerarius führt nicht die Quelle an, aus welcher er diese Bezeichnungsart entnommen hat. Es läßt sich indeß nicht annehmen, daß die Sache ganz aus der Luft gegriffen wäre; dazu kommt noch, daß die Methode an und für sich in ihrem consequenten Fortschreiten von Myriaden zu Myriaden einen ganz Griechischen Charakter zeigt. Indeß ist dieselbe gewiß wenig, vielleicht erst sehr spät, in den Gebrauch gekommen. Montfaucon hat in einem Manuscript der Pariser Bibliothek vom zwölften Jahrhundert diese Methode, aber nicht weiter als für die einfachen Myriaden, also von ᾰ bis ϡ̈ angewandt gefunden. Ich will seine Worte hieher setzen: **Notae numerales sive literae numeris designandis constitutae, a Grammaticis et Lexicariis adferuntur; ita ut** α′ ***unum*** **significet,** β′ ***duo,*** γ′ ***tria*** **etc. ut vel tirones norunt. Pro denario autem numero,** ι′ ***decem,*** ια′ ***undecim*** **etc., pro centenario** ϱ′ ***centum,*** σ′ ***ducenti*** **etc. (Über** α′ **statt** ᾱ **siehe oben). Pro millenario** ϡ ***mille,*** β ***bis mille*** **etc. Cum hac autem numerandi methodo hactenus consentit Codex Regius 2724. qui anno mundi 6191. secundum Graecorum calculum; Christi autem 1183. scriptus est, et quidem a perito Calligrapho, qui Aerarii generalis Constantinopolitani Acta evolvere, ex iisque varia excerpere se profitetur. Is autem myriadas sive dena millia longe alia ratione notat, quam solent Grammatici: illi quippe dena millia sic** ͵ι, **vicena millia** ͵κ, **30000** ͵λ **notant. Hic autem sic,** α̈ **dena millia sive myriadem unam,** β̈, **20000 sive myriadas duas,** γ̈, **30000 sive myriadas tres,** ϊ, **100000 sive decem myriadas,** ια̈ **110000 sive undecim myriadas,** ιβ̈, **120000 sive duodecim myriadas, et sic de reliquis; ita ut quando plures numeri simul ponuntur, duo puncta postremae semper literae numerali superscribantur;** ϱ̈ **autem centum myriadas, sive 1000000 significat,** ϱϊ **centum et decem myriadas,** ϱια̈ **centum et undecim myriadas, et sic de reliquis;** σ̈ **ducentas myriadas,** τ̈ **trecentas etc. Millia autem myriadum sic notantur** ϡ̈, **mille myriades;** β̈ **bis mille myriades etc. Si autem millenario alii numeri adjungantur, duo puncta postremo numero superscribuntur, verbi gratia** ϡ ϡ ϟ ϡ **novem**

Digitized by Google

mille nongentae nonaginta novem myriades: ubi semper intelligas myriadas singulas dena millia significare. Ubi autem ultra postremum hunc numerum, videlicet ad myriadas myriadum, pervenitur, tunc plenis vocibus, non autem notis, numeratur sic, μύριαι μυριάδες. Nec ultra numeros persequitur ille, quisquis fuerit, Calligraphus [25]). Dieſe Methode unterſcheidet ſich alſo von der bei Camerarius aus einander geſetzten in nichts weiter, als in der Ausdehnung. Montfaucon fährt fort: Eam quidem numerandi rationem memorat Joachimus Camerarius, et post eum Georgius Henischius in opusculo de Numeratione multiplici. Das Werk von Heniſchius habe ich nicht geſehen; nur auf dieſes aber kann es ſich beziehen, wenn Montfaucon ſagt, er habe (es bleibt unbeſtimmt, welcher von Beiden) darin gefehlt, daß er von hundert Myriaden an, ſowohl fälſchlich Myriaden durch millia wiedergegeben, als auch alle folgenden Zahlen in unſern Ziffern um eine Null zu klein geſchrieben habe. Bei Camerarius befindet ſich dieſer Fehler nicht. Schließlich verſichert auch Montfaucon, daß er die Methode des Camerarius in keinem einzigen Codex gebraucht gefunden habe.

Eben ſo problematiſch ſteht ein Zahlenſyſtem da, welches ich bis jetzt nur aus Heilbronner [26]) kenne, und welches ſich im Weſentlichen von der gewöhnlichen Griechiſchen Manier nicht ſehr unterſcheidet, nur daß hier ſtatt der Buchſtaben willkührliche Zeichen gewählt ſind; darin aber kann man bei dieſem Syſteme einen gewiſſen Fortſchritt finden, daß jeder der Pythmenes mit ſeinen Vielfachen in die Potenzen von zehn eine durchgehend conſequente Analogie beobachtet. Der weſentliche Beſtandtheil dieſer Zahlen iſt ein ſenkrechter Strich, der allen gemein iſt; an dieſen werden die individuellen Unterſchiede in der Art angeſetzt, daß dieſer Appendix und Charakter der einzelnen Zahl bei den Einheiten oben rechts, bei den Zehnern oben links, bei den Hunderten unten rechts, bei den Tauſenden unten links zu ſtehen kommt. Demnach hat man eigentlich nur neun Zeichen ſich zu merken, um alle übrigen leicht zu erkennen. Die von Heilbronner gegebene Tabelle ſieht etwa ſo aus:

25) Montfaucon Palaeogr. Gr., Recens. p. XII. XIII.

26) Hist. math. p. 735—737.

Digitized by Google

Einer									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zehner									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Hunderte									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Tausende									
	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Nun besteht das Eigenthümliche dieser Methode darin, daß bei zusammengesetzten Zahlen der Verticalstrich nur einmal geschrieben und an diesen alle charakteristischen Merkmale der einzelnen Ziffern angehängt werden. Heilbronner giebt folgende bei ihm zum Theil sehr verstümmelte Beispiele:

bedeutet die Zahl 5548

bedeutet die Zahl 2454

bedeutet die Zahl 3970

bedeutet die Zahl 1586.

Da jede Potenz von zehn ihr charakteristisches Merkmal an einer anderen Stelle hat, so können sich in der zusammengesetzten Zahl diese Merkmale niemals gegenseitig stören. Für zehntausend giebt Heilbronner die Wiederholung des Zeichens für tausend, also , wie man das in den Zusammenhang gebracht hat, weiß ich nicht. Die Erfindung ist geistreich, aber wahrscheinlich ist sie Erfindung geblieben. Heilbronner selbst drückt sich ganz unbestimmt darüber aus, und beruft sich nur auf **Johannes Noviomagus** und auf **Hostus** p. 561, ohne die Werke beider Auctoren zu nennen, auf die er sich bezieht. Ich habe in den hier vorhandenen Werken beider Schriftsteller nichts darüber finden können, und auch sonst über den Gebrauch und den Ursprung dieser Methode nichts erfahren.

Dagegen ist uns von dem Grammatiker Herodian[27]) ein anderes, wie es scheint, altes Griechisches Zahlensystem aufbewahrt worden, insofern analog dem Römischen, als es sich verhältnißmäßig

27) Siehe in Stephani thesaurus linguae Graecae.

Digitized by Google

weniger Zeichen bedient, um alle Zahlen zuſammenzuſetzen. Dieſes Syſtem hat nämlich nur ſechs einfache Zeichen, I, Π, Δ, H, X, M, welche der Reihe nach die Zahlen 1, 5, 10, 100, 1000, 10000 vorſtellen; dieſe Zeichen ſind mit Ausnahme des erſten, welches der bekannte einfache Einheitsſtrich iſt, die Anfangsbuchſtaben der entſprechenden Zahlworte; bei Π *πέντε*, Δ *δέκα*, X *χίλιοι* und M *μύριοι* liegt das am Tage; dagegen erwartet man E (*ἕκατον*) für H. Aber ſchon Wallis [28]) hat hier das Richtige geſehen, und ſeine Bemerkung, daß das Zeichen H, welches durch die Stellung im Alphabet und durch ſeinen Namen dem Semitiſchen Chet, ח, entſpricht, urſprünglich das Zeichen für den Spiritus asper geweſen ſei, als welches es ſich auch im Lateiniſchen Alphabet wiederfindet, und daß man in alten Zeiten nicht *Ἑκατον*, ſondern *Ηεκατον* geſchrieben habe, iſt durch mehre von Montfaucon beigebrachte Beiſpiele von alten Inſchriften beſtätigt worden [29]). Die Methode der Zahlenbildung mit dieſen Zeichen iſt additive Nebeneinanderſtellung bis zur viermaligen Wiederholung deſſelben Zeichens. Dann aber tritt eine multiplicative Methode ein, indem ſtatt der fünfmaligen Wiederholung das einfache Zeichen in den Buchſtaben Π = 5 hineingeſetzt wird. Der Anſchaulichkeit wegen gebe ich hier die Tabelle der Zahlen.

1.	I	11.	ΔI	21.	ΔΔI u. ſ. w.
2.	II	12.	ΔII	30.	ΔΔΔ
3.	III	13.	ΔIII	40.	ΔΔΔΔ
4.	IIII	14.	ΔIIII	50.	[Δ]
5.	Π	15.	ΔΠ	60.	[Δ]Δ
6.	ΠI	16.	ΔΠI	70.	[Δ]ΔΔ
7.	ΠII	17.	ΔΠII	80.	[Δ]ΔΔΔ
8.	ΠIII	18.	ΔΠIII	90.	[Δ]ΔΔΔΔ
9.	ΠIIII	19.	ΔΠIIII	100.	H
10.	Δ	20.	ΔΔ		

28) Opera T. 1. p. 44. Ob aber die Geſtalt der beiden Spiritus ⊣ und ⊢, die ſich in Manuſcripten und noch in alten Ausgaben findet (z. B. in der Baſeler Ausg. von Ptolemäus *Σύνταξις*), eine Zertheilung des alten Zeichens H in zwei Hälften iſt, wie Wallis vermuthet, muß wohl dahingeſtellt bleiben.

29) Palaeogr. p. 129. Olim vero, ut videas infra, pro aspiratione tantum usu veniebat; atque ε tam correptum quam extensum, per E expressum observatur in Jonicis inscriptionibus. Vergl. die Inſchriften p. 135 HOIΔE für *οἵδε*, HO für *ὅ*, HOΔOI für *ὁδῷ*, HEPOΔO für *Ἡρώδου*, HOI für *οἱ*, u. ſ. w.

Digitized by Google

200.	HH	1000.	X
300.	HHH	2000.	XX u. s. w.
400.	HHHH	5000.	[X]
500.	[H]	6000.	[X]X u. s. w.
600.	[H]H	10000.	M
700.	[H]HH	20000.	MM u. s. w.
800.	[H]HHH	50000.	[M]
900.	[H]HHHH	60000.	[M]M u. s. w.

Diese Methode findet sich übrigens originaliter nicht mehr vor, und die Nachricht bei Herodian ist die einzige, die wir davon haben.

Ob die Römer ihre Schrift von den Griechen, oder unmittelbar aus dem Orient erhalten haben, mag zweifelhaft scheinen. Das Vorhandensein der Buchstaben **H** = ח (nicht ה), **V** und **F** = ו, **Q** = ק [30]), von denen der erste bei den Griechen Vocal geworden ist, die beiden andern sich aber nur als numerische Episema erhalten haben, scheint für das letztere zu sprechen. Oder die Übertragung des Griechischen

30) Was Wallis T. 1. p. 45 sagt, daß das Zeichen **Q** aus **Cv** zusammengeschmolzen sei, worauf die in manchen Drucken sich vorfindende Form Q hinzudeuten scheint, gleichwie **K** aus **CA**, ist gewiß historisch unwahr. Der sprechendste Beweis gegen diese Entstehung des **Q** ist der, daß das die dem **Koph** (ק) entsprechende rauhe Aussprache desselben andeutende **u** immer dahinter gesetzt wird, also doppelt da sein würde, wenn es schon einmal in dem Zeichen **Q** selbst steckte. **K** dagegen ist gar kein echt lateinischer Buchstabe, sondern der wahre Stellvertreter des Semitischen **Kaph** und des Griechischen κάππα ist das Zeichen **C**, durch welches die Römer nicht, wie Wallis a. a. O. p. 42 behauptet, das Griechische γάμμα ausdrückten. (**Pro nonaginta vero ponitur** ϟ G **unde figura latinorum** G **vel G deducta est** (?), **antiquis latinis ignota** (?) **qui Graecorum** γ **per C exprimebant**). Die Reihenfolge des Römischen Alphabets kann hier, glaube ich, nichts entscheiden; denn sonst müßte auch **g** dem Semitischen ז, Griechisch ζ u. s. w. entsprechen. **K** hat sich ebenso wie **Y** erst später durch Bekanntschaft mit den Griechen in die Reihe der Lateinischen Buchstaben eingeschlichen, und Schreibarten wie **Klendas** für **Calendas**, **Krthago** für **Carthago** beweisen nichts für ein in dem **K** verstecktes **a**; was wollte man sonst daraus für Schlüsse machen, daß die Worte κύριος ὁ θεὸς Ἰσραὴλ in dem von Montfaucon Pal. p. 224 mitgetheilten Fragmente so aussehen $\overline{\text{KC}}$ O $\overline{\text{ΘC}}$ $\overline{\text{ΓΗΛ}}$. Etwas mehr hat die Hypothese für sich daß **X** eine Verschlingung von **CS** sei; aber auch diese Annahme ist unnöthig; **X** kann ebensowohl, wie das Griechische Ξ eine unmittelbare Verhärtung des einfachen Semitischen Zischlauts sein; wie es sich umgekehrt im Italienischen wieder zu **S** erweicht. Vergl. über **K** und **Q**, **Prisciani de partibus orationis I, 3.**

Digitized by Google

Alphabets nach Italien muß zu einer Zeit geſchehen ſein, als die Griechen ſelbſt es noch ganz unverändert in ſeiner Semitiſchen Urgeſtalt bewahrt, und es noch nicht ihrem Sprachcharakter durch Verwandlung und Vernachläſſigung einiger, und Hinzufügung anderer Buchſtaben anbequemt hatten; nur ſo wäre das Vorhandenſein des h, v, (f), q, und das Fehlen von φ, χ, ψ, ω im Lateiniſchen erklärbar [31]). Wie dem auch ſei, ſo viel iſt als Thatſache gewiß, daß das Semitiſch-Griechiſche Alphabet auf ſeinem Übergange nach Italien die numeriſche Bedeutung ſeiner Buchſtaben verloren hat. Es findet ſich bei den Römern keine Spur von der Semitiſch-Griechiſchen Zahlenbezeichnung vor, wogegen ſie ſich eines eigenthümlichen, wahrſcheinlich in Italien urſprünglich heimiſchen, aber in vielen Stücken unvollkommenen Syſtems bedienen, eines Syſtems, das trotz ſeiner ungeheuren Mängel und ſeiner ekelhaften Weitſchweifigkeit und Unbequemlichkeit, zumal wenn es gilt größere Zahlen zu bezeichnen, ſich doch bis auf den heutigen Tag zu gewiſſen Zwecken in ganz Europa erhalten hat. Es kommt von allen bekannten Zahlenſyſtemen der Methode der ganz rohen additiven Nebeneinanderſtellung am nächſten, und iſt dem von Herodian überlieferten altgriechiſchen Syſteme nahe verwandt, wenn gleich in manchen Stücken noch unvollkommener. Mit urſprünglich vier, ſpäter ſieben Zeichen, indem man in das dekadiſche Syſtem zur Vermeidung neunmaliger Wiederholung deſſelben Zeichens das pentadiſche einſchob, ſetzt es alle Zahlen durch Addition und Subtraction zuſammen. Es iſt unnöthig, daß ich mich in eine weitläuftige Erörterung dieſes uns Allen bekannten und geläufigen Syſtems einlaſſe. Ich will ſtatt deſſen verſuchen eine Erklärung der Zeichen zu geben, in denen dieſes Syſtem ſich darſtellt, oder vielmehr eine ſchon oft berührte in voller Conſequenz durchführen. Die Zeichen **C** für hundert, **centum**, und **M** für tauſend, **mille**, haben oft zu der Vermuthung veranlaßt, als ob die Zeichen dieſes Syſtems, deren jedes in dem gewöhnlichen Schriftzuge einem Buchſtaben des Römiſchen Alphabets entſpricht, bedeutſame Anfangs-

31) Θ, 𐤅 iſt vielleicht in **F** erhalten, wenn dieſes nicht gleich dem Griechiſchen φ eine Modification des p, פ iſt, welches ja auch im Semitiſchen beide Ausſprachen zuläßt. Auf keinen Fall aber verdankt das **F** dem φ ſeinen Urſprung; denn dann würden die Römer nicht letzteres ſo conſequent durch ph übertragen. Eher iſt **F** neben **V** ein Überbleibſel des Semitiſchen Vâv, ו, wofür ſeine Stellung im Alphabete zu ſprechen ſcheint.

Digitized by Google

buchſtaben wären, und es ſind manche wunderbare Hypotheſen über die Bedeutung derjenigen Buchſtaben, welche ſich nicht ſo unmittelbar wie die beiden angeführten mit dem entſprechenden Zahlworte in Verbindung ſetzen, erſonnen worden. So ſollten z. B. die Zeichen **V** = 5 und **X** = 10 daher ihren Urſprung haben, weil **V** oder **U** der fünfte Vocal des Lateiniſchen und **X** oder Ξ der zehnte Conſonant des Griechiſchen Alphabets iſt; oder auch **X** folgt in der Reihe der Zahlen nach **V**, weil es auch in der Reihe der Buchſtaben dieſem folgt. **D** = 500 ſollte der Anfangsbuchſtabe von **Dimidium** ſein, um anzuzeigen, daß die Zahl **D** die Hälfte der Zahl **M** ſei, da doch dieſe Ableitung vernünftiger Weiſe bloß ſagen könnte, daß 500 die Hälfte von irgend etwas ſei, alſo danach das Zeichen **D** für jede beliebige Zahl ebenſo gut wie für 500 paſſen würde; oder **D** ſoll auch deshalb gewählt worden ſein, weil es auf **C** folgt. **L**, 50 ſollte ſeinen Urſprung daher leiten, daß **N** im Griechiſchen Zahlenſyſtem 50 bedeutet, und daß dieſer Buchſtabe in einigen aus dem Griechiſchen ins Lateiniſche herübergenommenen Worten (?) in der letztern Sprache in **L** übergeht, z. B. νύμφη, **limfa**. Ja ſelbſt dem einfachen Striche **I** der Einheit hat man dieſe Einfachheit nicht gegönnt; er mußte das **i** des ſeines Anfangsbuchſtaben beraubten Griechiſchen Worts μία, **una**, ſein. **Una per i scribitur antiquo more Atticorum, qui solebant principalem nominis numeri litteram ponere, et significare numerum; ergo ἴα pro μία dicentes i scribebant** [32]). Ich würde vorſchlagen, das Zeichen **I** lieber aus dem Arabiſchen abzuleiten, wo **eins** أحد heißt, in welchem Worte doch wenigſtens der **erſte** Buchſtabe Ähnlichkeit mit **I** hat. Ich glaube, es geht dem Leſer an dieſer Stelle, wie oben bei dem Excerpte, welches ich aus der **Histoire de l'esprit humain par Savérien** mittheilte; man ſchlägt zuletzt der Sicherheit wegen Mannert's Geographie auf, um nachzuſehen, in welchem Griechiſchen Staate vor Zeiten die Stadt Rom gelegen hat. Andere haben die Figuren von der Geſtalt der Finger und Hände herleiten wollen. Aber wir wollen alle dieſe Künſteleien verlaſſen. Die einfache und naturgemäße Erklärung hat meines Wiſſens zuerſt Ramus [33]), und

32) **Priscianus de ponderibus et mensuris** am Anfange. Vergl. **Hugo de prima scribendi origine** (ed. Trotz. Trajecti 1738) p. 301.

33) **Scholae mathemat. p. 117.**

Digitized by Google

etwas vollständiger Voſſius [34]) berührt; Ramus macht ſich die Bedeutung und Entſtehung des Zeichens M nicht klar, leitet aber das D richtig aus M ab; Voſſius dagegen verläßt ſchon bei D das Syſtem, und vermengt das pentadiſche Zeichen als ein urſprüngliches mit dem dekadiſchen. Ramus iſt, wie in andern Stücken, ſo auch hierin, unbeachtet geblieben; Voſſius Erklärung iſt dagegen bald mit mehr, bald mit weniger Conſequenz in ſpätere Werke übergegangen [35]). Die Sache ſtellt ſich ganz einfach ſo heraus. Man legte das rein dekadiſche Syſtem zum Grunde, und bezeichnete eins mit einem Striche, I, zehn mit zweien im Kreuz, X, hundert mit dreien, ſo ⊏, denen man für die folgende Potenz von zehn, für tauſend, noch in der Mitte einen parallelen Strich hinzufügte, und dann das Zeichen, vielleicht ſpäter, halb umwandte, ⋒. Die Zeichen für eins und zehn haben ſich in ihrer urſprünglichen Geſtalt erhalten, weil ſie einfach und leicht zu ſchreiben ſind, wogegen man die beiden andern der Bequemlichkeit wegen, vielleicht erſt allmählig, abrundete, ſo daß aus ⊏ das Zeichen C und aus ⋒ theils die runderen Formen ↀ, ↀↀ, CIↃ, entſtanden, theils durch Verwechſelung, nachdem das Bewußtſein der Entſtehung der Zeichen verloren gegangen war, der äußern Ähnlichkeit wegen für daſſelbe der Buchſtabe m, M ſubſtituirt ward. Da man aber ſpäterhin bei häufiger werdendem Gebrauche der Zahlzeichen die Rechnung mit vier Zeichen unbequem fand, ſo kam man auf den Gedanken, in der Mitte zwiſchen je zwei dieſer dekadiſchen Zeichen ein pentadiſches einzuſchieben, und um die Geltung eines jeden derſelben auch ſchon durch die Form anzudeuten, nahm man von den Zeichen X, ⊏, ⋒ oder CIↃ die Hälften, ſo daß V (oder bei den Tuskern A) fünf, d. h. halb X, L funfzig oder halb ⊏ und IↃ fünfhundert oder halb CIↃ bedeutete. Dieſe letzten Zeichen ſind dann mit den ähnlichen Buchſtaben V, L, D aus Unkunde verwechſelt worden, und das gewiß ſchon frühe, da, wie wir geſehen haben, zu Priscian's Zeit das Bewußtſein derſelben ſchon aus dem Volke, ſelbſt aus den Köpfen der Gelehrten verſchwunden war. Demnach iſt die Römiſche Zahlenreihe eine doppelte,

dekadiſch I X ⊏ (C) CIↃ
dazwiſchen pentadiſch V L IↃ

34) De universae mathes. natura et constit. Amst. 1650. Cap. VIII. §. 4.

35) Z. B. Dechales Cursus T. 1. p. 28.

Digitized by Google

Dieſe Deutung iſt ſo ungeheuer einfach und ungezwungen und mit einer ſolchen Conſequenz in ſich abgeſchloſſen, daß man kaum begreift, wie irgend eine andere ſich hat herausbilden können. Das aber iſt eben das Schickſal des Einfachen, daß es gewöhnlich am ſpäteſten gefunden wird. Der verbildete, vom Wege der Natur abgeirrte Geiſt hat kein Wohlgefallen an dem, was ſich als natürlich und einfach von ſelbſt darbietet; er will den Gegenſtand ſeines Wohlgefallens durch ſpitzfindiges Grübeln ſich erkaufen, und je ferner derſelbe liegt, je mühſamer der Weg dahin iſt, deſto willkommener iſt ihm das Reſultat. — Späterhin bildete man den Zeichen CIↃ und IↃ analog die Formen CCIↃↃ, CCCIↃↃↃ u. ſ. w. für 10000, 100000, und deren Hälften IↃↃ, IↃↃↃ u. ſ. w. für 5000, 50000. Doch ſind dieſe Zeichen wenig in den Gebrauch gekommen. Man bildete die höhern Potenzen von zehn, gleichwie die übrigen Vielfachen von tauſend lieber durch multiplicative Coefficienten, die man dem Zeichen CIↃ oder M vorſetzte, ſo daß VM 5000, XM 10000, LM 50000, CM 100000 bedeutete, wobei freilich immer die Zweideutigkeit obwaltete, daß das vor M ſtehende Zeichen auch vielleicht ſubtractiven Werth haben konnte. MM aber und MMM u. ſ. w. bedeuten immer 2000, 3000, ſo daß alſo die Wiederholung deſſelben Zeichens ſeine urſprüngliche additive Bedeutung beibehält. Mehre Beiſpiele dieſer multiplicativen Methode finden wir bei Plinius, der z. B. LXXXIII.M, XCII.M, CX.M für 63000, 92000, 110000 ſchreibt [36]). Wenn die Stellen der Hunderte und Einer auch ausgefüllt ſind, ſo wird bei den Römern, ähnlich wie bei Diophant, das Zeichen M auch wohl ausgelaſſen, und ein Punct zwiſchen den Tauſenden und den folgenden niedrigeren Zahlen vertritt ſeine Stelle. So leſen wir bei Plinius DCC.XXVII für 700027 [37]), dagegen habe ich das Beiſpiel, welches Heilbronner aus demſelben Capitel citirt, und in welchem durch einen doppelten Proceß der Art die Zahl 1620829 durch XVI.XX.DCCCXXIX ausgedrückt ſein ſoll, nicht finden können [38]). Auch wird der tauſendfache Werth einer Zahl

36) Plinius hist. nat. VII, 26. XXXIII, 3. IV, praef.

37) ib. XXXIII, 3. In dem Texte der Ausgabe Sigismundi Feyerabenii. Francof. ad M. 1582. fol. ſteht, wie ich geſchrieben habe DCC.XXVII, welches einfach 727 ſein könnte. Aber eine Randgloſſe ſagt, Budäus habe in alten Manuſcripten geſehen DCC.M.XXVII.

38) Heilbronner. hist. mathem. p. 733. „Plinius XXXIII, 3 auri

Digitized by Google

durch einen Horizontalstrich über derselben angedeutet; Heilbronner am angeführten Orte führt aus Aelius Lampridius das Beispiel an: **$\overline{\text{CXX}}$ equitum Persarum fudimus et mox $\overline{\text{X}}$ in bello interemimus**, wo die Zahlen 120000 und 10000 bedeuten sollen. Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Zahlen bei Plinius im 23. und 24. Capitel des sechsten Buchs, welche einen Stellenwerth der Ziffern auszudrücken scheinen, so daß **$\overline{\text{XIX}}$.L. mill. passuum 1950000, $\overline{\text{XIII}}$.XXXII. M. p. 1332000, $\overline{\text{XI}}$.XXV. mill. 1125000** bedeutet; hier multiplicirt der Strich nicht mit tausend, sondern mit hundert. Ich muß aber gestehen, daß ich über diese Zahlen nicht ganz im Klaren bin [39]).

Allen diesen hier erörterten Systemen liegt also das Decimalsystem zum Grunde, welches in dem Semitisch-Griechischen sich rein erhalten hat, in dem Römischen aber und in dem altgriechischen des Herodian von dem pentadischen System durchdrungen ist. Daraus geht hervor, wie unpassend und wie wenig bezeichnend für unser heutiges Indisch-Arabisches Zahlensystem die Benennung des Decimalsystems ist, und wie wenig dieser Name den unterscheidenden Charakter dieses Systems ausdrückt. Das charakteristische Merkmal unseres Systems besteht vielmehr in folgenden zwei Puncten:

1. Die neun Zeichen für die neun ersten Zahlen haben eine doppelte Bedeutung, eine absolute, der zufolge sie jene neun Einheiten selbst, und eine relative, vermöge welcher sie, durch ihre Stellung in der Zahlenreihe bedingt, die Producte jener Einheiten in irgend eine Potenz von zehn bedeuten.
2. Dieses System bedarf vermöge seiner Natur, eben um den Stellenwerth, auf den hier alles ankommt, in jedem einzelnen Falle genau zu bezeichnen, eines Zeichens, welches andeutet, daß in der Zahlenreihe diese oder jene Potenz von zehn übersprungen ist.

Dieses Zeichen ist dem Semitisch-Griechischen System fremd, weil es eigene Zeichen für die Multipla der Potenzen von zehn hat, und das Nichtvorhandensein eines solchen Multiplums zur völligen Deutlichkeit des Ausdrucks hinreicht. Und doch haben die Griechen

---

XVI.XX.DCCCXXIX, ut Budaeus l. II. de Asse ex antiquo exemplari legit; est 1620829, leg. sedecies centena et viginti millia octingenta viginti novem.

39) Vergl. Humboldt a. a. O. S. 225 Note [a]).

Digitized by Google

eines ähnlichen Zeichens nicht ganz entbehren können oder mögen. Vielmehr kennt Ptolemäus dasselbe, indem er bei Angaben von Graden, Minuten und Secunden das Fehlen einer dieser drei Stufen durch ein unserer Null ähnliches Zeichen, ō, andeutet. Ja Ptolemäus hätte vielleicht das System mit Stellenwerth erfunden, wenn er den Grad statt in sechzig, in zehn Minuten, die Minute in zehn Secunden u. s. w. getheilt hätte, so daß er statt 15° 7′ 4″ ohne Apices für Grade und Minuten 1574″ hätte schreiben können. Bei seiner Eintheilung in sechzig Theile aber hätte er zu dieser abgekürzten Schreibart verschiedene Zeichen für neun und funfzig Einheiten haben müssen, um zweistellige Überglieder zu vermeiden, welche die Andeutung und Absonderung von einander durch Apices nöthig machten.

Aber es ist bis auf diesen Tag noch gar nicht so unumstößlich bewiesen, daß den Griechen unser Zahlensystem mit Stellenwerth der Ziffern ganz unbekannt gewesen ist. Zwar finden wir, so sehr auch der Scharfsinn Archimed's und Apollonius, wie wir weiter unten sehen werden, sich dieser großen und wichtigen Entdeckung genähert hat, keinen einzigen Griechischen Mathematiker, in dessen Schriften dieser letzte Schritt wirklich gemacht wäre. Aber eine lange unbemerkt oder unverstanden gebliebene, in neuerer Zeit aber oft besprochene und gewisser Maaßen berühmt gewordene Stelle in der Geometrie des Boethius schreibt in etwas dunklen, aber gar nicht mehr zweifelhaften Worten die Kenntniß und den Gebrauch des Zahlensystems mit Stellenwerth den Pythagoräern zu. Leider habe ich mich bis jetzt vergebens bemüht, ein Exemplar von Boethius Geometrie zu Gesichte zu bekommen; ich kann mich hier also nur an das halten, was Mannert [40]) und Chasles [41]) darüber gesagt haben. Nachdem nämlich Boethius die Ausdrücke der Alten, (die sich übrigens auch noch bei den Neuern ziemlich lange erhalten haben), digiti für die neun Einheiten, articuli für die Multipla derselben in zehn und dessen Potenzen, auch limites genannt, und numeri compositi für alle Zahlen, die weder digiti noch articuli oder limites sind [42]),

40) De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine Pythagorica. Norimb. 1801. 8.

41) Geschichte der Geometrie, übers. v. Sohncke. S. 526—540.

42) Entsetzlich mißverstanden ist diese Stelle von Huet (Demonstr. evang. prop. IV. p. 295. Aliam quoque per manus et digitos et digitorum (!!) articulos numerandi rationem a Graecis acceptam Romani usurparunt.

Digitized by Google

erklärt hat, fährt er so fort [43]): „Pitagorici vero, ne in multiplicationibus et participationibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris, mensam Pitagoream nominabant, quia hoc, quod depinxerant, magistro praemonstrante cognoverant. A posterioribus appellabatur abacus, ut, quod alta mente conceperant, melius, si quasi videndo ostenderent, in notitiam omnium transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant." (Es folgt die Figur des Abacus). „Superius vero digestae descriptionis formula hoc modo utebantur. Habebant enim diverse formatos apices vel caracteres. Quidam enim hujuscemodi apicum notas sibi conscripserant, ut haec notula responderet unitati, 1. Jsta autem binario, 2. Tertia vero tribus, 3. Quarta vero quaternario, 4. Haec autem quinque asscriberetur, 5. Jsta autem senario, 6. Septima autem septenario convenivet, 7. Haec vero octo, 8. Jsta autem novenario jungeretur, 9 [44]). Quidam vero in hujus formae descriptione literas alfabeti sibi assumebant hoc pacto, ut litera, quae esset prima, unitati, secunda binario, tertia ternario, caeteraeque in ordine naturali numero responderent naturali. Alii autem in hujusmodi opus apices naturali numero insignitos et inscriptos tantummodo sortiti sunt. Hos enim apices ita varie ceu pulverem dispergere in multiplicando et in dividendo consuerunt, ut si sub unitate naturalis numeri ordinem jam dictos caracteres adjungendo locarent, non alii quam digiti nascerentur." (Hier bricht Mannert ab; ich gebe die Fortsetzung nach Chasles S. 534 der deutschen Übersetzung): „Wenn man die erste Zahl, d. h. zwei (denn die Einheit ist, wie in der Arithmetik gesagt wurde, nicht selbst eine Zahl, sondern der Ursprung und das Fundament der Zahlen), wenn man also zwei unter die Linie, die mit der Zehn bezeichnet war, stellte, so kam man darin überein, daß sie zwanzig bedeutete; die Drei dreißig, die Vier vierzig; und den andern folgenden Zahlen gab man die Bedeutung, welche aus ihrer eigenthümlichen Benennung folgte. — Wenn man dieselben apices

43) Mannert l. l. p. 8—10. Chasles S. 530—537.

44) Ich habe hier unsere Ziffern gebraucht; die Zeichen, die sich bei Boethius finden, werde ich unten in ihrer wahren Gestalt geben.

Digitized by Google

unter die Linie, welche mit Hundert bezeichnet war, ſtellte, ſo ſetzte man feſt, daß 2 zweihundert bedeutete, 3 dreihundert, 4 vierhundert, und daß die andern den andern Benennungen entſprächen. Und ſo weiter fort in den folgenden Columnen. Dieſes Syſtem war keinem Irrthum unterworfen [45]).“

Zunächſt einiges zur Literatur dieſer Stelle. In den gedruckten Ausgaben von Boethius Geometrie iſt die Stelle dadurch entſtellt, daß anſtatt der von Boethius beſchriebenen Tabelle ſich die gewöhnliche Multiplicationstafel befindet, welche auf Auctorität dieſer Stelle ſehr mit Unrecht den Namen des Abacus Pythagoricus erhalten hat. Die wahre Darſtellung der von Boethius beſchriebenen Tafel iſt aus zwei, wie es ſcheint, aus dem elften Jahrhundert herrührenden Manuſcripten entnommen, deren eines auf der Bibliothek zu Altdorf [46]), das andere zu Chartres [47]) befindlich iſt. Die erſte Andeutung auf ein richtiges Verſtändniß dieſer Stelle ſcheint ſich in Theodor Tzwivel's Arithmetice opuscula duo. 4. (unter der Dedication: Monasterii, am Ende des Buchs 1507) zu finden; es heißt darin: characteres sive numerorum apices a divo Severino Boethio nuncupantur. Und auf dem Titel ſteht: De utilitate hujus libelli Tetrastichon ioannis Murmellii Ruremundensis.

Si quis arithmetices optat cognoscere praxin,
Pythagore numeros discere si quis amat
Scire mathematicen si vult. Si denique quicquam
De sophia, hunc modicum comparet ere librum [48]).

Deutlicher und beſtimmter hat die vorliegende auf unſer Ziffer-

45) Deſſelben Inhalts iſt eine Stelle am Ende des zweiten Buchs dieſer Geometrie, welche bei Chasles S. 537 ſo lautet: „Bei der Bildung des obigen Tableau's bedienten ſie (die Alten) ſich Characteren von verſchiedener Art und verſchiedener Form. Wir aber bedienen uns in jedem Werke dieſer Gattung nicht anderer, als derer, welche wir bei der Conſtruction des Abacus bezeichnet haben. Wir haben die erſte Linie dieſes Tableau's den Einern zuertheilt, die zweite den Zehnern, die dritte den Hunderten, die vierte den Tauſenden und endlich die anderen Linien den limites der andern Zahlen. Wenn man apices in die erſte Linie ſetzt, ſo werden ſie Einer darſtellen, in der zweiten Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tauſende u. ſ. w. f. in den andern.“

46) Mannert l. l. p. 6.

47) Chasles S. 531.

48) Ich habe das Buch nicht geſehen, ſondern theile dieſe Data aus Käſtner's Geſch. d. Mathem. Th. 1. S. 82—84 mit.

Digitized by Google

ſyſtem bezogen Iſaak Voſſius in ſeiner Ausgabe des Pomponius Mela [49]), wo er in einer Note zu dem zwölften Capitel des erſten Buchs ſo ſagt: Manifeste literae hic pro numeris accipiuntur, quemadmodum saepe quoque alias. Notum enim apud omnes gentes ante quam cifrae quas vocamus essent repertae, literas pro numeris in usu fuisse. Nec tamen adeo recens est cifrarum usus, atque plerique existimant. Illae ipsae notae, quibus nunc utimur, exstant quoque in notis Senecae et Tyronis, multo vero clarius apud Boethium in elementis Geometricis, ubi Pythagoricis inventionem earum tribuit. Verum ut id non sit, neutiquam tamen dubitandum, quin antiquissimis etiam Graecis et Romanis cognitae fuerint, ac ab iis praecipue usurpatae, qui compendiarum scribendi genus sectabantur. Hinc adparet toto coelo errare illos, qui ab Indis aut Arabibus notulas has fluxisse existimant. Nullum Arabum monumentum literarium exstat, quod vel Boethii aetatem aequet, ne dicam Senecae et Tyronis. Manifestum est ituque Arabes signa ista numeralia a Graecis hausisse, Indos vero ab Arabibus. Huc accedit quod forma cifrarum in libris Arabum et Indorum plane conveniat cum illa, quae in antiquissimis Graecorum Latinorumque monumentis comparet. Die Schlüſſe ſind zu übereilt und nur durch Mangel an Sachkenntniß zu entſchuldigen. Die letzte Bemerkung iſt unrichtig, und das um ſo mehr, da ſelbſt die Indiſchen und die Arabiſchen Ziffern wenig Ähnlichkeit mit einander haben. — Der zweite, der über dieſen Gegenſtand weitläuftiger geſprochen hat, iſt Huet, von dem ich folgende in mancher Beziehung merkwürdige Stelle hier mittheile [50]): Mutationis hujusmodi praeclarum extat exemplum in notis numerorum, quibus hodie uti solemus. Ab Arabibus, vel ab Indis inventas esse, non vulgus eruditorum modo, sed doctissimi quique ad hanc diem arbitrati sunt. Ego vero falsum id esse, merosque esse Graecorum characteres ajo, a librariis Graecae linguae ignaris interpolatos, et diuturna scribendi consuetudine corruptos. Nam primum, 1, apex fuit seu vir-

49) Pomponii Melae libri tres de situ orbis, cum observationibus Isaaci Vossii. Hagae. 1658. Ed. secunda. Franekerae. 1700. 12.

50) Demonstratio Evangelica ad seren. Delphinum. 1681. 4. Ich habe die Ed. quarta. 1694. 4. in Händen. Daſelbſt p. 294—297.

Digitized by

gula, nota μονάδος. 2, est ipsum β, extremis suis truncatum. γ, si in sinistram partem inclinaveris et cauda mutilaveris, et sinistrum cornu sinistrorsum flexeris, fiet 3. Res ipsa loquitas, 4, ipsissimum esse Δ, cujus crus sinistrum erigitur κατὰ κάθετον, et infra basim descendit; basis vero ipsa ultra crus producta eminet. Vides quam 5 similis sit τῷ ε; infimo tantum semicirculo, qui sinistrorsum patebat, dextrorsum converso. Ἐπίσημον βαῦ, quod ita notabatur, ϛ, rotundato ventre, pede detracto, peperit τὸ 6. Ex Z basi sua multato, ortum est τὸ 7. Si H inflexis introrsum apicibus in rotundiorem et commodiorem formam mutaveris, exurget τὸ 8. At 9 ipsissimum est Ϡ. Zero, punctum primo videtur fuisse, ad decuplicem praecedentis notae valorem designandum apponi solitum: quod ut magis appareret, insigniusque fieret et crassius, circumducto in circulum calamo spatium inane, properantia primum, deinde consuetudine relictum est. Hinc Arabes et Persae notam hanc, non circuli tantum figura, sed puncto etiam crassiore exprimunt; quam et צפר appellant; unde vocabulum Cifra, quod vulgus ab Ebraica radice ספר derivat. Ad hanc notarum similitudinem si advertetur animus, dubium omne tolletur. Sententiam nostram unice confirmat, quod scripsit eruditissimus Vossius in Melam, se notas illas vulgares deprehendisse in Codice manuscripto Geometricorum Boetii, et in Notis Senecae et Tyronis. Unde recte concludit, vetustiores esse ac vulgo creditur. Ergo Arabicae non sunt: nisi quis putet Senecae et Boetii temporibus Arabicas literas Romae fuisse usitatas. At nos non hac solum aetate vetustiores esse dicimus vulgares numerandi notas, sed plane ipsa esse elementa Graecorum: quae Senecae et Boetii aetate ita jam a nativa forma degenerarverant frequenti calculorum Pythagoricorum usu, ut nec a Boetio agnita sint. Putavit enim conficta fuisse a Pythagoricis, quae ab iis fuerant corrupta. Subjicit deinde literas quoque Alphabeti ab iisdem fuisse in numerando ascitas. Quod de literis Romanis dici non potuit, quippe quae ad operationes arithmeticas ineptae sint. Ergo Pythagorici literas easdem, vel integras nativa forma calculis suis adhibebant, vel adulteratas et corruptas. Neque notas solum, sed et decuplam progressionem numerorum Arabes a Graecis mutuati sunt.

Digitized by Google

sunt. Non enim putandum est peculiare quippiam inesse progressioni huic, quamobrem alia ascisci non potuerit; vel ita pervulgatam fuisse, ut nullam aliam usurpare potuerint. Duodecupla progressio longe utilior est decupla; nam plures recipit partitiones duodenarius numerus, quam denarius. . . . . Cum ipsa ergo numerandi scientia, aliisque doctrinis, arithmeticas quoque notas a Graecis acceperant Arabes, et ut Graecanicae scripturae insueti erant, deformarunt: quas cum ita vitiatas sparsissent per orbem, earum auctores a plerisque habiti sunt, qui corruptores erant. Quidam acceptas retulerunt Indis, qui eas perinde ut occidentis incolae ab Arabibus habuerunt. In ea sunt opinione ipsi quoque Arabes; ultro agnoscentes sibi non deberi notarum illarum inventione, sed falsi in vera earum assignanda origine . . . . Et mirum sane est notarum illarum inventionem tribui Arabibus, quam exoticam esse Arabes ipsi fatentur. Viderunt quidem suas non esse; at cujates essent, pervidere non potuerunt, Indicasque putarunt esse, quae Graecae erant. Descriptionem Abaci Pythagorici ex veteri codice Geometricorum Boetii misit ad me doctissimus Graevius, elegantiorum Musarum pater; cujusmodi codice usum se ait Vossius in Melam. Multum vero ab editione typis impressa discrepat ista descriptio: non solum quoad formam notarum arithmeticarum, quae nostrarum vulgarium persimiles sunt, sed etiam quoad collocationem illarum atque situm: nam a dextra progrediuntur ad sinistram; cum e contrario in libro typis descripto a sinistra procedant ad dextram. Nec id factum putes, quod literae Arabicae sint, et Arabico more collocatae; sed quod minoris valoris numeri collocari soleant ad dextram, majoris ad sinistram. Itaque vulgarem numerorum collocandorum morem retinuit librarius ille; cum libri Boetii editi vulgarem nostram scribendi rationem secuti sint. Praeterea in codice illo manu scripto ad notas arithmeticas apposita sunt vocabula quaedam, quorum nonnulla originem Ebraicam praeferunt: puta quaternarius appellatur *Arbas*, quod est ארבע: quinarius *Quimas*, quod est חמש: septenarius *xenis*, fortasse *xevis*, quod est שבע: octonarius, *Temenias*, quod merum est Chaldaicum תמניא, factum ex Ebraico שמנה. Addita autem suspicor haec vocabula a librario, in gratiam Orientalium; cum codicem for-

Bayerische Staatsbibliothek München

Digitized by Google

tasse descripserit eo tempore, quo literae Arabicae florebant. Wenn man ein Beiſpiel dafür haben will, wie Jemand einer einmal aufgefaßten Hypotheſe Alles opfert und anpaßt, ſo kann man kein treffenderes wählen, als dieſe Worte Huet's. Ich überlaſſe dem Leſer die ſpecielle Kritik dieſer Stelle und gehe weiter. Nach Huet hat J. F. Weidler in zwei Diſſertationen [51]) auf Grund der obigen Stelle bei Boethius ſich für den Griechiſchen Urſprung unſeres Ziffernſyſtems entſchieden. Was aber Mannert [52]), nachdem er die erſte Abhandlung Weidler's erwähnt, mit folgenden Worten ſagen will, weiß ich in der That nicht: „Quo minus argumenta ejus assensu, qui veritati debetur, acciperentur, impedimento praecipue fuit Wallisius Anglus, qui in elementis arithmeticae 1742 editis longe alia via ingrediens affirmare non dubitabat, numerorum figuras, quas Arabicas appellamus, in nullo antiquo nec Boethii nec alius latini autoris codice deprehendi, illatas posterius esse a seculi XIV^ti et XV^ti libros transscribentibus; assertionis veritatem sese volenti e libris manu exaratis bibliothecae Bodlejanae etc. evincere posse. Weidlerus adversarii verbis haud deterritus secundam prelo subjecit dissertationem, quae suam novis rationibus roboraret sententiam." Mir iſt nur ein Weidler und nur ein Wallis bekannt, von denen hier die Rede ſein könnte. Zwar drückt Mannert ſich in Betreff des Erſteren ganz unbeſtimmt aus und nennt nicht einmal ſeine beiden Diſſertationen bei ihren Titeln; es kann aber kein anderer gemeint ſein, als Johann Friedrich Weidler, Profeſſor zu Wittenberg (Professor Wittenberg. nennt ihn Mannert), der Verfaſſer der bekannten historia astronomiae, und der beiden in der Note 51. genannten Diſſertationen, von denen die erſtere im Jahre 1727 erſchienen iſt. Wallis aber, der berühmte Engliſche Mathematiker, der wirklich an mehr als einer Stelle ſeiner Algebra ſich ganz beſtimmt und unbedingt für den Indiſch-Arabiſchen Urſprung unſers Ziffernſyſtems ausſpricht [53]), war bereits im Jahre

51) De characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus. Viteb. 1727. — Spicilegium observationum ad historiam notarum numeralium pertinentium. Viteb. 1755. Ich habe beide Schriften nicht erhalten können.

52) S. die angeführte Diſſertation S. 5.

53) Vergl. Opera T. II. p. 4. 10. 11. 15 und noch ſehr oft. Wallis

Digitized by Google

1703 gestorben, konnte also unmöglich 1742 in seinen Elementis arithmeticae der Ansicht Weidler's störend entgegentreten. Ich weiß nicht, was dem gelehrten Historiker hier vorgeschwebt hat. Denn abgesehen davon, daß kein Werk von Wallis den von Mannert angeführten Titel hat, und dieser nur dessen Mathesis universalis seu arithmeticum opus integrum oder den Tractatus de Algebra gemeint haben kann, von denen aber das erste schon im Jahre 1657, das zweite 1685 zuerst erschien, so ist kein einziges Werk von Wallis später als im Jahre 1699, in welchem Jahre der dritte Band seiner auf Kosten der Oxforder Universität gedruckten Werke herauskam, wieder gedruckt worden [54]). Mannert muß sich hier auf irgend eine Weise versehen haben, und wir haben hier wieder einmal ein Beispiel von den traurigen Folgen unbestimmter Citate vor Augen. Übrigens mag es wahr sein, daß die Auctorität der vielgelesenen Werke Wallis ein Hinderniß für das Aufkeimen der von Weidler aufgestellten Ansicht gewesen ist. Nachdem auch Montucla [55]) diesen

---

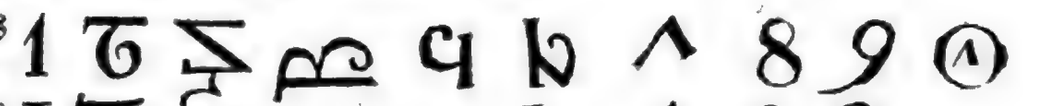
fügt fast bei jeder Gelegenheit, wo er der Ziffern erwähnt, hinzu, daß dieselben Indischen Ursprungs seien.

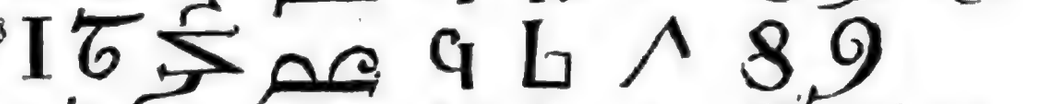
54) In Rogg's Handbuch der math. Lit. finde ich noch folgende Werke von J. G. Wallis (der berühmte hieß bloß Johannes): Rechenkunst für solche, welche mit ganzen und gebrochenen Zahlen sowohl auf dem Papier als im Kopfe auf eine möglichst kurze und geschwinde Art rechnen zu lernen wünschen. Göttingen. 1794. 8. und: Kubikrechnung des Bau- und Nutzholzes. Göttingen. 1794. 8. Beide Schriften können also nicht gemeint sein. Ferner von einem anderen J. Wallis: Die Quadratur des Kreises, den Freunden der Wissenschaft. Berlin. 1822. 4. und: Mathematisch-constructionelle Entdeckungen. Berlin. 1826. 4. Beide Verfasser sind doch wohl Deutsche.

55) Hist. des math. T. I. p. 122. 123. Boëce nous apprend que quelques Pythagoriciens avoient inventé et employoient dans leurs calculs neuf caractères particuliers etc. . . . En effet les manuscrits de Boëce, où l'on trouve ces caractères si ressemblans aux premiers de l'arithmétique arabe, n'ayant aussi que trois à quatre siècles, il est assez probable qu'ils sont l'ouvrage du copiste. Au reste, cela est peu important; il s'agit ici beaucoup plus du fonds de cette arithmétique Pythagoricienne, que de la forme des caractères qu'elle employoit; et si le récit de Boëce, qui ne paroît pas également altéré, est vrai, il faudra admettre que l'on connut dans l'école de Pythagore une manière de noter les nombres semblable à la nôtre. Ce trait de Boëce admis dans toute son étendue, ne me paroît pas néanmoins un motif suffisant pour nous porter à chercher un nouveau système sur l'origine de notre arithmétique; les témoignages nombreux des Arabes me porteront toujours à croire qu'elle est née dans

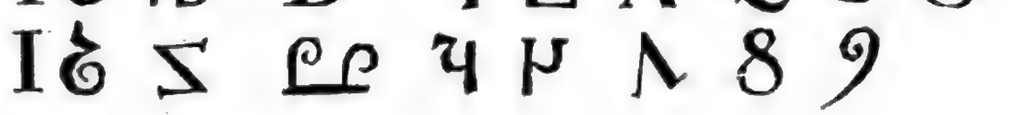
Digitized by Google

Gegenſtand kurz berührt und ſich dafür entſchieden hatte, daß Pythagoras von ſeinen Reiſen, vielleicht aus Indien, dieſe Kenntniß mitgebracht haben könnte, ſo gab Mannert in Folge eigener Beſichtigung des Altdorfer Codex (was geſchehen war, bevor ihm Weidler's Arbeiten bekannt geworden [56]), ſeine vorhin ſchon erwähnte Diſſertation **De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine Pythagorica** (Norimb. 1801. 8.) heraus, worin er zuerſt zeigt, daß die bei Boethius befindliche Tabelle nicht, wie noch Weidler geglaubt hatte, die unter dem Namen des **Abacus Pythagoricus** ſeit Jahrhunderten bekannte Multiplicationstafel, ſondern eine Tabelle zur Beleuchtung des Ziffernſyſtems ſei. Die Tabelle ſelbſt hat er nebſt einem Stücke des zur Erklärung derſelben dienenden Textes nach dem Manuſcript in Kupfer ſtechen laſſen und ſeiner Schrift beigefügt. Zuletzt hat Chasles in der zwölften Note zu ſeinem **Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géometrie** [57]) weitläuftig und gründlich über die in Rede ſtehende Stelle gehandelt. Der Verfaſſer hat das Manuſcript der Bibliothek zu Chartres, welches ebenſo wie das Altdorfer aus dem elften Jahrhundert herrühren ſoll, benutzt, die Zeichen ſind bei ihm und Mannert etwas verſchieden; ja Beide geben etwas abweichende Zeichen aus der Tabelle und dem Texte von den Worten an: **ut haec notula responderet unitati etc.** Ich will hier alle vier Reihen von Zeichen zuſammenſtellen:

Mannerts Tabelle: 

Mannerts Text: 

Chasles' Tabelle:

Chasles' Text: 

---

les Indes; et j'aimerai mieux conjecturer que ce fut une de ces inventions que Pythagore puisa chez les Indiens, que de penser que ceux-ci la tirèrent des Grecs. J'avoue que si cette arithmétique eût été ordinaire chez ces derniers, ce seroit une grande présomption en leur faveur. Mais une méthode usitée seulement par un petit nombre d'hommes mystérieux, ne me paroît point propre à avoir pénetré jusqu'aux Indes.

56) Mannert a. a. O. p. 6.

57) S. 526 folg. der deutſchen Überſetzung.

Digitized by Google

Das letzte Zeichen, welches die Null vorstellen soll, kommt in beiden Texten nicht vor. Über den Zeichen der Tabelle stehen der Reihe nach folgende Namen:

Igin andras ormius arbas quinas calctis zenis temenias
1 2 3 4 5 6 7 8
celentis sipos.
9 0

Für ormius liest Chasles ormis, für quinas, quimas, für calctis, caltis. Außerdem hat Chasles in seinem Manuscripte am Ende der Geometrie folgende Verse gefunden:

Ordine primigeno . . . .[58]) nomen possidet *Igin.*
Andras ecce locum previndicat ipse secundum.
Ormis post numerus non compositus sibi primus.
Denique bis binos succedens indicat *Arbas.*
Significat quinos ficto de nomine *Quimas.*
Sexta tenet *Calcis* perfecto munere gaudens.
Zenis enim digne septeno fulget honore.
Octo beatificos *Termenias* exprimit unus.
Hinc sequitur *Sipos* est qui rota namque vocatur[59]).

Zu bemerken sind hier erstens zwei abweichende Lesearten, nämlich calcis für sechs, wofür Chasles im Texte caltis, Mannert calctis hat, und termenias, wahrscheinlich Schreibfehler für temenias; zweitens aber fehlt offenbar ein Vers für celentis gleich neun, und ich möchte schwerlich mit Chasles[60]) glauben, daß sipos und celentis zwei verschiedene Namen des neunten Zeichens seien; sowohl die Gestalt des Zeichens, als die Stellung in der Tabelle, als auch endlich, wie wir unten sehen werden, der Name deuten unzweifelhaft darauf hin, daß sipos die Null vertritt.

Es ist nicht leicht und auch hier noch nicht am rechten Orte, über die wahre historische Bedeutung dieser Erscheinung und über deren Einwirkung auf die Verbreitung des Ziffernsystems in Europa zu sprechen. Das können wir erst dann in seinem ganzen Zusammenhange thun, wenn wir über das Alter dieses Systems in Asien und seine von da aus bewerkstelligte Herüberpflanzung nach dem Occident werden ins Klare gekommen sein. Ich will hier nur vor-

58) Hier fehlt im Verse ein Wort von zwei Augen oder einer langen Sylbe.

59) S. 540.

60) Ebend. Note 166.

Digitized by Google

läufig andeuten, worauf es bei dieſer Unterſuchung vorzüglich ankommen wird:

1) Die erſte Frage, welche zu beantworten ſein wird, iſt die: gehört die beſprochene Stelle dem Auctor Boethius ſelbſt an, oder iſt ſie vielleicht von einem ſpäteren Abſchreiber in deſſen Geometrie hineingetragen. Es wäre alſo zu ermitteln, ob ſie ſich in allen Handſchriften des Boethius vorfindet, namentlich in den älteren. Es wäre die Frage zu beantworten, in welchem Verhältniſſe dieſe Stelle zu der berühmten Schrift ſteht, die denſelben Gegenſtand behandelnd dem im Jahre 1003 als Pabſt Sylveſter II. verſtorbenen Gerbert zugeſchrieben wird und die in Beda's Werken abgedruckt iſt; und wenn eine, welche von beiden auf die andere ſich ſtützt.

2) Es wäre die Frage zu beantworten, wie eine ſo wichtige und ſchöne Kenntniß bei den Pythagoräern in dem wiſſenſchaftlich regen Griechenland ſich Jahrhunderte lang ſo geheim halten konnte, daß ſie allen Mathematikern, die uns übrig geblieben ſind, und unter denen ſich, wohl zu bemerken, auch Pythagoräer befinden (z. B. Nikomachus), völlig unbekannt geblieben iſt, und ſpurlos verſchwunden wäre, wenn nicht ein Römiſcher Kirchenvater des ſechſten Jahrhunderts ſich ihrer bemächtigt hätte. Pythagoras und ſeine Schüler waren doch mit ihren ſonſtigen mathematiſchen Erfindungen nicht ſo geheimnißvoll; vielmehr verdanken wir dieſer Schule einige der wichtigſten Wahrheiten, auch in der Zahlenkunde.

3) Woher rühren die Namen, welche in den Manuſcripten den Zahlzeichen beigeſchrieben ſind? Kein einziger iſt Lateiniſch oder Griechiſch, wohl aber ſind mehrere ſichtbar Semitiſch. Arbas, vier, iſt arba (ארבע, اربعة), quimas, fünf, iſt chams, chamesch (חמש, خمس), temenias, acht, iſt Aramäiſch oder Arabiſch temânia (תמניה, ثمانية); zenis, ſieben, iſt vielleicht urſprünglicher Schreibfehler für zebis oder zevis, und dann haben wir das Semitiſche sab'a, scheba (שבע, سبعة); vielleicht iſt auch nur das Arabiſche von einem Halbkundigen falſch geleſen, indem n und b in dieſer Sprache ſo leicht verwechſelt werden; sipos iſt leicht entſtellt aus dem Arabiſchen sifr (صفر) = 0 [61]); und wenn wir igin,

61) Es iſt viel über die Bedeutung unſeres Worts Ziffer geſchrieben worden, welches nach Einigen Zahl (Hebr. ספר, zählen), nach Andern Nichts, Null, bedeuten ſoll. Ich muß mich, auf den Sprachgebrauch der Arabiſchen Mathematiker geſtützt, durchaus für die letztere Bedeutung erklären, für welche ſich

Digitized by Google

eins, in igid verwandeln, und für andras, zwei, achras lesen, so haben wir das Semitische echad (אחד, احد) und achar (آخر, אחר), der andere. Solche Verstümmelungen aber, zusammengehalten mit den abweichenden Lesearten, dürfen uns nie befremden, wenn sie unverständliche Worte betreffen. Wie sind nicht manche aus dem Arabischen hergenommene astronomische Benennungen entstellt worden! Aus semt-al-râs (سمت الراس), Gegend des Kopfes oder Scheitels, ist zenith geworden, indem

---

unter Andern schon Maximus Planudes ausspricht, wenn er sagt: Τισὶ δὲ ἕτερόν τι σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ' Ἰνδους σημαῖνον οὐδέν. καὶ τὰ ἐννέα δὲ σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστιν. ἡ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως ο. (Wallis T. I. p. 48. T. II. p. 10). Mit Unrecht sagt v. Bohlen (das alte Indien 2. Th. S. 222): „Maximus Planudes begeht einen doppelten Irrthum, daß nur die Null τζίφρα geheißen und dieses οὐδὲν bedeute." Der einzige Fehler, den Planudes begeht, ist der, daß er die Araber mit den Indern verwechselt. Allerdings bedeutet im Arabischen sifr (صفر) nur die Null, und ich habe es nie in der Bedeutung gefunden, in welcher wir das Wort Ziffer gebrauchen. Es ist dieses eine treue Übersetzung des Indischen çûnya, das Leere, von dem Verbum safira, صفر, leer sein, welches nicht die Bedeutung des Hebräischen ספר, zählen hat. Es mag genügen, wenn ich hier nur eine, aber eine triftige Auctorität für meine Behauptung anführe; der Scholiast von Beha-eddin's Khulaset-al-Hisab S. 17 sagt: اگر در مرتبة از مراتب عدد نبود براي نگاعداشت مرتبة صورت هاي مدور يعني ٥ كه علامت صفر بمعني خالي ست نويسند u. s. w. d. h. „Wenn an irgend einer Stelle keine Zahl vorhanden ist, so schreibt man der Deutlichkeit wegen an der Stelle das Finalzeichen des Buchstaben Ha, nämlich ٥, welches das Zeichen Sifr, in dem Sinne von Etwas Leerem, ist." Weiter unten sagt der Verfasser: „Gegenwärtig ist die Veränderung eingetreten, daß das Finalzeichen Ha die Fünf bedeutet, und für das Zeichen *Sifr* ein Punct geblieben ist." Die Englische Sprache hat das Wort cipher in dieser ursprünglichen Bedeutung aufbewahrt; in allen übrigen Europäischen Sprachen bedeutet gegenwärtig Ziffer, ciphra, so viel als Zahlzeichen im Allgemeinen. Dagegen finden wir im späteren Latinismus und in mehrern Romanischen Sprachen für die Null den Ausdruck zero, der wahrscheinlich auch Arabischen Ursprungs ist; sahrâ, صحراء, heißt das Feld, (auch die Wüste, daher der Pluralis sahârâ, صحاري zur Bezeichnung der großen Africanischen Wüste); demnach würde صحراء صفر, sahrâ sifr, das leere Feld, die leere Stelle bedeuten, woraus leicht, mit Übergehung des charakteristischen Adjectivs sifr das Lateinische zero entstanden sein kann.

Digitized by Google

man ni ſtatt m las, und den folgenden Genitiv ganz wegwarf. Das Sternbild des Adlers heißt im Arabiſchen nasr at-tâîr, der fliegende Adler; dafür finden wir die Namen Athair, Altair, Athais, Alcar u. ſ. w. Mit den drei übrigen Zahlworten, ormis (ormius), calctis (caltis, calcis) und celentis weiß ich nichts anzufangen; wo indeß ſieben Namen ihre Deutung finden, da werden auch wohl die drei übrigen ihren Urſprung haben.

Aber geſetzt auch, künftige Forſchungen ſtellten die Echtheit der Stelle bei Boethius und die Bekanntſchaft der Pythagoräer mit dem Indiſch-Arabiſchen Ziffernſyſtem außer Zweifel, ſo würde doch dieſes Reſultat für die Geſchichte der Wiſſenſchaft erſt bei der Unterſuchung über die Verbreitung dieſes Syſtems in Europa zur Zeit des ſogenannten Mittelalters Intereſſe gewinnen. Auf die Fortbildung der Griechen hat dieſe problematiſche Kenntniß keinen Einfluß gehabt, und für die Griechiſchen Mathematiker, mit denen wir hier zu thun haben, iſt ſie nicht da geweſen. Und daß ſelbſt Boethius, wenn die obige Stelle von ihm herrührt, weiter nichts thut, als daß er etwas ihm ſelbſt nicht weniger als Geläufiges, vielleicht etwas eben erſt Gelerntes wiedererzählt, geht aus ſeinen Worten gar zu deutlich hervor. Was er über den praktiſchen Nutzen und den Gebrauch des von ihm beſchriebenen Syſtems ſagen will, zeigt klar, daß er dieſen Nutzen und den Gebrauch des Syſtems gar nicht verſtanden und gekannt hat. Darum breche ich hier dieſen Gegenſtand ab, um erſt bei ſpäteren Unterſuchungen wieder darauf zurückzukommen. Man wird mir es um ſo weniger verargen, daß ich die gründliche Erörterung dieſer Stelle auf eine künftige Gelegenheit hinausſchiebe, als ich, wie ſchon erwähnt, das Werk von Boethius ſelbſt noch gar nicht geſehen habe. Ich gehe von dieſem problematiſchen Sujet auf ein reelleres, die praktiſche Rechenkunſt der Griechen über.

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Die Logistik der Griechen.

Ein Zahlensystem ist an und für sich todt, wenn es nicht auf einen praktischen Gebrauch bezogen wird, und gerade das praktische Bedürfniß des geselligen Lebens hat die Menschen auf die conventionelle Feststellung gewisser Systeme von Zahlzeichen hingeführt. Dieses Bedürfniß war aber zwiefacher Natur. Man wollte entweder bloß eine Zahl aufnotiren, um so dem Gedächtnisse zu Hilfe zu kommen; zu diesem Zwecke war, so lange er Privatangelegenheit blieb, jedes beliebige und willkührliche System von Zeichen ausreichend, und selbst für den öffentlichen Gebrauch bedurfte es nur eines, zwar allgemein anerkannten, aber keineswegs auf große Bequemlichkeit berechneten Systems, wie denn wir uns noch gewöhnlich bei Inschriften und selbst auf Büchertiteln des sehr unbequemen Römischen Zahlensystems bedienen, weil die Züge desselben vernehmlicher in die Augen fallen, als die modernen Ziffern. Die ältesten Römer schlugen Nägel in den Jupitertempel, um die verflossenen Jahre anzudeuten; ebenso die Volsinier in den Tempel der Nortia: **Lex vetusta est, priscis literis verbisque scripta, ut, qui practor maximus sit, Idibus Septembribus clavum pangat. Fixus (oder fixa, sc. lex) fuit dextro lateri aedis Jovis optimi maximi, ex qua parte Minervae templum est. Eum clavum, quia rarae per ea tempora literae erant, notam numeri annorum fuisse ferunt; eoque Minervae templo dicatam legem, quia numerus Minervae inventum sit. Volsiniis quoque clavos, indices numeri annorum, fixos in templo Nortiae, Etruscae Deae, comparere, diligens talium monumentorum auctor Cincius affirmat. M. Horatius consul ex lege templum Jovis optimi maximi dedicavit anno post reges exactos: a consulibus postea ad dictatores, quia majus imperium erat, solemne clavi figendi translatum est. Intermisso deinde more, digna etiam per se visa res,**

Digitized by Google

propter quam dictator crearetur [1]). — Das zweite Bedürfniß, welches die Entstehung von Zahlensystemen verursachen mußte, war die Nothwendigkeit, Rechnungen auszuführen, welche das Leben und späterhin die Wissenschaft mit sich führte. Zu diesem Zwecke ist der Gebrauch schriftlicher Zahlzeichen gewiß erst später entstanden, und Geschichte und Sprache weisen darauf hin, daß man in älteren Zeiten sich zunächst der Finger (daher das durchgängig consequente Erscheinen des Decimalsystems und dessen Abarten, des pentadischen und Vigesimalsystems, daher die Begriffe von Hand und Fuß zur Bezeichnung der Zahlen in Americanischen Sprachen, daher das Griechische περιπάζειν, Dinge, über die ich oben weitläuftiger gesprochen habe), dann aber kleiner Steinchen, Kügelchen oder Fruchtkörner und dergleichen zur Veranschaulichung und Erleichterung der Rechnung bediente. Die Griechische Sprache bildet von dem Worte ψῆφος, Steinchen, Muschel, das Verbum ψηφίζειν, rechnen, das Nomen ψηφοφορία, Rechenkunst u. a. neben λογίζεσθαι, die Lateinische von calculus, Steinchen, ihr calculare, rechnen, calculum ponere, calculum subducere, zusammenrechnen u. s. w. Herodot erzählt, daß die Ägypter mit Steinchen (ψήφοις) gerechnet haben [2]), welche sie nicht, wie die Griechen, von der Linken zur Rechten, sondern umgekehrt legten (wenn das Letztere sich in der angeführten Stelle nicht etwa bloß auf das γράφειν bezieht, was doch aber nach der Construction kaum anzunehmen ist). Ein Fortschritt war es schon, wenn man Steine von verschiedener Größe oder verschiedener Farbe nahm, und nachdem man zehn durchgezählt, statt zehn kleiner Steine einen größeren hinlegte, der zehn bedeutete; eben so bei hundert, so daß man von jeder Species nicht mehr als neun Steine nöthig hatte. Diese Sitte konnte leicht auf den Gedanken führen, eine so geringe Anzahl von Steinen, um sie leichter bei der Hand zu haben, auf Schnüre zu ziehen, von denen eine die Einer, die zweite die Zehner, die dritte die Hunderter u. s. f. enthielt, und hiemit stehen wir auf historischem Boden. Solche Rechenschnüre sind in Asien, namentlich bei den Tataren und den Chinesen, von uralten Zeiten her im Gebrauch gewesen, und sollen sich auch bei

1) Livius l. VII. c. 3.

2) l. II. c. 36. Γράμματα γράφουσι καὶ λογίζονται ψήφοισι Ἕλληνες μὲν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ φέροντες τὴν χεῖρα, Αἰγύπτιοι δὲ ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερά.

Digitized by Google

den Peruanern und Mexicanern vorfinden [3]); und der chriſtlich-religiöſe Roſenkranz, welchen die Kreuzzüge aus Aſien nach Europa herüberbrachten, verdankt wahrſcheinlich ebenſo wie die akshamâlâ (Augen- oder Perlenkranz), die den Indiſchen Brahmanen bei der Aufzählung der Namen des Gottes Viſchnu behiflich iſt, ſeinen erſten Urſprung dieſer zum Rechnen oder Abzählen beſtimmten Kugelſchnur. Weiter vervollkommnet erſcheinen dann mehre ſolcher Schnüre in einen Rahmen geſpannt, wovon wir hiſtoriſche Beiſpiele in dem Römiſchen Abacus, und in dem bis auf den heutigen Tag in ganz China und Hochaſien gebräuchlichen Suanpan haben. Beide Inſtrumente vermindern die Anzahl der auf jeder Schnur befindlichen Kugeln, indem ſie das pentadiſche Zahlenſyſtem mit dem dekadiſchen vermiſchen. Ein Querholz theilt ſämmtliche Parallelſchnüre in je zwei ungleiche Theile, von denen der größere im Suanpan fünf, der kleinere zwei Kugeln enthält, deren jede an Werth gleich fünf Kugeln der Hauptſchnur iſt. Im Römiſchen Abacus hatte die Hauptſchnur nur vier, die Nebenſchnur eine Kugel; denn anſtatt fünf Kugeln der Hauptſchnur zu gebrauchen, konnte man ſchon eine der Nebenſchnur, und ſtatt zwei Kugeln der Nebenſchnur eine der folgenden Hauptſchnur anwenden [4]). Die Chineſen ſollen auf dieſer Tafel weit ſchneller rechnen als wir mit unſern Ziffern. Die Griechen ſcheinen den Abacus (ἄβαξ) [5]) wenig gebraucht zu haben; deſto einheimiſcher

---

3) Humboldt a. a. O. S. 206.

4) Ebend. S. 216. 217. Eine Abbildung des Suanpan befindet ſich in Du Halde ausführliche Beſchreibung des chineſiſchen Reichs und der großen Tartarey, a. d. Franz. überſ. mit einer Vorrede von Mosheim (Roſtock 1749. 4.) 3. Thl. S. 350.

5) Ἄβαξ und das davon abſtammende Abacus ſind etymologiſch dunkle Worte. Außer der mit Schnüren beſpannten Rechentafel hieß ſo auch ein Brett mit erhabenem Rande, welches mit Staub oder feinem Sande beſtreut zur Zeichnung geometriſcher Figuren diente. Da die Griechen auch dieſes Hilfsmittel vielleicht aus Aſien erhalten haben, ſo könnte man an das Semitiſche אבק, abak, Staub, denken. Eigenthümlich iſt der Gebrauch des Wortes abacus bei den ſpätern von den Arabern gebildeten Mathematikern, bei denen es ſynonym mit algorithmus oder algorismus (der Arabiſche Artikel al mit dem Griechiſchen Worte ἀριθμός) die Rechnung mit den Arabiſchen Ziffern bedeutet. Vergl. Wallis T. II. p. 11. 13. Daher ſtellt Lucas de Burgo (Pacioli) die übrigens gewiß falſche Hypotheſe auf, daß abacus verſtümmelt ſei aus arabicus. „Algorithmus etiam *abacus* dicebatur olim. Quam vocem putat Lucas de Burgo corrupte dici pro *Arabico*, quod ab Arabibus et rem et nomen habuerimus." Wallis T. II. p. 11.

Digitized by Google

ward er dagegen bei den Römern, die bei ihrer unbehilflichen Zahlenschrift einer solchen sinnlichen Unterstützung weit mehr bedurften; der Gebrauch desselben reicht bei ihnen bis tief in die Zeiten des Mittelalters hinein und wurde wohl erst durch die allgemeinere Einführung der Indisch-Arabischen Ziffern verdrängt. Inwiefern eine graphische Übertragung der auf diesem Rechenbrette gewonnenen Resultate auf das Papier zu einer Erscheinung, wie die besprochene Tafel bei Boethius, und zu der Erfindung der Ziffern mit Stellenwerth führen konnte, ist eine Untersuchung, die ich mir für eine andere Stelle dieses Werkes vorbehalte.

Die Griechen, welche von den Phöniziern zugleich mit dem Alphabete ein zwar nicht sehr consequentes, aber doch nicht unbequemes Zahlensystem erhielten, scheinen, wie gesagt, schon frühe von der sinnlichen Rechenkunst mit den ψήφοις zu der graphischen übergegangen zu sein; es ist uns aber von ihrer praktischen Rechenkunst und den zur Erleichterung ihrer Rechnungen angewandten Kunstgriffen im Ganzen wenig aufbehalten worden, und gerade in dieser Hinsicht ist der Verlust der beiden ersten Bücher der mathematischen Sammlung von Pappus zu bedauern, da dieselben diesem Gegenstande gewidmet gewesen zu sein scheinen, wie aus dem von Wallis aufgefundenen und bekannt gemachten Fragmente erhellt. Das älteste bis auf unsere Zeiten gekommene Griechische Werk, welches auf Zahlenrechnungen basirt ist, ist die Κύκλου μέτρησις von Archimedes. Leider aber begnügt der Verfasser sich überall damit, von dem Ansatze der Rechnung einen Sprung auf das Resultat zu machen, so daß wir aus seiner Schrift von der Art der Ausführung keine Anschauung erlangen. Diese Ausführungen aber sind uns in dem noch in mancher andern Beziehung interessanten Commentar des Eutokius von Askalon über das genannte Werk, wenigstens zum Theil, erhalten worden; er giebt uns Beispiele von Addition, Subtraction und Multiplication in ganzen und gebrochenen Zahlen, aber keine Division und keine Wurzelausziehung, obgleich gerade auf der letztgenannten Operation Archimed's Rechnung hauptsächlich beruht, indem er, die wirklichen Quadrate nicht mitgezählt, der Reihe nach die Quadratwurzeln aus folgenden Zahlen 349450, $1373943\frac{3}{64}$, $5472132\frac{1}{156}$, 9082321, 3380929, 1018405, $4069284\frac{1}{376}$ hat ausziehen müssen. Archimedes setzt die Wurzeln der genannten sieben Zahlen in derselben Reihenfolge $591\frac{1}{8}$, $1172\frac{1}{8}$, $2339\frac{1}{4}$, $3013\frac{3}{4}$, $1838\frac{2}{11}$, $1009\frac{1}{6}$,

Digitized by Google

$2017\frac{1}{4}$ ohne weitere Rechnung; er verfährt z. B. bei der erstgenannten Wurzel so: ἡ ΕΗ πρὸς ΗΓ δυνάμει μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν $\overset{\lambda\delta}{\text{M}}\overline{\text{ϡυν}}$ πρὸς $\overset{\beta}{\text{M}}\overline{\text{γυϡ}}$, μήκει ἄρα μείζονα ἢ ὃν $\overline{\text{φϟα}}$ ἡ πρὸς $\overline{\text{ρνγ}}$. d. h. „ΕΗ zu ΗΓ hat im Quadrat (d. i. $\text{ΕΗ}^2 : \text{ΗΓ}^2$) ein größeres Verhältniß, als 349450 zu 23409, in der Länge also (d. i. ΕΗ : ΗΓ) ein größeres als $591\frac{1}{8}$ zu 153." Auffallend iſt es an dieſem Beiſpiele, daß $591\frac{1}{8}$ nicht die nächſtkleinere Wurzel iſt, welche ſich durch einen ſo kleinen Bruch ausdrücken läßt; $591\frac{1}{7}$ iſt bedeutend näher und auch noch kleiner als der wahre Werth, was hier erfordert wird; es iſt nämlich $(591\frac{1}{8})^2 = 349428\frac{9}{64}$, dagegen $(591\frac{1}{7})^2 = 349449\frac{3}{49}$. Ebenſo iſt für die zweite Zahl $1172\frac{1}{7}$ näher als die angenommene Wurzel $1172\frac{1}{8}$. Die dritte Wurzel iſt ziemlich nahe, wenigſtens läßt ſich mit einem kleinen Bruche keine nähere angeben. Von der vierten Zahl an werden die Wurzeln, dem Gange des Näſonnements zufolge, zu groß verlangt; aber gleich die vierte, $3013\frac{3}{4}$ iſt bedeutend zu groß, indem hier $\frac{3}{4}$ für den Decimalbruch 0,6889 ſubſtituirt iſt, da doch erſt $0{,}75 = \frac{3}{4}$ iſt; und das Quadrat von $3013\frac{3}{4}$ iſt um $368\frac{1}{176}$ größer als die Zahl, deren Wurzel es vorſtellen ſoll. Die folgende Wurzel $1838\frac{9}{11}$ iſt wieder bedeutend zu groß; es bietet ſich uns hier die merkwürdige Erſcheinung dar, daß die Methode der Kettenbrüche der Reihe nach folgende Werthe giebt: $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}$ u. ſ. w.; nun iſt $\frac{8}{11}$ zunächſt zu klein; es hat alſo faſt den Anſchein, als ſei deshalb von Archimedes $\frac{9}{11}$ gewählt worden. Die ſechſte und ſiebente Wurzel ſind ziemlich nahe. Es wäre intereſſant, wenn Eutokius uns einige Aufklärung gegeben hätte über die Methode der Alten, die irrationalen Wurzeln näherungsweiſe zu finden; das thut er aber nicht, ſondern er begnügt ſich zu ſagen: die Wurzel von 349450 iſt nahe $591\frac{1}{8}$, denn das Quadrat von $591\frac{1}{8}$ iſt ungefähr um $21 + \frac{1}{6} + \frac{1}{176}$ kleiner als das wirkliche, — τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ $\overline{\text{φϟα}}$ ἡ ἔγγιστα (ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{\text{φϟα}}$ ἡ τετράγωνος εἰς τὸ ἀκριβὲς M^{o} $\overline{\text{κα}}$ ϛ′ ιε′ ἔγγιστα). Dann fügt er mit den Worten οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται als Probe das Schema der Quadraterhebung der in Rede ſtehenden Wurzel hinzu, und nachdem er da in dem angeführten Beiſpiel das Quadrat $= 349428\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{64}$ $(= \frac{49}{64})$ gefunden, ſagt er: ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς M^{o} $\overline{\text{κα}}$

ϛ′ ιε′ ἔγγιστα [6]). Wahrscheinlich also hatten die Griechen keine bestimmte Methode, um aus einer im gewöhnlichen Zahlensystem gegebenen Zahl, welche kein Quadrat ist, die irrationale Quadratwurzel auszuziehen. Zwar ließ die Methode, welche Theon bei Zahlen in sechzigtheiligen Brüchen anwendet, sich auch, wie wir unten sehen werden, auf das Griechische Decimalsystem anwenden; aber die Operation würde bei größeren Zahlen weitläuftig und schwierig geworden sein. Die Bemerkung, welche wir oben bei der fünften Archimedischen Wurzel, $1838\frac{9}{11}$ machten, ließe von ferne vermuthen, als wäre den Griechen eine Rechnung, ähnlich unserer Rechnung mit Kettenbrüchen, nicht fremd gewesen. Allein eben diese Methode hätte bei den beiden ersten Wurzeln $\frac{1}{7}$ statt des von Archimedes angenommenen $\frac{1}{8}$ an die Hand gegeben. Es bleibt also nur die Vermuthung übrig, daß die Alten ihre Wurzeln durch Versuche und Errathen gefunden haben, worauf namentlich die Multiplicationsproben bei Eutokius hindeuten. Die zunächst kleinere ganze Zahl, welche der gesuchten Wurzel entsprach, konnten sie leicht aus einer Tabelle der Quadratzahlen entnehmen; und daß ähnliche Tafeln, die ihnen ihre mühsamen Rechnungen erleichterten, ihnen nicht fremde waren, beweist die Multiplicationstafel bei Nikomachus [7]).

Wenn ich eben sagte, die von Theon bei der Sexagesimalscala angewandte Methode der Quadratwurzeln sei wahrscheinlich auf Zahlen im Decimalsystem von den Griechen nicht angewandt worden, so scheint mir Eutokius selbst darin zu widersprechen. Man lese zu dem Ende folgende Stelle, den Anfang seines Commentars zu dem dritten Lehrsatze der Κύκλου μέτρησις [8]), die auch noch in mancher andern Beziehung interessant ist: Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα, τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. Τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου, ἀδύνατον. Ἀριθμὸς μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν· ὁ ἀριθμὸς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γινόμενα οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. Ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς Μετρικοῖς,

---

6) Über die Reduction des Bruchs $\frac{15}{24} = 1 - \frac{9}{24}$ auf die Form $\frac{1}{8} + \frac{1}{11}$ werde ich unten sprechen.

7) Nicomachi arithm. l. I. c. 19. S. 96 der Ausg. von Ast.

8) S. 80. 81 der Ausg. von Gutenäcker.

Digitized by Google

εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν ἐξηγουμένοις τὴν Μεγάλην Σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. Ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκείνων ἀναλέγεσθαι. D. h. In dieſem Satze wird uns beſtändig aufgegeben, von einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu finden. Dieſe aber bei einer Zahl, die kein Quadrat iſt, genau zu finden, iſt unmöglich. Denn eine Zahl mit ſich ſelbſt multiplicirt giebt eine Quadratzahl; aber eine Zahl und ein Bruch in ſich ſelbſt multiplicirt geben keine ganze Zahl, ſondern auch einen Bruch. Wie man aber eine Wurzel findet, deren Quadrat einer gegebenen Zahl ſehr nahe gleich kommt, iſt von Hero in den Μετρικοῖς, und von Pappus, Theon und Andern, welche die Μεγάλη Σύνταξις von Klaudius Ptolemäus commentirt haben, gelehrt worden. Daher haben wir nicht nöthig Unterſuchungen hierüber anzuſtellen, da Freunde der Wiſſenſchaft bei Jenen nachſehen können. Hier ſcheint alſo Eutokius offenbar zu ſagen, daß er die Ausziehung der Quadratwurzeln darum nicht mittheile, weil er ſie aus den Werken von Hero, Pappus, Theon und Anderen als bekannt vorausſetzen dürfe. Aber, fragen wir, warum führt er denn ſo ſorgfältig alle vorkommenden Multiplicationen aus, die doch gewiß nicht weniger bekannt waren? Ich glaube, die angeführte Stelle anders verſtehen zu müſſen. Eutokius ſagt nur, er wolle das Princip, auf welchem, rein wiſſenſchaftlich betrachtet, die Ausziehung der Quadratwurzel beruhe, nicht auseinanderſetzen, weil Andere vor ihm, die Jedermann nachleſen könne, das hinlänglich gethan haben. Er ſpricht aber hier nicht von der praktiſchen Anwendung dieſes Princips. Allerdings war durch die von Theon auseinandergeſetzte Methode (die Werke von Hero und Pappus ſind nicht mehr vorhanden), welche wir unten darſtellen wollen, wiſſenſchaftlich die Möglichkeit gegeben, die Operation von den in Sexageſimaltheilen ausgedrückten Zahlen auf Zahlen in dem Decimalſyſteme zu übertragen. Eine andere Frage iſt aber die, ob dieſe Übertragung der Methode auf größere Zahlen im Decimalſyſtem in der Praxis ſich auch als anwendbar bewährte. Daß das aber nicht der Fall war, beweiſt Eutokius ſelbſt durchweg, indem er immer das umgekehrte Verfahren wählt, und multiplicirt, anſtatt durch eine auf das Princip gegründete Operation die Wurzel analytiſch herzuleiten. So beſitzen wir, um ein Analogon

Digitized by Google

anzuführen, seit beinahe drei Jahrhunderten Methoden, um auf directem Wege die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung zu bestimmen; ich glaube aber nicht, daß sich schon irgend Jemand bei einer wirklich vorliegenden Gleichung der Methoden von Ferrari, Bombelli, Descartes u. s. w. bedient hat, so richtig dieselben auch in theoretischer Hinsicht sind; sondern Jeder wird die weniger wissenschaftlichen, aber unendlich leichter zum Ziele führenden Näherungsmethoden in der Praxis anwenden.

Eben so wenig bietet uns die ganze Griechische Literatur ein Beispiel von einer ausgeführten Division in gewöhnlichen Zahlen dar. Eutokius, der einzige Schriftsteller, der uns überhaupt ausgeführte Rechnungen in dem gewöhnlichen Griechischen Decimalsystem aufbewahrt hat, hat in seinem Commentar keine Gelegenheit gefunden, eine Division zu verrichten. Theon in seinem Commentar über Ptolemäus giebt uns auch von der Division Beispiele, aber gleichfalls im Sexagesimalsystem; das von ihm gebrauchte Verfahren läßt sich allerdings auch auf das Decimalsystem übertragen, wie Delambre [9]) gezeigt hat, nur wird dann die Operation ebenfalls weitläuftiger, als bei den Ptolemäischen Brüchen, wenn sie auch nicht so große Schwierigkeiten darbietet, wie die Wurzelausziehung.

Bevor wir weiter gehen, müssen wir erst etwas über die bei den Griechen übliche Bezeichnung der Brüche sagen. Die einfachsten Brüche, deren Zähler die Einheit ist, und mit denen die Alten sich am liebsten beschäftigten, bezeichneten sie auf die Art, daß sie bloß den Zahlbuchstaben des Nenners hinschrieben und denselben oben mit einem Apex gleich dem Acutus bezeichneten; so bedeutet γ' $\frac{1}{3}$, δ' $\frac{1}{4}$, ε' $\frac{1}{5}$, $\xi\delta'$ $\frac{1}{64}$ u. s. w. [10]). Nur der erste aller Brüche, $\frac{1}{2}$, macht davon in der Regel eine Ausnahme und wurde durch ein eigenes Zeichen ⊥ angedeutet, welches nicht, wie in manchen uncorrecten Druk-

9) Hist. de l'astron. anc. T. II. p. 26. Arithm. d. Griech. S. 33.

10) Eine ähnliche Bezeichnung habe ich noch in der Lateinischen Ausgabe des Euklid von Zambertus (Paris. 1516) gefunden, wo fol. 248 (ad Eucl. XIV. 8) die Brüche, deren Zähler die Einheit ist, durch einen horizontalen Strich über dem Nenner angedeutet werden: $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, $\overline{12}$, $\overline{18}$, $\overline{24}$, $\overline{48}$, $\overline{72}$, $\overline{96}$, $\overline{144}$, $\overline{192}$ für $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ u. s. w. Auch finden sich daselbst eigene Zeichen für die angeführten Brüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{192}$, deren erstes mit dem Griechischen Zeichen für $\frac{1}{2}$ übereinstimmt. Die übrigen will ich nicht hieherſetzen. Andere Abbreviaturen für Brüche giebt Montfaucon (Palaeogr. p. 361) aus einem Pariser Codex.

Digitized by Google

Drucken geschieht, mit dem Buchstaben K zu verwechseln ist [11]). Da die Rechnung mit diesen Brüchen bedeutend leichter ist als mit solchen, deren Zähler die Einheit überschreitet, so lösen die Griechen die letzteren, wo es sich thun läßt, gern in mehre Brüche der ersten Art auf. So schreibt Eutokius für $\frac{3}{64}$ lieber $\frac{1}{2}\ \frac{1}{64}$, und $\frac{1}{2}\ \frac{1}{16}$ für $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ für $\frac{3}{4}$, ganz ähnlich wie die wo möglich alle Zahlen durch Worte ausdrückenden Araber für drei Achtel sagen ein Viertel und die Hälfte eines Viertels (ربع ونصف ربع). Ja, Eutokius geht so weit, daß er den Bruch $\frac{9}{64}$ sogar in drei andere, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{64}$ auflöst. Ein merkwürdiges Beispiel von einer näherungsweise vollzogenen Zerlegung eines Bruchs in zwei kleinere mit dem Zähler 1, welches Eutokius Commentar uns darbietet, will ich gleich an dieser Stelle mitnehmen; ich meine die oben schon berührte Zerlegung des Bruchs $\frac{15}{64}$ in die Summe von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{15}$ [12]). Nun ist $\frac{1}{6} = \frac{10\frac{2}{3}}{64}$, $\frac{1}{15} = \frac{4\frac{4}{15}}{64}$, also die Summe beider erst $= \frac{14\frac{14}{15}}{64}$, demnach um $\frac{1}{960}$ zu klein. Es fragt sich, auf welchem Wege Eutokius zu dieser einfachen Zerlegung gelangt ist. Vielleicht machte er folgende Betrachtung; da in dem Bruche $\frac{15}{64}$ der Zähler nahe ein Viertel des Nenners ist, so wird der Werth des Bruchs nicht bedeutend verändert, wenn man von dem Zähler 1 und von dem Nenner 4 wegnimmt, so daß $\frac{15}{64}$ beinahe gleich $\frac{14}{60} = \frac{7}{30} = \frac{5}{30} + \frac{2}{30} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$ wird. Vielleicht gefällt auch Einem oder dem Andern die Ableitung von Delambre [13]) besser, welcher den Übergang so darstellt:

$$\frac{15}{64} = \frac{45}{192} = \frac{32+13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14\frac{10}{13}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$$

Mir scheint die Darstellung, die ich gegeben habe, einfacher zu sein. Wir kehren indeß zu unserm Gegenstande zurück. Die eben dargestellte Bezeichnung der Brüche war aber einerseits nicht allgemein angenommen, wie wir aus Diophant ersehen, der auch die einfachen Brüche mit dem Zähler 1 so schreibt, wie alle übrigen, andrer-

---

11) In Hoffmann's Übersetzung von Delambre's Schrift über die Arithmetik der Griechen S. 25 stehen die sonderbaren Worte: „Das Zeichen K, welches unserm k gleicht, bedeutet $\frac{1}{2}$." Das erste Zeichen ist ganz deutlich ein großes, das zweite ein kleines k. In der zweiten Ausgabe des Originals (Delambre Hist. de l'astron. anc. T. II.) habe ich eine ähnliche Stelle nicht gefunden; die erste Ausgabe in Peyrard Oeuvres d'Archimède habe ich nicht zur Hand.

12) Ausg. v. Gutenäcker S. 88 und 134.

13) Arithm. der Griechen S. 25. Hist. de l'astr. anc. T. II. p. 21.

seits war diese Methode nicht ausreichend für Brüche, deren Zähler nicht die Einheit ist. Diese letzteren Brüche nun, und oft auch die ersteren bezeichnen die Griechen so, daß sie in die ordentliche Zeile der Zahlen und Worte den Zähler stellen, und den Nenner ihm als Exponenten oben ansetzen, so daß z. B. $\overline{\vartheta}^{\iota\acute{\alpha}}$ oder $\overset{\iota\alpha}{\vartheta}$ bei Archimedes und Eutokius $\frac{9}{11}$ bedeutet, und ebenso sehr oft bei Diophant, selbst bei großen Zahlen, nur mit dem Unterschiede, daß wenigstens in den gedruckten Ausgaben statt des Acutus ein Circumflexus oben an den Nenner gesetzt wird; z. B. Dioph. IV, 17. $\overline{\gamma\cdot\varsigma\chi\kappa\alpha}^{\beta\psi\delta\tilde{}} = \frac{36621}{2704}$; IV, 18 $\overline{\iota\varsigma\cdot\mathfrak{D}\pi\vartheta}^{\tilde{\alpha}\cdot\omega\iota\varsigma\tilde{}} = \frac{170989}{10816}$. In dem letzten Beispiele ist bei dem α des Nenners außer dem Myriadenpuncte (s. oben) noch einmal das Zeichen ˜ gesetzt, um, wie es scheint, davor zu warnen, daß man es für $\underset{\cdot}{\alpha} = 1000$ halte, da in der Zahl die Stelle der Tausender leer geblieben ist. Sonst drückt Diophant auch, zumal bei größeren Zahlen, das Bruchverhältniß zuweilen so aus, daß er zwischen die Zahl des Zählers und des Nenners die Worte ἐν μορίῳ oder μορίου setzt, z. B. IV, 29. $\overline{\varrho\nu\cdot\varsigma\mathfrak{D}\pi\delta}$ μορίου $\varkappa\varsigma\cdot\beta\varrho\mu\delta$, das heißt $\frac{1507984}{262144}$. Es sei mir erlaubt, hier eine interessante Stelle aus Diophant (IV, 45) abzuschreiben. Der Verfasser hat für drei gesuchte Zahlen die Werthe $\overline{\alpha\cdot\underset{\cdot}{\alpha}\varsigma}^{\psi\varkappa\varsigma\tilde{}} = \frac{11007}{726}$, $\overline{\beta\omega\iota\varsigma}^{\psi\varkappa\varsigma\tilde{}} = \frac{2817}{726}$ und $\overline{\pi\varsigma}^{\psi\varkappa\varsigma\tilde{}} = \frac{87}{726}$ gefunden. Nun verlangt aber die Aufgabe, daß die Summe von je zweien dieser Zahlen eine Quadratzahl sei; da fährt der Auctor so fort: καὶ ἐπεὶ τὸ μόριον τὸ $\overline{\psi\varkappa\varsigma}$ οὐκ ἔστιν τετράγωνος, ἕκτον δὲ ἔστιν αὐτοῦ, ἐὰν λάβωμεν $\overline{\varrho\kappa\alpha}$, ὅ ἐστι τετράγωνος· πάντων οὖν τὸ ἕκτον καὶ ὁμοίως ἔσται ὁ μὲν πρῶτος $\overline{\underset{\cdot}{\alpha}\omega\lambda\delta}^{\varrho\kappa\tilde{\alpha}}\cdot\overline{\alpha}^{\beta\tilde{}}$· ὁ δὲ δεύτερος $\overline{\upsilon\xi\vartheta}^{\varrho\kappa\tilde{\alpha}}\cdot\overline{\alpha}^{\beta\tilde{}}$· ὁ δὲ τρίτος $\overline{\iota\delta}^{\varrho\kappa\tilde{\alpha}}\cdot\overline{\alpha}^{\beta\tilde{}}$· καὶ ἐὰν ἐν ὁλοκλήροις θέλῃς, ἵνα μὴ τὸ ἥμισυ ἐπιτρέχῃ, εἰς τέσσαρα ἔμβαλες· καὶ ἔσται ὁ πρῶτος $\overline{\underset{\cdot}{\varsigma}\tau\lambda\eta}^{\upsilon\pi\delta\tilde{}}$· ὁ δὲ δεύτερος $\overline{\underset{\cdot}{\alpha}\omega o\eta}^{\upsilon\pi\delta\tilde{}}$· ὁ δὲ τρίτος $\overline{\nu\eta}^{\upsilon\pi\delta\tilde{}}$. d. h. „und da der Nenner 726 kein Quadrat, sein Sechstel aber, nämlich

121, ein Quadrat ist; so wird, wenn wir von Allem ein Sechstel nehmen, die erste Zahl $\frac{1834\frac{1}{2}}{121}$, die zweite $\frac{469\frac{1}{2}}{121}$, die dritte $\frac{14\frac{1}{2}}{121}$; und wenn du es in ganzen Theilen verlangst, so größere, damit das Halbe nicht mit einlaufe, durch vier, und es wird sein die erste Zahl $\frac{7338}{484}$, die zweite $\frac{1878}{484}$, die dritte $\frac{58}{484}$." — Für unsern Zweck bemerkenswerth ist hier die Bedeutung von $\overline{\alpha^{\beta}}$, welches nicht absolut eine halbe Einheit, sondern die Hälfte von $\frac{1}{121}$ anzeigt, was ich dadurch angedeutet habe, daß ich in der Übersetzung das $\frac{1}{2}$ in den Zähler stellte; denn, dem Griechischen analog geschrieben $\frac{1834}{121}\ \frac{1}{2}$ würde entweder gar keinen, oder den Sinn haben, daß beide Brüche zu addiren wären. Übrigens wäre Diophant einfacher und ohne die Brüche von Brüchen zu demselben Resultat gekommen, wenn er in den ursprünglich gefundenen Ausdrücken Zähler und Nenner durch 3, anstatt durch 6 dividirt, und mit 2 multiplicirt hätte; denn mna^2 wird sowohl, wenn man es mit mn, als wenn man es $\frac{m}{n}$ multiplicirt oder dividirt, ein Quadrat.

Wie Diophant Brüche bezeichnet, deren Nenner mehrgliedrig ist, und einen Ausdruck der unbekannten Größe in sich schließt, geht uns hier nichts an, weil es nicht mehr reine Zahlenrechnung ist. Wir werden gehörigen Orts auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Nachdem wir gesehen, wie die Griechen Brüche geschrieben haben, steht uns nichts weiter im Wege, was das Verständniß der von Eutokius mitgetheilten Rechnungen hindern könnte. Alle seine Rechnungen haben den Zweck, nachzuweisen, daß die von Archimedes angenommenen Quadratwurzeln der Wahrheit hinlänglich nahe kommen, zu welchem Ende er die vorliegende Wurzel auf das Quadrat erhebt. Er fängt, umgekehrt wie wir, die Multiplication allemal mit der höchsten Ziffer, also von der linken Seite an; er multiplicirt mit der höchsten Ziffer des Multiplicators jede Ziffer des Multiplicandus und schreibt die einzelnen Producte in eine Reihe; dann verfährt er eben so mit der zweiten und den folgenden Ziffern, und addirt endlich die vorhandenen einzelnen Resultate. Wir wollen seine

Digitized by Google

Methode zuerst an einem ganz einfachen Beispiel veranschaulichen. Er hebt z. B. (S. 84. der Ausg. v. Gutenäcker) die Zahl $\overline{\sigma\xi\varepsilon}$, d. h. 265 auf das Quadrat; nun verfährt er so: 200 mal 200 giebt 4 Myriaden, $^{\delta}\mathrm{M}$; 200 mal 60 giebt eine Myriade und 2000, $^{\alpha}\mathrm{M}\beta$; 200 mal 5 giebt 1000, α; diese Producte bilden die erste Reihe. Weiter giebt 60 mal 200 eine Myriade und 2000, $^{\alpha}\mathrm{M}\beta$; 60 mal 60 giebt 3000 und 600, $\gamma\varkappa$; 60 mal 5 giebt 300, τ; dieses ist die zweite Reihe. Endlich 5 mal 200 giebt 1000, α; 5 mal 60 giebt 300, τ; und 5 mal 5 giebt 25, $\varkappa\varepsilon$; das ist die dritte Reihe. Die Addition dieser einzelnen Elemente giebt das Endresultat 7 Myriaden und 225, $^{\zeta}\mathrm{M}\sigma\varkappa\varepsilon$. Ich setze das Rechnungsschema, welches er giebt, hieher, und füge demselben die Übertragung in unsere Ziffern bei.

$\overline{\sigma\xi\varepsilon}$	265
$\overline{\sigma\xi\varepsilon}$	265
$^{\delta}\mathrm{M}$ $^{\alpha}\mathrm{M}\beta$ α	40000, 12000, 1000
$^{\alpha}\mathrm{M}\beta\ \overline{\gamma\varkappa\tau}$	12000, 3600, 300
$\alpha\ \overline{\tau\varkappa\varepsilon}$	1000, 300, 25
$^{\zeta}\mathrm{M}\ \overline{\sigma\varkappa\varepsilon}$	70225

Diese Methode und Anordnung der Rechnung ist ganz dieselbe, welche wir bei der Multiplication algebraischer Ausdrücke befolgen, wo wir auch zuerst alle Partialproducte hinschreiben und darauf die gleichartigen addiren.

Eine große Anzahl der Beispiele, welche Eutokius uns so ausgerechnet vor Augen führt, enthält Brüche, mit denen er aber ganz auf dieselbe Weise verfährt. Als Beispiel wähle ich die Rechnung S. 106, wo $1838\frac{9}{11}$ oder $\overline{\alpha\omega\lambda\eta}\ \overline{\mathrm{S}}^{\iota\alpha'}$ auf das Quadrat erhoben wird.

Erste Reihe. $1000 \cdot 1000 = 100$ Myriaden, $^{\varrho}\mathrm{M}$

$1000 \cdot 800 = 80$ Myriaden, $^{\pi}\mathrm{M}$

$1000 \cdot 30 = 3$ Myriaden, $^{\gamma}\mathrm{M}$

$1000 \cdot 8 = 8000, \overline{\eta}$

$1000 \cdot {}^{9}_{11} = 818^{2}_{11}, \overline{\omega\iota\eta}\ \overline{\beta}^{\iota\alpha'}$

Zweite Reihe. $800 \cdot 1000 = 80$ Myriaden, $\overset{\pi}{\mathrm{M}}$

$800 \cdot 800 = 64$ Myriaden, $\overset{\xi\delta}{\mathrm{M}}$

$800 \cdot 30 = 2$ Myriaden und 4000, $\overset{\beta}{\mathrm{M}}\,\overline{\delta}$

$800 \cdot 8 = 6400, \overline{\varsigma\upsilon}$

$800 \cdot {}^{9}_{11} = 654^{6}_{11}, \overline{\chi\nu\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

Dritte Reihe. $30 \cdot 1000 = 3$ Myriaden, $\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$

$30 \cdot 800 = 2$ Myriaden und 4000, $\overset{\beta}{\mathrm{M}}\,\overline{\delta}$

$30 \cdot 30 = 900, \overline{\text{ϡ}}$

$30 \cdot 8 = 240, \overline{\sigma\mu}$

$30 \cdot {}^{9}_{11} = 24^{6}_{11}, \overline{\kappa\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

Vierte Reihe. $8 \cdot 1000 = 8000, \overline{\eta}$

$8 \cdot 800 = 6400, \overline{\varsigma\upsilon}$

$8 \cdot 30 = 240, \overline{\alpha\mu}$

$8 \cdot 8 = 64, \overline{\xi\delta}$

$8 \cdot {}^{9}_{11} = 6^{6}_{11}, \overline{\varsigma}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

Fünfte Reihe. ${}^{9}_{11} \cdot 1000 = 818^{2}_{11}, \overline{\omega\iota\eta}\ \overline{\beta}^{\iota\alpha'}$

${}^{9}_{11} \cdot 800 = 654^{6}_{11}, \overline{\chi\nu\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

${}^{9}_{11} \cdot 30 = 24^{6}_{11}, \overline{\kappa\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

${}^{9}_{11} \cdot 8 = 6^{6}_{11}, \overline{\varsigma}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

${}^{9}_{11} \cdot {}^{9}_{11} = {}^{81}_{121}, \overline{\pi\alpha}^{\varrho\kappa\alpha'}$

Digitized by Google

Demnach sieht das Schema so aus:

$\overline{\text{ϙ}\omega\lambda\eta}\ \overline{\vartheta}^{\iota\alpha}$

$\overline{\text{ϙ}\omega\lambda\eta}\ \overline{\vartheta}^{\iota\alpha'}$

$\overset{\varrho}{\mathrm{M}}\ \overset{\pi}{\mathrm{M}}\ \overset{\gamma}{\mathrm{M}}\ {}_{,}\eta\ \overline{\omega\iota\eta}\ \overline{\beta}^{\iota\alpha'}$

$\overset{\pi}{\mathrm{M}}\ \overset{\xi\delta}{\mathrm{M}}\ \overset{\beta}{\mathrm{M}}\ {}_{,}\delta\ {}_{,}\varsigma\ \overline{\upsilon\chi\nu\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}\ \overset{\beta}{\mathrm{M}}\ {}_{,}\delta\ \mathfrak{D}\ \overline{\sigma\mu\varkappa\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

${}_{,}\eta\ {}_{,}\varsigma\ \overline{\upsilon\sigma\mu\xi\delta\varsigma}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

$\overline{\omega\iota\eta}\ \overline{\beta}^{\iota\alpha'}\ .\ \overline{\chi\nu\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}\ .\ \overline{\varkappa\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}\ .\ \overline{\varsigma}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}\ .\ \overline{\pi\alpha}^{\varrho\varkappa\alpha'}$

$\overset{\tau\lambda\eta}{\mathrm{M}}\ \overline{\text{ϙ}\ \sigma\nu\alpha}\ \overline{\zeta}^{\iota\alpha'}\ \overline{\pi\alpha}^{\varrho\varkappa\alpha'}$

$\overset{\text{ἢ}}{\eta}\ \overset{\tau\lambda\eta}{\mathrm{M}}\ \overline{\text{ϙ}\sigma\nu\beta}\ \overline{\lambda\zeta}^{\varrho\varkappa\alpha'}$

d. h. 3381251 $\frac{7}{11}$ $\frac{81}{121}$ oder 3381252 $\frac{37}{121}$.

Und nun noch ein Beispiel mit zwei Brüchen, wovon ich aber bloß das Schema hiehersetzen will (Guten. S. 103).

$\overline{\text{ϙ}\iota\gamma}\ \mathcal{L}\ \delta'$	3013 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
$\overline{\text{ϙ}\iota\gamma}\ \mathcal{L}\ \delta'$	3013 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
$\mathfrak{D}\ \overset{\gamma}{\mathrm{M}}\ \mathrm{M}\ \mathfrak{Z}\ \text{ϙ}\ \overline{\varphi\psi\nu}$	9000000, 30000, 9000, 1500, 750
$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}\ \overline{\varrho\lambda\varepsilon\beta}\ \mathcal{L}$	30000, 100, 30, 5, $2\frac{1}{2}$
$\mathfrak{Z}\ \overline{\lambda\vartheta\alpha}\ \mathcal{L}\ \mathcal{L}\ \delta'$	9000, 30, 9, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ ($= \frac{3}{4}$)
$\overline{\text{ϙ}\varphi\varsigma}$ *) $\mathcal{L}\ \delta'\ \eta'$	1500, 5, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$
$\overline{\psi\nu\gamma}$ **) $\delta'\ \eta'\ \iota\varsigma'$	750, $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ ($= \frac{3}{4}$), $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$
$\mathfrak{D}\ \overset{\eta}{\mathrm{M}}\ \overline{\beta\chi\pi\vartheta}\ \iota\varsigma'$	9082689 $\frac{1}{16}$

*) Pro $\overline{\text{ϙ}\varphi\varsigma}$ malim ϙφεα. **) Pro ψνγ malim ψνβ$\mathcal{L}\mathcal{L}$.

Diesen beiden Bemerkungen von Gutenäcker muß ich vollkommen beistimmen; die im Griechischen Schema dargestellte Zusammenziehung von 5 und $1\frac{1}{2}$ in $6\frac{1}{2}$, und von $2\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ in 3, wo noch überdieß das letztere $\frac{1}{2}$ mit dem folgenden $\frac{1}{4}$ enge verbunden ist, ist ohne ein Beispiel, das die Schreibart rechtfertigen könnte.

Digitized by Google

Multiplicationen ungleicher Factoren kommen bei Eutokius nicht vor; es ist indeß kein Grund vorhanden zu glauben, daß sie anders als die vorliegenden seien ausgeführt worden. Die Addition und Subtraction geschah ganz wie bei uns mit benannten Zahlen. Es wird hinreichend sein, das Schema aufzustellen.

Addition.	$^{\lambda\beta}$ M ϛ − μ α	3 2 6 0 4 1
	$^{\beta}$ M γ υ − ϡ	2 3 4 0 9
	$^{\lambda\delta}$ M ϡ υ ν	3 4 9 4 5 0
Subtraction.	$^{\ddot{\varsigma}}$ M γ χ λ ϛ	9 3 6 3 6
	$^{\beta}$ M γ υ − ϡ	2 3 4 0 9
	$^{\zeta}$ M − σ κ ζ	7 0 2 2 7

Eutokius stellt zwar die Schemata nicht so auf, indeß ist diese Untereinanderstellung natürlich und wahrscheinlich.

Dieses sind die praktischen Rechnungen, welche der Commentar des Eutokius uns darbietet. Wer sich von dem Wesen dieser Rechnungen einen deutlicheren Begriff machen will, ohne sich in die Griechische Zahlenbezeichnung hineinzuarbeiten, der darf nur, nach Delambre's Methode, die verschiedenen Potenzen von zehn mit Buchstaben bezeichnen, etwa die Myriaden mit *m*, die Tausende mit *t*, die Hunderte mit *h*, die Zehner mit *z*, die Einer mit *e*, und z. B. für 9082689 schreiben $908^{m}\ 2^{t}\ 6^{h}\ 8^{z}\ 9^{e}$, so hat er ganz das dem Griechischen entsprechende Bild der benannten Zahlen. Ich hielt diese Darstellungsweise für unnöthig.

Einige interessante historische Data enthält noch der Schluß von Eutokius Commentar, weshalb ich denselben hier mittheilen will. Ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει, οἱ παρ' αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοὶ μετρίως ἐσαφηνίσθησαν. Ἰστέον δὲ, ὅτι καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὠκυτοβόῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων, ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγάγων. Τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν Ἀρχιμήδους σκοπόν. Ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ, τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας. Ὥστε οὐδὲ Πόρος ὁ Νικαεὺς εὔκαιρον εὑρήσεται μέμψιν ἐπάγων Ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι, ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. Ἐξ ὧν αὐτὸς

ἐν τοῖς Κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον, Φίλωνα λέγων τὸν ἀπὸ Γαδάρων, εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν, τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε $\overline{ξ}$ φημὶ καὶ τῶν $\overline{κβ}$. Ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες· κέχρηται δὲ καὶ τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου Λογιστικῶν ἠγμένον. Εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ Μαθηματικῇ Συντάξει τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν etc. etc. D. h. „So viel es möglich war, habe ich die von dem Verfasser aufgestellten Zahlen erläutert. Zu bemerken ist noch, daß auch Apollonius von Perga in dem Ὠκυτόβοος dasselbe durch andere Zahlen bewiesen hat, indem er die Annäherung noch weiter treibt. Das scheint nun zwar genauer zu sein, es ist aber für den Zweck des Archimedes nicht geeignet; ich sagte nämlich, er habe in diesem Buche den Zweck, nur eine Annäherung zu finden, wegen ihres Gebrauchs im Leben. Daher wird man auch finden, daß Porus von Nikäa sehr unpassend gegen Archimedes sich tadelnd ausspricht, daß er nicht genau bestimmt habe, welcher geraden Linie die Peripherie des Kreises gleich sei. Daher sagt er in seinem Buche Κηρία, daß sein Lehrer, Philo von Gadara, dieses auf genauere Zahlen geführt habe, als die Archimedischen sind, nämlich 7 und 22. Alle nach der Reihe scheinen den Zweck desselben verkannt zu haben; denn sie bedienen sich der Multiplicationen und Divisionen mit Myriaden, denen nicht leicht Jemand folgen kann, der nicht die Logistik des Magnus durchstudirt hat. Wenn aber Jemand die Sache ganz bis auf das Kleinste durchführen wollte, so müßte er sich der in der Μαθηματικὴ Σύνταξις des Claudius Ptolemäus gelehrten Methode bedienen, und durch Grade und Minuten und durch gerade Linien im Kreise die Sache bewerkstelligen u. s. w."

Was hier zunächst das angeführte Werk von Apollonius anlangt, so ist dasselbe verloren gegangen, und man weiß nicht mehr, weder was der Titel Okytoboos (oder Okytoboon) bedeutet, noch was der Inhalt desselben war. Diese Notiz bei Eutokius ist die

Digitized by Google

einzige, die wir davon haben. Eutokius Ausdrucksweise läßt vermuthen, daß Apollonius in diesem Werke ebenfalls das Kreisverhältniß bestimmt hat. Dafür stimmt auch Wallis, nur sagt er, wie oft, wieder zu viel [14]): Sed et post Archimedem alii jam olim, utut ad minorem, credo, accurationem quam recentiores, eandem prosecuti sunt methodum (die nämlich durch fortgesetzte Halbirung des Bogens), ut Apollonius Pergaeus in ejus Ocytoboo, qui ad nostras manus non pervenit, et Philo Gedarensis, quod testatur Eutocius etc. Ob Apollonius in diesem Okytoboos zugleich, vielleicht als erklärende Einleitung für seine Rechnungen, die Multiplication großer Zahlen gelehrt, und ob dieses Werk, wie Wallis [15]) vermuthet, dasselbe gewesen, aus welchem Pappus die in den Sätzen 15 bis 27 des zweiten Buchs seiner Sammlung vorgetragenen Lehren, von denen wir weiter unten sprechen werden, entnommen hat, läßt sich nicht entscheiden, ist aber, wie wir sehen werden, nicht wahrscheinlich.

Von Porus von Nikäa und seinem angeführten Werke, Κηρία, wissen wir eben so wenig, wie von seinem Lehrer Philo von Gadara. Es ist dieses die einzige Stelle, an welcher beide Auctoren genannt werden. Von dem Werke Κηρία ist es sogar unbestimmt, ob es Porus oder Aristoteles angehört habe. Denn an einer andern Stelle seines Commentars (S. 77) nennt Eutokius dasselbe Ἀριστοτελικά.

Endlich scheint ein gewisser Magnus, von dem wir gar nichts

---

14) Opera T. II. p. 360.

15) Opera T. III, p. 599 (ad Pappum II, 18): Licet hinc et ex sequentibus Apollonium quendam (Pergaeum puto) tractatum scripsisse (qui periit) de numeris quantumvis magnis inter se multiplicandis, unde haec desumpta sunt collectanea. Quis fuerit ille liber, aut quomodo appellatus, non constat (eo quod secundi hujus collectaneorum libri initium desit), nisi forte (quod non est vero absimile) ille fuerit, quem Eutocius (sub finem commentariorum in Archimedis dimensionem circuli) ὠκυτόκιον vocat, ab Apollonio Pergaeo conscriptum, sed qui periit, cujus argumentum huic absimile non fuisse, inde constat. Das erhellt nun aus unserer Stelle wohl nicht so ganz deutlich. Heilbronner aber schreibt diese Vermuthung von Wallis ganz getrost als Thatsache ab (S. 277), indem er unter den verloren gegangenen Büchern von Apollonius aufführt: ὠκυτόκιος de numeris magnis multiplicandis.

Digitized by Google

wiſſen, in ſeiner Logiſtik über die Multiplication und Diviſion großer Zahlen, die über die Myriaden hinausgehen, geſchrieben zu haben.

Bei unſerer vollkommenen bis zu jeder beliebigen Ausdehnung ſich ſelbſt conſequent bleibenden Zahlenbezeichnung hat das Rechnen mit großen Zahlen durchaus keine eigenthümliche Schwierigkeit. Anders war es bei den Griechen, deren Zeichen und Zahlworte über die Myriaden hinaus unſicher und unbequem und von der Methode der kleineren Zahlen abweichend wurden, und es ſtellt ſich bei der Schwerfälligkeit ihrer Operationen recht deutlich die Wahrheit ans Licht, wie abhängig der Begriff von dem Zeichen iſt. Dagegen können wir auch den Scharfſinn derer nicht genug bewundern, welche die Schranken der Schrift und der Sprache durchbrechend ſich eigene Wege ſchufen, um Zahlen, die die alltäglichen Vorſtellungen weit überſchritten, dem Verſtande anſchaulich zu machen. Obenan ſteht hier wieder der Heros der Griechiſchen Mathematik, Archimedes, von dem wir ein in dieſer Hinſicht merkwürdiges Werk beſitzen, welches er ψαμμίτης genannt hat, und in dem er ſich folgende Aufgabe ſtellt: Eine Zahl anzugeben, welche größer iſt als die Zahl der Sandkörner, die eine Kugel faſſen würde, deren Radius die Entfernung des Erdmittelpunets von dem Fixſternhimmel iſt. Archimedes nimmt hier den Durchmeſſer der Sphäre der Fixſterne nach Ariſtarch's Theorie kleiner als zehntauſend Millionen Stadien an (ἐλάττων ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες $\overline{\rho}$). Die intereſſante dem Könige Gelon von Syrakus zugeeignete Schrift ſcheint eine gelegentliche Veranlaſſung gehabt zu haben. Vielleicht hatte in Gelon's und Archimed's Geſellſchaft Jemand behauptet, die Anzahl der auf der Erde vorhandenen Sandkörner laſſe ſich durch keine Zahl angeben, wodurch bewogen Archimedes ſich jene noch viel umfaſſendere Aufgabe ſtellte. Nun überſteigt aber die Zahl, welche bei dieſer Rechnung herauskommt, bei Weitem die Grenzen der Griechiſchen Zahlworte und Zahlzeichen. Darum ſieht der Verfaſſer ſich genöthigt, ein eigenthümliches Zahlenſyſtem ſich zu bilden. Ich erinnere hier daran, was ich oben ſchon erwähnt habe, daß nämlich die Griechen bei der Bildung größerer Zahlen gewohnt waren, von vier zu vier Stellen fortzuſchreiten. Dieſe bekannte Vorſtellung behält Archimedes bei den erſten acht Stellen bei, und nennt ſie πρῶτοι ἀριθμοὶ, erſte Zahlen, ſo daß die Zahlen

von 1 bis	9	μονάδες	
10 –	99	δεκάδες oder δέκα μονάδες	
100 –	999	ἑκατοντάδες od. ἕκοντα μονάδες	τῶν
1000 –	9999	χιλιάδες oder χίλιαι μονάδες	πρώτων
10000 –	99999	μυριάδες	ἀριθμῶν
100000 –	999999	δέκα μυριάδες	
1000000 –	9999999	ἕκοντα μυριάδες	
10000000 –	99999999	χίλιαι μυριάδες	

heißen. Und nun fährt er so fort: *τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων ἀριθμῶν*, d. h. er betrachtet die Zahl 100000000, oder nach Griechischer Vorstellung 1,0000,0000 als eine neue Einheit, und baut darauf nach dem eben gegebenen Schema eine zweite Zahlenordnung, welche also bis zur Ordnung 1000000000000000 oder den *χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν* fortschreiten. Es heißt nämlich: *καὶ ἀριθμείσθωσαν δευτέρων ἀριθμῶν μονάδες καὶ ἀπὸ τῶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. Πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν.* Also 1 mit sechszehn angehängten Nullen oder zehntausend Billionen stellen eine neue Einheit dar, und so weiter fort. Die Einheiten der verschiedenen Ordnungen stellen sich also einfach so dar:

Einheit	der	ersten	Ordnung	$= 10^0$ oder 1
=	=	zweiten	=	$= 10^8$
=	=	dritten	=	$= 10^{16}$
=	=	vierten	=	$= 10^{24}$
=	=	fünften	=	$= 10^{32}$
=	=	sechsten	=	$= 10^{40}$
=	=	siebenten	=	$= 10^{48}$
=	=	achten	=	$= 10^{56}$

Im Allgemeinen ist die Einheit der $n$ten Ordnung $10^{8(n-1)}$. Die Zahlen der neunten Ordnung braucht Archimedes nicht mehr, denn sein Resultat verliert sich in den tausend Myriaden der achten Zahlen. Nichts desto weniger lehrt er dieses System beliebig fortsetzen. Er sagt nämlich: *καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα ἐχόντων, ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας*, d. h. man kann auf diese Weise bis zu den tausendmillionsten Zahlen fortschreiten. Ja, sagt er, man kann noch weiter

Digitized by Google

gehen; man nenne die bis jetzt behandelten Zahlen Zahlen der ersten Periode, die letzte Zahl der ersten Periode, oder die μύριαι μυριάδες der zehntausendmillionsten Zahlen, also

$$10^{8\,0000\,0000}$$

nenne man eine Einheit der ersten Zahlen der zweiten Periode. Diese zweite Periode wird dann wieder in zweite, dritte, vierte u. s. w. bis zu den tausendmillionsten (μυριακισμυριοστοὶ) Zahlen eingetheilt; die letzte Zahl dieser zweiten Periode, oder zehntausend Myriaden der tausendmillionsten Zahlen der zweiten Periode, heiße dann eine Einheit der ersten Zahlen der dritten Periode, und so weiter fort.

Dieses auf den einfachen Begriff der geometrischen Progression gebaute System hat neben dem Vortheil der Ausdehnbarkeit bis zu jeder beliebigen Grenze noch den der klaren und leichten Übersichtlichkeit und macht seinem Urheber um so mehr Ehre, je einfacher es ist. Es ist aber zu viel gesagt, wenn man in diesem System ein Bewußtsein des Indischen Decimalsystems mit Stellenwerth entdecken will, wie es wohl zuweilen geschieht. Denn das progressive Fortschreiten der Zahlen nach den Potenzen von zehn lag ja von jeher in der Griechischen Sprache begründet, und Archimedes hat weiter nichts gethan, als daß er die Sprache, welche im gewöhnlichen Leben nicht über μυριάκις μύριαι μυριάδες hinausreichte, mit Gewandtheit bis ins Unendliche hin bereicherte; sein System erstreckt sich demnach nur auf die Zahlworte, nicht auf die Zahlzeichen; es hat also mit dem Indischen Positionssystem nichts gemein, als die von jeher in Griechenland bekannte Progression von zehn zu zehn, und die unendliche Ausdehnbarkeit.

Die einfache Regel, welche Archimedes für den Gebrauch dieses Systems giebt, ist folgender Satz: Wenn mehre Zahlen von der Einheit an in geometrischer Progression stehen, so wird jedes Product von irgend zwei Gliedern dieser Progression derselben Progression angehören, indem es so weit von dem größeren Factor entfernt ist, als der kleinere Factor von der Einheit; und der Abstand des Products von der Einheit wird um eins kleiner sein, als die Summe der Abstände der beiden Factoren von der Einheit [16]). Es ist bei diesem Satze nur zu bedenken, daß die

16) Wallis Opera T. III. p. 521: Ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος ἀνὰ

Griechen bei Angaben von Abſtänden beide Grenzen mitzählen; das heißt, wenn ſie die Progreſſion haben

$$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad a^5 \quad a^6 \quad a^7 \quad a^8 \quad a^9 \quad a^{10}$$

wo a^{10} z. B. das Product von a^4 in a^6 iſt, ſo ſteht nach Griechiſcher Vorſtellungsweiſe a^4 um 5, a^6 um 7 von der Einheit ab, alſo a^{10} um 5 von a^6 und um $5+7-1=11$ von der Einheit. Wir würden nach unſerer Vorſtellung alle dieſe Zahlen um 1 vermindern müſſen, oder wir müßten uns der Ordinalzahlen als Stellenzahlen bedienen. Eben ſo ſagt der Grieche „nach drei Tagen," wo wir „nach zwei Tagen" oder „am dritten Tage" ſagen, weil wir das Anfangsglied nicht mitzählen.

Ein Beiſpiel möge zeigen, auf welche einfache Weiſe Archimedes ausmittelt, welcher Rubrik ein erhaltenes Reſultat angehört. Er hatte vorher berechnet, daß eine Kugel, deren Durchmeſſer 100 δάκτυλοι beträgt, weniger Sandkörner in ſich faßt, als 1000 Myriaden der zweiten Zahlen. Dann fährt er ſo fort[17]): „Ferner iſt eine Kugel, welche 10000 δάκτυλοι zum Durchmeſſer hat, das 1000000fache (πολλαπλασία ταῖς $\overline{\varrho}$ μυριάδεσσι) derjenigen, welche 100 δάκτυλοι zum Durchmeſſer hat. Wenn man alſo von Sand eine Kugel hat, mit dem Durchmeſſer gleich 10000 δάκτυλοι, ſo iſt klar, daß die Zahl des Sandes kleiner ſein wird, als das Product der 1000 Myriaden der zweiten Zahlen in die 100 Myriaden. Da nun 1000 Myriaden der zweiten Zahlen in der Progreſſion die ſechszehnte Zahl von der Einheit iſt, die 100 Myriaden aber die ſiebente in derſelben Progreſſion, ſo iſt klar, daß das Product die zwei und zwanzigſte Zahl von der Einheit ſein wird. Von dieſen zwei und zwanzig aber gehören die acht erſten zu den erſten Zahlen, die acht folgenden zu den zweiten Zahlen, die ſechs übrigen zu den dritten Zahlen, und die letzte derſelben iſt zehn Myriaden der dritten Zahlen."

Wir kommen nun zu dem ſchon mehrmals erwähnten Fragment

λόγον ἐόντων, πολλαπλασιάζοντές τινες ἀλλήλους τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τῆς αὐτῆς ἀναλογίας, ἀπέχων ἀπὸ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλήλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνὰ λόγον ἀπέχῃ· ἀπὸ δὲ τῆς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάττονας ἢ ὅσους ἐστὶν ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχωντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλήλους.

17) Ib. p. 523.

Digitized by Google

aus dem zweiten Buche der mathematiſchen Sammlungen von Pappus, welches Wallis in der Oxforder Bibliothek aufgefunden und zuerſt 1688 Griechiſch und Lateiniſch mit Anmerkungen herausgegeben hat. Es iſt nachher im dritten Bande ſeiner Werke, Oxford 1699, fol. p. 595—614 wieder abgedruckt worden. Das Fragment enthält die Sätze 15 bis 27 des genannten Buchs, und giebt Regeln, die Multiplication der Vielfachen von zehn und deſſen Potenzen auf die Multiplication der entſprechenden Einheiten (πυθμένες) zurückzuführen, Regeln, die uns, denen das Bild unſerer Zahlzeichen in Gedanken vorſchwebt, ziemlich unnöthig ſcheinen, die aber für die Griechen von weſentlicherem Nutzen waren, als es ſcheint. Pappus beruft ſich in dieſen Sätzen, deren Anfang leider fehlt (denn der funfzehnte, mit dem das Fragment beginnt, iſt weder der erſte einer neuen Abhandlung, noch ſelbſt an und für ſich vollſtändig) öfters auf Apollonius [18]), ohne denſelben nach der den Griechen doch ſo gebräuchlichen Weiſe durch einen Zuſatz näher zu beſtimmen, und ohne den Titel des Werkes zu nennen, aus welchem er ſeine Auszüge entnommen hat. Vielleicht oder wahrſcheinlich befanden ſich dieſe fehlenden Nachrichten in dem verloren gegangenen Anfange dieſes Abſchnitts. Mit ziemlicher Gewißheit läßt ſich indeß annehmen, daß hier der berühmte Mathematiker Apollonius von Perga, ὁ Περγαῖος, gemeint ſei, und es iſt intereſſant, dieſen μέγας γεωμέτρης, wie ſeine Landsleute ihn auszeichnender Weiſe nennen, auch auf dem Gebiete des Calculs geiſtreich beſchäftigt wiederzufinden. Nicht ſo augenſcheinlich iſt es, daß die Sätze ſeinem von Eutokius erwähnten Werke, welches den Titel Ἀνεύσεις führte, angehört haben [19]), und es läßt ſich über dieſe Frage nichts entſcheiden, ſo lange wir über das letztere Werk nicht genauere Nachrichten haben. Unwahrſcheinlich wird indeß dieſe Annahme der Identität beider Werke durch den Ausdruck des letzten Satzes vorliegender Schrift, wie wir weiter unten ſehen werden.

Hiſtoriſch merkwürdig an dieſen Sätzen iſt, daß Apollonius ſich in ähnlicher Art, wie wir es eben bei Archimedes geſehen haben, ein eigenes Syſtem bildet, um große Zahlen darzuſtellen. Wie Archimedes bei ſeiner Eintheilung in erſte, zweite, dritte u. ſ. w. Zahlen

18) Vergl. Satz 18. 19. 20. 24. 26. 27.

19) Vergl. die Note 15. dieſes Capitels.

Digitized by Google

von acht zu acht Stellen fortschreitet, so schreitet Apollonius, der zu seinem Zwecke nicht so ungeheurer Zahlenausdrücke bedarf, von vier zu vier Stellen fort, und nennt die ersten vier Stellen Einheiten, μοναάδες, die zweiten vier Stellen einfache Myriaden, μυριάδες ἁπλαῖ, die dritten vier Stellen doppelte Myriaden, μυριάδες διπλαῖ, dann ebenso dreifache, vierfache u. s. w. Myriaden. Diese Namen sind, wie es scheint, von der gewöhnlichen Bezeichnungsart hergenommen, indem er zehntausend Myriaden oder μύριαι μυριάδες, welche man durch MM, und das Myriadenfache davon, welches man durch MMM andeutete, doppelte und dreifache Myriaden nannte. Graphisch aber bezeichnet er selbst oder Pappus diese Zahlenperioden anders; er setzt nämlich vor die Zahl der einfachen Myriaden das Zeichen Mα., vor die Zahl der doppelten Mβ., der dreifachen Mγ. und so fort. So drückt er z. B. im 27. Satze die Zahl 5,601,052,800,000 oder Griechisch abgetheilt 5,6010,5280,0000 so aus: Mγ. $\overline{\varepsilon}$ καὶ Mβ. $\overline{\varsigma\iota}$ καὶ Mα. $\overline{\varepsilon\sigma\pi}$. In den vorhandenen Sätzen sagt Pappus nichts zur Erläuterung dieses Princips, wahrscheinlich aber hat er das in dem verloren gegangenen Anfange dieser Abhandlung gethan.

Der Inhalt der einzelnen Sätze nun, welche Pappus vorlegt, ist folgender:

S. 15. (Es sind mehre Zahlen gegeben, von der Beschaffenheit), daß sie kleiner als 100, aber durch 10 theilbar sind; man soll ihr Product (τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν) angeben, ohne sie selbst zu multipliciren.

Es seien die Zahlen ν ν ν μ μ λ (50, 50, 50, 40, 40, 30); die entsprechenden Einheiten (οἱ πυθμένες) werden also sein ε ε ε δ δ γ (5, 5, 5, 4, 4, 3). Das Product derselben ist gleich 60 Einheiten, und da die Anzahl der Dekaden 6 ist, und 6 durch 4 einmal gemessen 2 zum Reste läßt, so wird das Product dieser Dekaden 100 einfache Myriaden sein. Und da das Product aus den Dekaden, multiplicirt in das Product der Pythmenes, das verlangte Product giebt, und die 100 Myriaden, multiplicirt in die 60 Einheiten, 60 doppelte Myriaden geben, so ist das Product der Zahlen 50, 50, 50, 40, 40, 30 gleich 60 doppelten Myriaden.

Pappus bezieht sich hier auf einen Satz, der vermuthlich vorhergegangen ist, und der bestimmen lehrt, welcher Zahlenklasse das Product einer gegebenen Anzahl von Dekaden angehört. Diese Bestimmung ist einfach und hängt, analog wie es im 18. Satze ge-

Digitized by Google

zeigt wird, davon ab, welchen Quotienten und welchen Rest man erhält, wenn man die Anzahl der gegebenen Dekaden durch 4 dividirt.

S. 16. Es seien beliebig viele Zahlen, deren jede kleiner als 1000, aber durch 100 theilbar ist, man soll u. s. w.

S. 17. Es seien zwei Zahlen A, B, und A sei kleiner als 1000, aber theilbar durch 100 (etwa 500 Einheiten), B aber sei kleiner als 100, aber theilbar durch 10 (etwa 40 Einheiten); man soll u. s. w.

S. 18. Es sei eine Anzahl von Zahlen, A, deren jede kleiner als 100, aber durch 10 theilbar ist, und eine andere Anzahl B, deren jede kleiner als 1000, aber durch 100 theilbar ist, man soll u. s. w.

Die Ausführung dieser Aufgabe ist der Mittheilung werth, weil sie ein schönes Beispiel ist, wie die Griechen mit allgemeinen Zahlenausdrücken umgingen.

Es seien die Pythmenes der in A begriffenen Zahlen H (die Einheiten 1, 2, 3, 4), der in B begriffenen Zahlen Θ (die Einheiten 2, 3, 4, 5); nimmt man das Product sämmtlicher Pythmenes und nennt es E (es ist 2880); so sei die Anzahl der in A begriffenen Zahlen, plus der doppelten Anzahl der in B begriffenen, im ersten Falle durch 4 theilbar, und der Quotient sei Z; und Apollonius zeigt, daß das Product aller in A und B enthaltenen Zahlen so viele Myriaden enthält, als E Einheiten, und daß dieselben der Zahl Z gleichnamig sind (also in dem Beispiele 2880 dritte Myriaden). Denn eine der Zahl Z gleichnamige (also dritte) Myriade, mit E (d. i. mit 2880) multiplicirt, giebt das Product der Zahlen in A und B. Das Product der Zahlen in A und B enthält also so viele der Zahl Z gleichnamige Myriaden, als in E Einheiten sind.

Im zweiten Falle aber soll die Anzahl der Zahlen in A, plus der doppelten Anzahl der Zahlen in B, durch 4 dividirt 1 zum Reste lassen; und Apollonius thut dar, daß das Product der Zahlen in A und B so viele der Zahl Z gleichnamige Myriaden enthält, als das zehnfache von E beträgt.

Wenn aber die genannte Anzahl, durch 4 dividirt, 2 als Rest läßt, so enthält das Product aus den in A und B begriffenen Zahlen so viele der Zahl Z gleichnamige Myriaden, als das Hundertfache der Zahl E beträgt.

Wenn endlich der Rest 3 bleibt, so ist das Product gleich so vielen

vielen der Zahl Z gleichnamigen Myriaden, als das Tausendfache von E beträgt.

Es ist hiebei nicht zu übersehen, daß Pappus uns, selbst unter dem ersten Falle, nicht den vollständigen Beweis des Apollonius liefert, sondern nur eine Andeutung, welchen Gang der Verfasser in seinem Beweise genommen hat.

S. 19. Es sei eine Zahl A kleiner als 100, aber theilbar durch 10, und beliebig viele andere Zahlen B, Γ, Δ, E kleiner als 10, man soll das Product finden.

S. 20. Ferner seien zwei Zahlen A, B, jede kleiner als 100 und theilbar durch 10; Γ, Δ, E aber jede kleiner als 10; man soll u. s. w.

S. 21. Dasselbe von drei Zahlen, A, B, Γ, aber in Form eines Lehrsatzes.

S. 22. Ebenso, wenn mehr als drei Zahlen gegeben sind.

S. 23. Sei A kleiner als 1000, aber theilbar durch 100; jede der Zahlen B, Γ, Δ kleiner als 10; man soll u. s. w.

S. 24. Wenn zwei Zahlen A, B kleiner als 1000 und theilbar durch 100, und außerdem Γ, Δ, E jede kleiner als 10 gegeben sind.

S. 25. Dieser Satz sagt, wie er bei Wallis dasteht, in andern Worten ganz dasselbe, was schon der 20. Satz gesagt hat. Er lautet nämlich so: *Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος (καὶ ὁ δεύτερος A B) ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος, μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος· ἕκαστος δὲ τῶν Γ Δ E ἔστω ἐλάσσων δεκάδος· καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν.* Wahrscheinlich hat Wallis die in Parenthese eingeschlossenen Worte, welche in dem Manuscripte fehlen, falsch ergänzt. Der Ausdruck *ἔστω ὁ μὲν πρῶτος* scheint anzudeuten, daß Pappus hier von zwei Zahlen sprechen will, die verschiedene Beschaffenheit haben, so daß er die erste von der zweiten unterscheidet, da er sonst sagen mußte: *ἔστω ἑκάτερος τῶν A, B ἐλάσσων* etc. oder ähnlich. Ich glaube den Satz, damit er in sich selbst und an dieser Stelle Sinn bekommt, so ergänzen zu müssen: *Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος A ἐλάσσων μὲν χιλιάδος, μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος· ὁ δὲ δεύτερος B ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος, μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος· ἕκαστος δὲ τῶν Γ Δ E ἔστω ἐλάσσων δεκάδος· καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν.* „Es sei die erste Zahl A kleiner als 1000 und theilbar durch 100; die zweite B kleiner als 100 und theilbar durch 10; und

jede der Zahlen Γ Δ E ſei kleiner als 10; man ſoll das Product aller angeben." Dieſen Satz erfordert durchaus der Zuſammenhang. Wallis ſagt nicht, ob er in der Auflöſung etwas geändert habe; die iſt freilich ganz ſeiner Leſeart angemeſſen, muß aber jedenfalls auch geändert werden.

S. 26. Es ſeien zwei oder mehre Zahlen A B, deren jede keiner als 1000, aber theilbar durch 100 iſt; und beliebig viele andere Zahlen Γ Δ E, deren jede kleiner iſt als 100, aber theilbar durch 10; und wiederum beliebig viele Zahlen Z H Θ, deren jede kleiner iſt als 10; man ſoll das Product A B Γ Δ E Z H Θ angeben.

Die Pythmenes der Zahlen A B Γ Δ E ſeien reſpective Λ M N Ξ O; die Summe der doppelten Anzahl der Zahlen A B und der einfachen der Zahlen Γ Δ E iſt entweder durch 4 theilbar oder nicht. Dieſe Summe ſei erſtens durch 4 theilbar und der Quotient ſei K; und es mögen den Zahlen A B die Hunderte Π P, und den Zahlen Γ Δ E die Zehner Σ T Υ zugehören; ſo iſt alſo auch die Summe der doppelten Anzahl der Π P und der einfachen Anzahl der Σ T Υ durch 4 theilbar, und der Quotient K. Und es iſt offenbar, daß das Product der Zahlen Π P Σ T Υ, multiplicirt in das Product von Λ M N Ξ O gleich iſt dem Product A B Γ Δ E. Man nehme nun das Product der Zahlen Λ M N Ξ O Z H Θ; es ſei Φ. Ich ſage, daß das Product von A B Γ Δ E Z H Θ ſo vielen der Zahl K gleichnamigen Myriaden gleich iſt, als in der Zahl Φ Einheiten ſtecken. Dieſes hat Apollonius an der Figur gezeigt. Wenn aber die Summe der doppelten Anzahl von A B und der einfachen Anzahl von Γ Δ E nicht durch 4 theilbar iſt, ſo wird dieſelbe 1, 2 oder 3 als Reſt laſſen. Wenn ſie 1 als Reſt läßt, ſo enthält das Product der Zahl Π P Σ T Υ zehn Myriaden, welche dem Quotienten K gleichnamig ſind; wenn 2, hundert Myriaden, gleichnamig der Zahl K; wenn drei, tauſend Myriaden gleichnamig der Zahl K. Und aus dem vorigen iſt klar, daß das Product der Zahlen A B Γ Δ E Z H Θ ſo viele dem K gleichnamige Myriaden enthalten wird, als das Zehnfache, oder das Hundertfache, oder das Tauſendfache der Zahl Φ beträgt.

S. 27. Dieſer Satz enthält zwei Anwendungen der vorigen Sätze, indem Apollonius ſich die Aufgabe ſtellt, die Producte der Zahlen, welche durch die Buchſtaben zweier Verſe vorgeſtellt werden, zu finden. Die Verſe ſind:

Digitized by Google

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι

und Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου.

Apollonius verfährt hier ganz systematisch, indem er sich zuerst diejenigen Buchstaben, welche Hunderter bedeuten, dann die Zehner und zuletzt die Einer zusammenstellt, sodann von den ersten beiden Klassen die Pythmenes nimmt, diese sammt den ursprünglichen Einern in ein Product verbindet, und dann nach der im 26. Satze gegebenen Regel untersucht, mit wie vielen Myriaden dieses Product wegen der vernachlässigten Hunderter und Zehner noch zu vervielfältigen ist. Die Ausführung ist etwas langweilig, zumal da der Verfasser gewissenhaft immer auch mit 1 an gehöriger Stelle multiplicirt. Das Product der Pythmenes und Einer des ersten Verses ist

Μδ. $\overline{\imath\theta}$ καὶ Μγ. $\overline{,\varsigma\lambda\varsigma}$ καὶ Μβ. $\overline{,\eta\upsilon\pi}$

d. h. 19 vierfache, 6036 dreifache und 8480 doppelte Myriaden oder die Zahl

19603684800000000.

Nun enthält der erste Vers zehn Buchstaben, welche Hunderter, und siebzehn, welche Zehner bedeuten; also ist die doppelte Anzahl der ersten, 20, plus der einfachen Anzahl der zweiten, 17, zusammen 37, welches durch 4 dividirt den Quotienten 9 und den Rest 1 giebt. Demnach enthält das Product sämmtlicher Zahlen so viele neunfache Myriaden, als das zehnfache Product der Pythmenes und Einer Einheiten enthält, das heißt, das Gesammtproduct beträgt 196 dreizehnfache, 368 zwölffache und 4800 elffache Myriaden, oder die Zahl 196036848 mit sechs und vierzig angehängten Nullen. Ganz ähnlich ist das Verfahren bei dem zweiten Verse. Das Product der Pythmenes und Einer giebt nämlich 2 vierfache, 1849 dreifache, 4402 doppelte und 5600 einfache Myriaden. Nun enthält der Vers fünf Buchstaben, welche Hunderter, und zwölf, welche Zehner bedeuten; es ist also die Summe der doppelten Anzahl der ersteren und der einfachen Anzahl der letzteren gleich 22, welches durch 4 dividirt den Quotienten 5 und den Rest 2 giebt; daher enthält das Product sämmtlicher Zahlen so viele fünffache Myriaden, als das hundertfache Product der Pythmenes und Einer Einheiten enthält, das heißt, das Gesammtproduct beträgt 218 neunfache, 4944 achtfache, und 256 siebenfache Myriaden, oder die Zahl 21849440256 mit acht und zwanzig Nullen.

Was nun die Art, wie dieser letzte Satz bei Pappus ausge-

ſprochen iſt, anbetrifft, ſo klingt der Ausdruck deſſelben ganz eigenthümlich und ſcheint einiges Licht auf den verlorenen Anfang und den Zweck vorliegender Schrift zu werfen. Der Satz lautet im Original nämlich alſo: Τούτου δὲ θεωρήματος προεκτεθειμένου, πρόδηλόν ἐστι τὸν δοθέντα στίχον πολλαπλασιάσαι, καὶ εἰπεῖν τὸν γενόμενον ἀριθμὸν ἐκ τοῦ τὸν πρῶτον τῶν ἀριθμῶν ὃν εἴληφε τὸ πρῶτον τῶν γραμμάτων, ἐπὶ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε δεύτερον τῶν γραμμάτων πολλαπλασιασθῆναι· ἐπεὶ τὸ γενόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ τρίτον γράμμα· καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς παραίνεσθαι μέχρι τοῦ διεξοδεύεσθαι τὸν στίχον· ὡς εἶπεν Ἀπολλώνιος, ἐν ἀρχῇ, κατὰ τὸν στίχον, οὕτως· Ἀρτέμιδος etc. d. h. „Nachdem dieſer Satz vorher feſtgeſtellt iſt (nämlich der 26.), iſt es thunlich **den gegebenen Vers** zu multipliciren, und das Product anzugeben, welches entſteht, wenn man die erſte Zahl, welche der erſte Buchſtabe ausdrückt, mit der zweiten Zahl, welche der zweite Buchſtabe ausdrückt, multiplicirt; dann das Reſultat mit der dritten Zahl, welche der dritte Buchſtabe darſtellt; und ſo nach der Reihe fort zu verfahren, bis man durch den ganzen Vers gekommen iſt; wie Apollonius **am Anfange** ſagt" u. ſ. w. Und am Schluſſe der Entwickelung der Multiplication des erſten Verſes, als Pappus das Geſammtreſultat angegeben hat, fügt er hinzu: συμφώνως τοῖς ὑπὸ Ἀπολλωνίου κατὰ τὴν μέθοδον ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου προγεγραμμένην, d. h. „übereinſtimmend mit der Angabe des Apollonius nach der **am Anfange des Buchs** vorgeſchriebenen Methode."

Darnach ſcheint es erſtens, daß dieſe Schrift, ähnlich wie die eben beſprochene von Archimedes, eine gelegentliche Spielerei zu ihrer Veranlaſſung gehabt, und mit dem Okytoboos, der ſich mit der genauern Berechnung der Kreisperipherie beſchäftigte, durchaus nichts gemein hat. Wie aus dem Ausdruck dieſes letzten Satzes hervorgeht, hat Apollonius am Anfange der Schrift ſich die ſucceſſive Multiplication der Zahlbuchſtaben der angeführten Verſe als Aufgabe geſtellt, und um das Verfahren zu erleichtern und zugleich dieſe Erleichterung wiſſenſchaftlich zu begründen, der Ausführung ſelbſt eine Reihe von Sätzen vorausgeſchickt. Dieſe Sätze ſelbſt, ſoweit ſie erhalten ſind, ſtehen, wenn meine Conjectur in Betreff des 25. Satzes richtig iſt, in völlig ſyſtematiſcher Anordnung da, und laſſen ſich in

Digitized by Google

zwei Hauptabtheilungen bringen, deren erste unvollständig ist, und mit den Sätzen 15 und 16 schließt; die zweite aber in den Sätzen 17 bis 26 vollständig vorliegt. Der erste Abschnitt enthält Regeln für die Multiplication gleichartiger Zahlen, als mehrer Zehner, oder mehrer Hunderter unter einander; die Analogie des zweiten Abschnitts läßt schließen, daß Apollonius auch hier mit zwei Zehnern, mit drei Zehnern, und ebenso mit zwei und drei Hundertern angefangen hat, bevor er zu dem allgemeinen Ausdruck der Regel für beliebig viele Zehner und Hunderter im 15. und 16. Satze fortgeschritten ist. Der zweite Abschnitt enthält sodann Regeln für die Multiplication verschiedenartiger Zahlen, als Hunderter mit Zehnern (S. 17, 18), Zehner mit Einern (S. 19—22), Hunderter mit Einern (S. 23, 24) und Hunderter mit Zehnern und Einern (S. 25 nach der Wiederherstellung, und S. 26). Diese Sätze waren aber, wie gesagt, nicht Zweck, sondern Mittel, wenigstens der Form der Darstellung nach, welche die Multiplication der Verse als alleinigen Zweck der Schrift, nicht etwa als beiläufig gegebene Anwendung erscheinen läßt.

Zweitens aber erhellt aus den zuletzt angeführten Worten, daß Apollonius außer der in diesen Sätzen vorgetragenen Methode noch einer anderen sich bedient hat, um die vorgesetzte Multiplication auszuführen. Vielleicht hatte er am Anfange der Schrift die Multiplication der Zahlwerthe der Buchstaben der Reihe nach, ohne vorher die Pythmenes abzusondern, ausgeführt, um durch den Augenschein zu lehren, wie viel beschwerlicher und weitläuftiger dieser Weg sei, als die von ihm erfundene und in vorliegenden Sätzen vorgetragene Abkürzungsmethode. Dann stehen die Worte: *συμφώνως τοῖς ὑπὸ Ἀπολλωνίου* u. s. w. als ein Beweis vermittels des Augenscheins da, als wollte der Verfasser sagen: Das übereinstimmende Resultat lehrt also, daß diese abgekürzte Methode eben so sicher zum Ziele führt als jene weitläuftige.

Nun noch einige Worte über einen Zusatz, den Pappus bei einigen der vorliegenden Aufgaben macht. Pappus giebt uns, wie schon erwähnt, nicht die vollständigen Beweise für diese Sätze, dagegen verweist er bei mehren derselben auf den Beweis des Apollonius und zwar auf einen geometrischen Beweis; z. B. am Ende des 19. Satzes: Τὸ δὲ *γραμμικὸν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου δέδεικται* [20]).

20) Ähnlich bei den Sätzen 20, 22, 23, 24, 26.

Digitized by Google

Es erscheint uns ein wenig wunderbar, wenn wir hören, daß Jemand reine Zahlensätze geometrisch beweisen will. Wir müssen hier aber bedenken, daß Geometrie und Calcul bei den Griechen in einem Verhältnisse zu einander standen, welches gerade das umgekehrte ist von dem, in welchem beide Methoden bei uns zu einander stehen. Wollen wir einen schwierigen geometrischen Satz oder eine solche Aufgabe schnell und möglichst klar ausführen, so berechnen wir dieselben. Bei uns ist der Calcul die höhere Wissenschaft, und die Geometrie eine derselben untergeordnete Methode und einer der unzähligen Nahrungsstoffe für jenen. Die Griechen dagegen, bei denen der Calcul aus Mangel an ordentlichen Rechnungszeichen immer in seiner Kindheit geblieben ist, waren durchaus Geometer, und eine Rechnung oder ein arithmetischer Satz gewann für sie erst dann völlig überzeugende Kraft, wenn seine Wahrheit an einer Figur durch geometrische Construction dargethan war. Die Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ war gleich allen ähnlichen Sätzen im zweiten Buch Euklid's bei den Griechen ein rein geometrischer Satz, und sobald sie denselben auf die Rechnung anwenden, zeichnen sie die Figur daneben, um die Zulässigkeit einer solchen Übertragung, die in ihren Augen immer etwas Fremdartiges und Gewagtes an sich zu haben schien, zu beweisen. So trägt Euklides in dem zehnten Buche seiner Elemente die Lehre von den Irrationalzahlen als eine Lehre von den Irrationallinien vor; Diophant beweist die Sätze seiner Lehre von den figurirten Zahlen an der Figur, und ebenso, wie wir sogleich sehen werden, Theon seine Methode für die Ausziehung der Quadratwurzel, ja selbst für die Multiplication und Division. Eben so scheint also auch Apollonius die hier vorgetragenen Sätze geometrisch bewiesen zu haben. Dieser Standpunct ist bei der Beurtheilung der Griechischen Mathematiker durchaus im Auge zu behalten, weil nur er so manche Erscheinung zu erklären vermag, über welche seit Jahrhunderten Conjecturen über Conjecturen gehäuft worden sind, welche alle unnöthig gewesen wären, wenn man an das hier erwähnte Verhältniß der Griechischen Geometrie zum Calcul gedacht und nicht die Griechen immer auf unsern Standpunct gestellt hätte.

Ich beschließe diesen Gegenstand mit folgender Stelle aus Delambre's **Arithmétique des Grecs** [21]): **Cette idée d'Apollonius,**

21) Hist. de l'astron. anc. T. II. p. 30. 31. In Hoffmann's Übersetzung

de substituer dans les calculs les simples unités aux dixaines, centaines etc., abrégeait considérablement les calculs; et c'était un pas assez marqué vers le système indienne; il semble qu'après avoir réduit les octades d'Archimède en tranches qui n'avaient que quatre chiffres au lieu de 8, il aurait dû essayer les tranches de trois chiffres qui lui auraient permis de supprimer les lettres particulières et pointées pour les mille. Il aurait trouvé un avantage encore plus sensible en réduisant les tranches à deux chiffres, qui lui auraient épargné les lettres qui désignent les centaines; enfin en réduisant les tranches à un chiffre, il épargnait les lettres des dixaines et arrivait nécessairement à l'Arithmétique indienne, arabe et moderne. Il paraît au contraire n'avoir réduit les tranches de 8 chiffres d'Archimède à des tranches de 4, que pour rentrer dans les limites de l'Arithmétique des Grecs, et pour que chacune de ses tranches ne contînt que les chiffres communément admis. On est humilié et chagrin de voir une idée aussi simple et aussi féconde échapper à deux hommes comme Archimède et Apollonius, qui cependant ont travaillé l'un à étudier, l'autre à diminuer les inconvéniens de l'Arithmétique reçue. Mais ces grands génies méprisaient trop la pratique, ils ne se complaisaient qu'aux spéculations difficiles. En réduisant chaque tranche à un chiffre et donnant la plus grande étendue au principe de la valeur de position, il aurait senti le besoin d'un dixième caractère pour supprimer les points entre les tranches et remplir les places vides etc. etc. Faſſen wir kurz zuſammen, was dieſe Stelle ſagt, ſo reducirt ſich ihr Inhalt auf folgende zwei Wahrheiten: 1) Wenn Apollonius noch das und das gethan hätte, ſo hätte er noch das und das erfunden. 2) Apollonius und Archimedes haben das Zahlenſyſtem mit Stellenwerth nicht erfunden. Hinterher iſt leicht zu deduciren, wie eine große Erfindung hätte gemacht werden können; hiſtoriſch aber iſt ſie denn doch in der Regel auf ganz anderm Wege erfunden worden.

Dieſes nun iſt es etwa, was von den praktiſchen Rechnungen der Griechen mit gewöhnlichen Decimalzahlen uns aufbehalten iſt.

S. 39. 40 ſteht die Stelle bedeutend kürzer, und ebenſo wahrſcheinlich in der erſten Ausgabe des Originals.

Digitized by Google

Nun bleibt uns aber noch eine große Klasse von Rechnungen zu erläutern übrig, die Rechnung mit dem, wie es scheint, von Ptolemäus eingeführten Sexagesimalsystem, welche für uns doppelt wichtig ist, einerseits wegen ihrer allgemeinen Verbreitung in Europa während eines Zeitraums von etwa vierzehn Jahrhunderten, andrerseits weil in diesem System uns Rechnungen der Griechen aufbewahrt sind, welche sich in den Büchern, die dem Decimalsystem folgen, nicht mehr vorfinden, namentlich Divisionen und Wurzelausziehungen. Ptolemäus trägt nämlich in dem ersten Buche seiner Μεγάλη Σύνταξις [22]) die zu den astronomischen Berechnungen nothwendigen trigonometrischen Vorarbeiten vor, und lehrt die Sehnentafel (welche erst von den Arabern mit der Sinustafel vertauscht war) berechnen. Hier nun standen ihm, wenn er bei einiger Genauigkeit die immerwährende Rechnung mit Brüchen, die im Griechischen Zahlensysteme manche Unbequemlichkeit mit sich führte, vermeiden wollte, zwei Wege offen. Entweder konnte er, wie es z. B. in unsern logarithmisch-trigonometrischen Tafeln der Fall ist und wie auch die Astronomen des funfzehnten und sechszehnten Jahrhunderts thaten, für den Durchmesser des Kreises eine sehr große Zahl annehmen, so daß er mit Vernachlässigung der Brüche auch die Sehnen kleiner Bogen mit hinlänglicher Genauigkeit in ganzen Zahlen ausdrücken konnte; oder er konnte sich einer kleinern Zahl mit gruppenweise geordneten Unterabtheilungen bedienen. Ptolemäus wählte das Letztere, weil auch die Rechnung mit großen Zahlen den Griechen, deren einfache Zahlzeichen bei zehntausend aufhören, nicht bequem war; und zwar theilt er den Durchmesser in 120 Theile, μοῖραι, jede μοῖρα in 60 gleiche Theile, πρῶτα ἑξηκοστά, minuta prima, jede von diesen abermals in

22) Die allgemeine Verbreitung und die Bewunderung, welche diesem Werke zu Theil ward und welche es durch einen so langen Zeitraum genossen hat, mögen den Titel allmählig in den Superlativ verwandelt haben, so daß aus der μεγάλη σύνταξις eine μεγίστη σύνταξις ward. In dieser Form scheint der Titel des Werks zu den Arabern übergegangen zu sein, welche dasselbe immer Almajisti (المجسطي) nennen; wenigstens wüßte ich sonst keine passende Erklärung dieses bei den Arabern ganz allgemein eingeführten Namens zu geben. Da späterhin Ptolemäus, gleichwie Euklides, Archimedes und andere Griechische Mathematiker den Europäern viel früher aus Arabischen Übersetzungen, als aus dem Griechischen Original bekannt ward, so ging von den Arabern dieser Titel wieder nach Europa zurück, und kein Mensch fast nennt bis auf den heutigen Tag Ptolemäus Werk anders als den Almagest. Vergl. Wallis Op. T. II. p. 4.

Digitized by Google

60 Theile, δεύτερα ἑξηκοστά, minuta secunda und so fort [23]). Die Bezeichnung geschah in der Art, daß man über die μοιρᾶς oder Grade den gewöhnlichen Horizontalstrich, welcher den Zahlwerth der Buchstaben andeutet, setzte, bei den ersten Sechzigtheilen den einfachen Bruchaccent, (′), bei den zweiten Sechzigtheilen dasselbe Zeichen doppelt (″) u. s. w., wie wir unten bei den Rechnungsbeispielen sehen werden. Auch dieses System ist auf den Begriff der geometrischen Progression basirt, aber einer absteigenden, welche nach den Potenzen von $\frac{1}{60}$ fortschreitet. Es lag nahe, und bei späteren Astronomen soll sich dergleichen wirklich finden, die Reihe auch rückwärts aufsteigend fortzubilden, so daß man sechzig Grade oder μοιραί als eine Einheit der nächst höhern Ordnung, sechzig von diesen abermals als eine neue Einheit, und so fort betrachtete. Weil ich aber bei den Alten hiervon keine Spur gefunden habe, so halte ich mich dabei nicht länger auf [24]). Zur Vermeidung von Irrthümern war es bei diesem System zwar nicht durchaus nothwendig, aber doch wünschenswerth, das Fehlen eines der Glieder in der geometrischen Progression durch ein eigenes Zeichen anzudeuten, und so erscheint auf einmal in der Sehnentafel bei Ptolemäus das Nullzeichen mit einem Horizontalstrich

---

23) Die erste Eintheilung der μοιρά oder des gradus, wie es bei den Späteren heißt, nannte man auch schlechthin ἑξηκοστά, und Lateinisch minuta, die folgenden bezeichnete man dann zum Unterschiede bloß mit dem Zahlworte, secunda, tertia etc., nämlich minuta, woraus die jetzt gebräuchlichen Benennungen Minuten, Secunden, Tertien entstanden sind. Die Arabischen Übersetzer des Ptolemäus gaben den Ausdruck μοιρά wieder durch درجة, darajah (דרגה), scala, gradus; das Lateinische gradus ist also eine wörtliche Übersetzung aus dem Arabischen, dagegen ist das Französische und Englische degré, degree, mit Transposition der Buchstaben g und r, das Arabische Wort selbst.

24) Vergl. Wallis Op. T. II. p. 23. 24. Et pariter quo numeros grandiores vitarent, sexaginta integrorum collectionem Sexagenas vocabant, saltem posteriores, et harum totidem. Sexagenas secundas et sic porro quoties opus fuerit. Sic verbi gratia pro integri cujuspiam parte quarta ponebant 15′, pro $\frac{1}{5}$ ponebant 7′ 30″, pro $\frac{1}{7}$ ponebant 8 aut 9 aut 8′ 34″ aut 8′ 34″ 17‴. Similiter pro 227015 (qui est numerus dierum quibus Arabum epocha Hegira dicta serius incipit quam nostra) ponunt 1‴ 3″ 3′ 35°, hoc est, 1 sexagenam tertiam, 3 sexagenas secundas, 3 sexagenas primas et 35 dies. Hujusmodi processus per sexagesimalem multiplicationem etc. habetur eleganter descriptus et geometrice demonstratus in erudito simul et accurato tractatu graeco Barlaami Monachi, Λογιστικὴ dicta, quem Vossius refert ad annum Chr. 1350.

Digitized by Google

über ſich, ō, wahrſcheinlich als Abkürzung von οὐδέν, obgleich weder Ptolemäus ſelbſt, noch ſein Commentator Theon auch nur ein Wort, über die Einführung und den Gebrauch dieſes bis dahin ganz unbekannten Zeichens verlieren [25]). Möchte es vielleicht erlaubt ſein, aus dieſem argumentum a silentio den Schluß zu ziehen, daß das Zeichen ō erſt in ſpätere Manuſcripte hineingetragen worden iſt, nachdem man ſich durch den Gebrauch der aus dem Arabiſchen gemachten Bearbeitungen an daſſelbe gewöhnt hatte? Ich mag darüber nichts entſcheiden; auch könnte nur das Vorhandenſein oder das Fehlen des Zeichens in ſehr alten Handſchriften etwas für oder wider die Hypotheſe beweiſen.

Theon [26]) lehrt in demjenigen Capitel des erſten Buchs ſeines

---

25) In dem gedruckten Texte des Commentars von Theon findet ſich das Zeichen ō gar nicht, was die oben folgende Conjectur vielleicht beſtätigt. Maximus Planudes im vierzehnten Jahrhundert kennt die Null unter dem Namen τζίφρα; er iſt aber ein Schüler der Araber. (Vergl. die Note 61 des dritten Cap.). Sonderbar klingt, was Delambre (Hist. de l'astr. anc. T. II. p. 10) ſagt: Le zéro, en grec, se nommait τζιφρα . . . Ce mot a l'air un peu barbare, et je ne l'ai vu dans aucun auteur ancien. A l'article Planude nous avons dit que ce mot est arabe. Planudes ſagt ja doch ausdrücklich: Τιθέασι δὲ ἕτερόν τι σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν. Wie kann Jemand auf Grund dieſer Stelle ſagen, die Null werde von den Griechen τζίφρα genannt?! T. I. p. 547 ſagt derſelbe: Nous avons vu dans Planude que le zéro s'appelle plus ordinairement le *rien*. On trouve aussi ce mot dans Théon. Daß man bei Theon das Wort οὐδέν (nicht rien) findet, daran wird wohl Niemand zweifeln; in dem Sinn aber, daß es die Null bedeutet, findet man es wenigſtens in dem gedruckten Texte nicht. Wenig plauſibel auch ſcheint zu ſein, was derſelbe Schriftſteller (T. II. p. 14. 15) über das Zeichen 0 oder ō ſagt: Nous voyons ici le zéro tenir la place des degrés qui manquent dans la seconde ligne. Il est marqué comme chez nous, par le caractère 0. Cette lettre dans l'Arithmétique grecque signifie 70. Il ne pourrait donc sans équivoque se placer dans les nombres decimaux . . . Mais dans l'Arithmétique sexagésimale 0 ne peut rien signifier, puisque le nombre le plus fort est ξ = 60. Cependant pour le distinguer on le couvre ordinairement d'un trait horizontal ō. . . . Or la lettre o micron = 70 est la première des lettres qui n'entrent pas dans les fractions sexagésimales, elle suit immédiatement ξ qui signifie 60 et qui se rencontre souvent dans l'usage de ces fractions; tel paraît être le motif déterminant qui l'a fait choisir par les astronomes grecs pour le caractère du zéro. Das Zeichen ō für eine Abkürzung von οὐδέν zu halten, liegt denn doch wohl bedeutend näher, als dieſe künſtliche Herleitung.

26) Dieſer Commentator des Ptolemäus und Überarbeiter Euklid's lebte gegen

Digitized by Google

Commentars, welches ebenso wie das entsprechende Capitel der Μεγάλη Σύνταξις betitelt ist: Περὶ τῆς πηλικότητος τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν (Über die Größe der geraden Linien im Kreise) die Principe der Rechnung mit diesen von Ptolemäus gebrauchten Sexagesimaltheilen. Die Regel für die Multiplication ist einfach diese: Die Μοῖραί oder Grade, sagt er, welche die Stelle der Einheiten bei gewöhnlichen Zahlen vertreten, lassen als Multiplicator die verschiedenen Species (εἴδη) unverändert [27]). Dieselbe Erscheinung, fährt er fort, finden wir nicht bei den Theilen der Moira bestätigt, sondern dieselben verändern als Multiplicatoren die Species des Multiplicators. In welcher Art diese Veränderung geschieht, und welche Species in jedem Falle als Resultat hervorgeht, zeigt Theon ziemlich weitläuftig an einer Figur. Uns möge es hier genügen zu bemerken, daß erste Sechzigtheile (Minuten), in irgend eine Species multiplicirt, dieselbe um eine Stufe, zweite Sechzigtheile (Secunden) dieselbe um zwei Stufen herabziehen, und in der Art weiter fort. Die Regel für die Division beweist er ähnlich. Das Resultat ist folgendes: Die Moira als Divisor läßt die Species des Dividendus unverändert, die ersten Sechzigtheile erheben die Species des Dividendus um eine, die zweiten Sechzigtheile um zwei Stufen, u. s. w. Hierauf schreitet Theon zur Praxis und zeigt, wie man Zahlen, die in den drei Species

---

das Ende des vierten Jahrhunderts, und heißt zum Unterschiede Anderer dieses Namens ὁ Ἀλεξανδρεύς, Alexandrinus. Er war der Vater der berühmten Hypatia, und ist nicht zu verwechseln mit einem älteren Mathematiker Theon, den Ptolemäus selbst citirt, und von welchem wir im folgenden Capitel sprechen werden; dieser Letztere hat den Beinamen ὁ Σμυρναῖος. Das hier in Rede stehende Werk ist mit Ptolemäus zugleich, bloß Griechisch, herausgegeben unter dem Titel: Κλ. Πτολεμαίου μεγάλης συντάξεως βιβλ. $\overline{\gamma}$. Θεῶνος Ἀλεξανδρέως εἰς τὰ αὐτὰ ὑπομνημάτων βιβλ. $\overline{\iota\alpha}$. Basileae apud J. Walderum. 1538. fol. Die Syntaxis nimmt 327 Seiten ein. Dann folgt mit besonderem Titel Theon's Commentar, indem die Seitenzahlen wieder von 1 beginnen. Dieser Commentar ist meines Wissens noch nicht aus dem Griechischen übersetzt worden. Zwar sagt Montucla (T. I. p. 332): le commentaire sur l'Almageste n'a jamais été traduit, *excepté le premier livre*, es ist mir aber bis jetzt nicht gelungen, diese letzte gar zu allgemein gehaltene Beschränkung zu verificiren.

27) Ed. Basil. p. 40: τῆς μονάδος ἀμεταβέτου οὔσης καὶ ἑστώσης πάντοτε, τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἕσται· τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἡ μοιρὰ ἐφ' ὃ ἂν εἶδος πολλαπλασιασθῇ, αὐτὸ τὸ εἶδος φυλάττει. Wir werden auf diese merkwürdige Stelle noch einmal in einer andern Beziehung zurückkommen.

Digitized by

gegeben sind, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt; und zwar stellt er sich zunächst die Aufgabe, die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Zehnecks aufs Quadrat zu erheben. Die Ausführung will ich wörtlich übersetzen [28]): „Es sei uns vorgeschrieben die Seite des Zehnecks, welche, wie gezeigt werden wird, gleich 37° 4′ 55″ ($\overline{\lambda\zeta}$. δ′. νε″) ist, mit sich selbst zu multipliciren. Ich schreibe sie hin, und dieselbe noch einmal darunter, wie im Schema (ὡς ὑπογέγραπται, s. u.), und multiplicire zuerst die 37 Grade mit sich selbst, und mit den ersten und den zweiten Sechzigtheilen, dann die vier ersten Sechzigtheile mit den 37 Graden, mit sich selbst und mit den zweiten Sechzigtheilen, und endlich die zweiten Sechzigtheile mit den Graden, mit den ersten Sechzigtheilen und mit sich selbst; auf diese Art gelange ich am bequemsten zu dem Resultat. Die 37 Grade in sich selbst multiplicirt, geben 1369 Grade; in die 4 Minuten, 148 Minuten, und in die 55 Secunden, 2035 Secunden; ferner die 4 Minuten in die 37 Grade machen 148 Minuten; in sich selbst, 16 Secunden, und in die 55 Secunden, 220 Tertien; endlich die 55 Secunden in die 37 Grade geben 2035 Secunden, in die 4 Minuten, 220 Tertien, und in sich selbst geben sie 3025 Quarten; und die Anordnung der Zahlen geschieht, wie sie hier beigefügt ist.“ Das Schema am Rande nämlich sieht so aus:

$\overline{\lambda\zeta}$	δ′	νε″		
$\overline{\lambda\zeta}$	δ′	νε″		
$\overline{\alpha\tau\xi\vartheta}$	ϱμη′	βλε″		
	ϱμη′	ιϛ″	σκ‴	
		βλε″	σκ‴	γκε⁗

oder in unsern Ziffern ausgedrückt:

37°	4′	55″		
37°	4′	55″		
1369°	148′	2035″		
	148′	16″	220‴	
		2035″	220‴	3025⁗

28) Ed. Bas. p. 42. Der Kürze wegen habe ich für erste, zweite, dritte, vierte Sechzigtheile die jetzt gewöhnlichen Ausdrücke Minuten, Secunden, Tertien, Quarten gebraucht.

Digitized by Google

Theon fährt fort: „Dieſes faſſen wir ſo zuſammen: wenn wir zunächſt die 3025 Quarten durch 60 dividiren, ſo erhalten wir 50 Tertien und 25 Quarten; eben ſo geben die Tertien, welche mit den aus der Diviſion der Quarten hervorgegangenen 50 zuſammen 490 betragen, 8 Secunden und 10 Tertien; ferner die Secunden, zuſammen 4094, geben 68 Minuten und 14 Secunden; und endlich die Minuten, zuſammen 364, machen 6 Grade und 4 Minuten; und das Reſultat iſt $1375^{\circ}\ 4'\ 14''\ 10'''\ 25''''$; da Ptolemäus in der Folge, wo er dieſes vorträgt, nur noch die Secunden berückſichtigt, ſo nimmt er $1375^{\circ}\ 4'\ 14''$ beinahe an, und vernachläſſigt die Tertien und Quarten. Ebenſo, wenn die Multiplicatoren verſchiedene Zahlen ſind."

Dieſe Multiplication mit ſechzigtheiligen Brüchen iſt alſo der von Eutokius auf Decimalzahlen angewandten Methode vollkommen analog; ein unweſentlicher Unterſchied beſteht darin, daß Eutokius die einzelnen Reſultate ſchon reducirt hinſchreibt, was indeß in der Art der Griechiſchen Zahlenbezeichnung ſeinen Grund hat, da der Grieche nicht in derſelben Art, wie er mehr als 59 Sechzigtheile bezeichnet, auch mehr als 999 Hunderter u. ſ. w. in Zeichen ausdrücken kann.

Von beſonderem Intereſſe aber ſind für uns die Beiſpiele von Diviſion und von Wurzelausziehung bei Theon, weil ſie überhaupt die einzigen Beiſpiele ſind, welche die Griechiſche Literatur für dieſe Operationen uns darbietet. Darum iſt es aber auch um ſo nothwendiger, gerade hierin Theon's Verfahren ganz treu wiederzugeben, und nicht, wie Delambre namentlich in dem Beiſpiel von der Wurzelausziehung thut, zu zeigen, wie Theon es hätte machen können [29]). Da die Ausgabe des Originals nichts weniger als eine typographiſche Rarität iſt, ſo begnüge ich mich auch hier mit einer möglichſt treuen Überſetzung: „Es ſei ferner," ſagt Theon [30]), „die Aufgabe geſtellt,

29) Delambre Hist. de l'Astr. anc. T. II. p. 27. Arithm. der Griechen S. 35. Delambre geſteht ſeine Abweichung vom Original ſelbſt ein, und ſucht dieſelbe durch folgende Worte zu rechtfertigen: J'ai fait quelques changemens au calcul de Théon, mais sans rien supposer qui ne fût bien connu des Grecs. Warum aber überhaupt Abweichungen? Der angeführte Grund kann dieſelben ſchwerlich entſchuldigen, geſchweige denn motiviren, da es ſich um eine hiſtoriſche Kenntniß handelt. Was könnte man mit einem ſolchen Grundſatze aus fremden Werken nicht Alles machen!

30) Ed. Bas. p. 42.

Digitized by Google

eine gegebene Zahl durch Grade, Minuten und Secunden zu dividiren. Die gegebene Zahl sei 1515° 20′ 15″ (φφιε κ′ ιε″), und man solle sie dividiren durch 25° 12′ 10″ (μερίσαι αὐτὸν ἐπὶ τὸ κε ιβ′ ι″), das ist, man soll finden, wie oft die Zahl 25° 12′ 10″ in der Zahl 1515° 20′ 15″ enthalten ist. Wir nehmen zuerst den Quotienten 60 (μερίζομεν αὐτὸν πρῶτον παρὰ τὸν ξ), weil 61 zu groß ist, und wir subtrahiren sechzigmal die 25° und die 12′ und die 10″, und zwar zuerst die 25°; es werden 1500°; dann lösen wir die restirenden 15 Grade in 900 Minuten auf, und addiren diese zu den 20 Minuten; von der Summe, 920 Minuten, subtrahiren wir sechzigmal 12 Minuten, d. i. 720′; und endlich von den restirenden 200 Minuten und 15 Secunden subtrahiren wir sechzigmal 10, das ist 600 Secunden, oder 10 Minuten; es bleiben 190′ 15″ übrig. Indem wir nun wieder von vorne anfangen, dividiren wir diese durch 25°; der Quotient ist 7 (γίνεται ὁ μερισμὸς περὶ τὸν ζ), denn 8 ist zu groß (ὑπερπίπτει γὰρ περὶ τὸν η); und die aus der Multiplication [31]) hervorgegangenen 175 Minuten subtrahiren wir von den 190 Minuten; dann lösen wir die

31) Im Original heißt es: καὶ τὰ γενόμενα ἐκ τῆς παραβολῆς ἑξηκοστὰ ρ (d. i. κῶτα) ροε′ ἀφαιροῦμεν etc. Παραβάλλειν, παραβολή sind Ausdrücke, die bei den Griechischen Mathematikern einige Schwierigkeit haben. Παραβάλλειν heißt zunächst heranwerfen, heranlegen; daher wird das Verbum gebraucht z. B. in der Aufgabe, einen gegebenen Raum in ein Rechteck mit gegebener Seite zu verwandeln; Eucl. El. I, 44: Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν. Weil man nun durch Rechnung die zweite Seite des Rechtecks findet, wenn man den gegebenen Raum durch die gegebene Seite dividirt, so hat παραβάλλειν die Bedeutung von Dividiren, παραβολή Division erhalten. An unserer Stelle aber müssen wir wieder auf die Grundbedeutung zurückgehen; um den Rest zu erhalten, legt man das Product des Quotienten in den Divisor an den Dividendus; das ist die παραβολή. Ich habe dem Sinne nach Multiplication übersetzt. Weil in dem von Archimedes sogenannten rechtwinkligen Kegelschnitte das Quadrat der Ordinate, an den Parameter angelegt, d. h. in ein Rechteck verwandelt, dessen eine Seite der Parameter ist, zur andern Seite die Abscisse erhält, also gewissermaßen an die Abscisse herangeworfen dieselbe deckt, so nennt Apollonius diesen Kegelschnitt παραβολή, Parabel. In der Ellipse ist das Quadrat der Ordinate kleiner als das Rechteck aus dem Parameter in die Abscisse; daher wird bei jener Anlegung nicht die ganze Abscisse gedeckt, es fehlt noch etwas, (ἐλλείπει), daher diese Curve ἔλλειψις. In der Hyperbel ist jenes Quadrat größer als das genannte Rechteck, es fällt also bei der Anlegung über die Abscisse

Digitized by Google

übrig bleibenden 15 Minuten in 900 Secunden auf und addiren dazu die 15″, von der Summe subtrahiren wir siebenmal 12 Minuten, das ist 84 Secunden, weil auch die 7, Minuten sind; und es bleiben 831 Secunden Rest; endlich subtrahiren wir davon gleichfalls siebenmal 10 Secunden, nämlich 70 Tertien, oder eine Secunde und 10 Tertien, und es bleiben 829 Secunden 50 Tertien übrig. Diese dividiren wir abermals durch 25°, und der Quotient wird 33; die Multiplication (παραβολή, wie oben) giebt 825″, es bleiben 4″ 50‴ Rest, oder 290‴; dann subtrahiren wir wiederum dreiunddreißigmal 12 Minuten, welches 396‴ sind, so daß das Resultat der Division der 1515° 20′ 15″ durch 25° 12′ 10″ nahe 60° 7′ 33″ wird. Denn wenn wir umgekehrt diese letzteren multipliciren mit 25° 12′ 10″, so erhalten wir nahe 1515° 20′ 15″."

Diese Methode ist also ganz einfach, und läßt sich ebenso auf Decimalzahlen anwenden, indem man die sechzigtheiligen εἴδη durch Einer, Zehner, Hunderter u. s. w., aber in aufsteigender Ordnung ersetzt; Delambre führt nach der von Theon gegebenen Theorie eine solche Division in gewöhnlichen Zahlen aus; die Operation wird aber weitläuftig und beschwerlich, wenn die Zahlen groß sind, und somit die Anzahl der Species anwächst. Theon giebt kein Schema der Rechnung, wie er es bei der Multiplication thut; es läßt sich auch nicht gut einfach und verständlich hinschreiben, und ist überdies nicht nöthig, da die Operation auch ohne dasselbe ganz klar ist. Indeß will ich der Vollständigkeit halber das Schema, wie Delambre [32]) es anordnet, hieher setzen:

---

hinweg, ὑπερβάλλεται, daher ὑπερβολή. In abgeleiteter Bedeutung heißt παραβολή dann auch Vergleichung, die ja eben durch Aneinanderhalten geschieht.

32) Hist. de l'Astr. anc. T. II, p. 25. Arithm. d. Griechen S. 33.

Digitized by

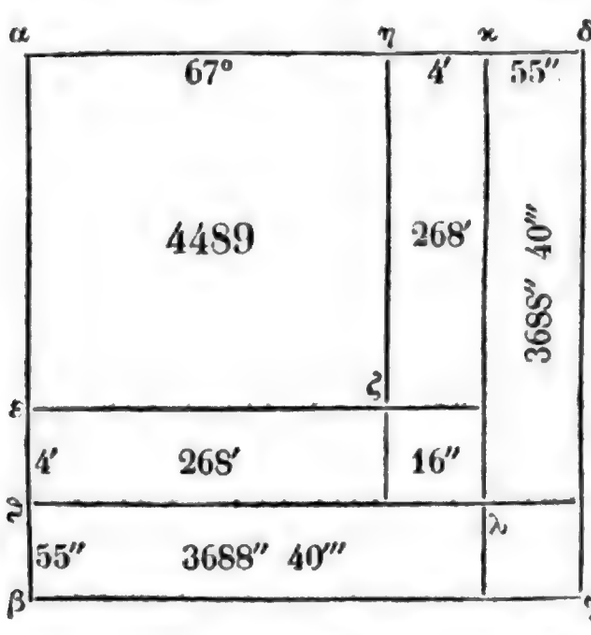
Dividendus	1515°	20′	15″	25° 12′ 10″	Divisor
25° × 60°	1500°			60°	erster Quotient
Rest	15° =	900′			
Summa		920′			
12′ × 60°		720′			
Rest		200′			
10″ × 60°		10′			
Rest		190′	15″	25° 12′ 10″	
25° × 7′		175′		7′	zweiter Quotient
Rest		15′ =	900″		
Summa			915″		
12′ × 7′			84″		
Rest			831″		
10″ × 7′			1″ 10‴		
Rest			829″ 50‴	25° 12′ 10″	
25° × 33″			825″	33″	dritter Quotient
Rest			4″ 50‴ =	290‴	
12′ × 33″				396‴	
			zu groß	106‴	

Der Fehler, den Theon durch die Annahme von 33″ macht, ist nicht ganz unbeträchtlich; denn die Multiplication des Divisors in den angenommenen Quotienten giebt das Resultat 1515° 20′ 16″ 51‴ 30⁗, welches fast um 2 Secunden größer ist als der Dividendus. Indeß kam es ihm hier nur auf die Theorie an, und zudem hätten 32″ ein viel zu kleines Resultat gegeben.

Bei der Ausziehung der Quadratwurzel nimmt Theon wieder seine Zuflucht zur Betrachtung der Figur, worauf Delambre in seiner Darstellung am angeführten Orte gar keine Rücksicht nimmt. Um ein treues Bild nicht nur von der Sache, sondern auch von Theon's Vorstellung zu geben, will ich die auf diesen Gegenstand bezügliche Stelle in ihrer ganzen Weitläuftigkeit hersetzen [33]): „Hierauf dürfte es

33) Ed. Bas. p. 44. 45.

es an der Reihe sein zu bemerken, wie wir, wenn ein quadratischer Raum gegeben ist, der keine in der Länge rationale Seite (πλευρὰν μήκει ῥητήν) hat, die Seite desselben durch Annäherung berechnen können. Die Sache ist für ein Quadrat, welches eine rationale Seite hat, aus dem vierten Satze des zweiten Buchs der Elemente klar, der so lautet: Wenn eine gerade Linie beliebig geschnitten wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie gleich den Quadraten der beiden Abschnitte und dem doppelten Rechtecke, welches von den Abschnitten gebildet wird. Denn wenn wir eine gegebene Quadratzahl, z. B. 144 haben, welche eine rationale Wurzel (im Or. πλευρά, Seite, wie oben und immer) hat, etwa die Linie $\alpha\beta$ [34]), und wir nehmen ein Quadrat, welches kleiner ist als jenes, etwa 100, dessen Seite 10 ist, und nehmen $\alpha\gamma$ gleich 10 an, und verdoppeln es, weil das Rechteck der Abschnitte doppelt sein soll, und dividiren mit den so entstandenen 20 in den Rest 44, so wird der Rest 4 das Quadrat von $\beta\gamma$, dieses selbst aber in der Länge 2 sein. Es war aber $\alpha\gamma = 10$, also wird die ganze Linie $\alpha\beta$ gleich 12 sein, was bewiesen werden sollte. Damit uns aber an einer in der Syntaxis vorkommenden Zahl das Wesen dieses theilweisen Wegnehmens vor Augen geführt werde, so wollen wir die Darstellung an der Zahl 4500 durchführen, deren Wurzel dort gleich 67° 4′ 55″ gesetzt wurde. Es liege ein quadratischer Raum $\alpha\beta\gamma\delta$ vor, allein im Quadrat rational (δυνάμει μόνον ῥητόν), dessen Inhalt 4500 Grade (μοῖραί) sein soll, und es werde verlangt, die Quadratwurzel desselben durch Annäherung zu berechnen. Da nun das der Zahl 4500 nächstliegende Quadrat mit rationaler Wurzel gleich 4489 ganzen Graden und dessen Seite gleich 67° ist, so werde von dem Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ das Quadrat $\alpha\zeta$ gleich 4489 Graden, dessen Seite 67° ist, weggenommen. Der Rest also, das heißt, der Gnomon $\beta\zeta\delta$ wird gleich



34) Die hiezu gehörige Figur fehlt in der Baseler Ausgabe.

11 Graden ſein. Dieſe löſen wir in Minuten auf und erhalten 660′. Dann nehmen wir εζ doppelt, weil zwei Rechtecke auf εζ ſtehen, da εζ gleich ζη iſt (ἔπειτα διπλασιάσαντες τὴν $\overline{\text{εζ}}$ διὰ τὸ δὶς ὑπὸ $\overline{\text{εζ}}$, ὥσπερ ἐπ᾽ εὐθείας τῇ $\overline{\text{εζ}}$ τὴν $\overline{\text{ζη}}$ λαμβάνοντες), und durch das Reſultat 134 dividiren wir die 660 Minuten und durch den Quotienten, 4 Minuten, erhalten wir jede der beiden Linien ϑκ, ηκ (καὶ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς δ′ $\overline{\text{α}}$ ἐξηκ. ἕξομεν ἑκατέραν τῶν $\overline{\text{ϑκ}}$ $\overline{\text{ηκ}}$); und wenn wir die Parallelogramme ϑζ, ζκ ausfüllen, ſo finden wir ſie gleich 536 Minuten, oder jedes von ihnen gleich 268 Minuten. Nun löſen wir abermals die reſtirenden 124 Minuten in 7440 Secunden auf, und ſubtrahiren auch das Ergänzungsquadrat ζλ, welches 16 Secunden beträgt, ſo daß wir, wenn wir um das vorige Quadrat αζ den Gnomon herumſetzen, das Quadrat αλ erhalten, deſſen Seite 67° 4′, das alſo ſelbſt gleich 4497° 56′ 16″ iſt. Nun bleibt noch der Gnomon βλδ gleich 2° 3′ 44″ oder 7424″ übrig. Wir nehmen alſo wieder ϑλ doppelt, weil ϑλ gleich λκ iſt, und dividiren durch dieſe 134° 8′ die 7424 Secunden, und erhalten in dem Quotienten, 55 Secunden, jede der beiden Linien ϑβ, κδ. Und wenn wir die Parallelogramme βλ, λδ ausfüllen, ſo erhalten wir dieſelben gleich 7377 Secunden 20 Tertien, und jedes derſelben gleich 3688″ 40‴; es bleiben als Reſt 46″ 40‴, welchen nahe kommt das Quadrat λγ, deſſen Seite 55 Secunden iſt, und ſo haben wir die Seite des Quadrats αβγδ, welches gleich 4500 Graden iſt, nahe gleich 67° 4′ 55″. Und im Allgemeinen, wenn wir die Quadratwurzel irgend einer Zahl ſuchen, ſo nehmen wir zuerſt die Wurzel der zunächſtliegenden Quadratzahl, dann verdoppeln wir dieſe und dividiren damit in den Reſt, nachdem wir denſelben in erſte Sechzigtheile aufgelöſt haben, und ſubtrahiren das Quadrat des Quotienten; dann löſen wir wieder den Reſt in zweite Sechzigtheile auf und dividiren ihn durch die doppelten Grade und Minuten, ſo erhalten wir nahe die geſuchte Zahl für die Seite des quadratiſchen Raumes [35]).“

35) Καὶ καθόλου ἐὰν ζητῶμεν ἀριθμοῦ τινὸς τὴν τετραγωνικὴν πλευράν, λαμβάνομεν πρῶτον τοῦ σύνεγγυς τετραγώνου ἀριθμοῦ τὴν πλευράν, εἶτα ταύτην διπλασιάζοντες καὶ περὶ τὸν γενόμενον ἀριθμὸν

Es wird in der Sache selbst gar nichts geändert, wenn die gegebene Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, schon in Ganzen und sechzigtheiligen Brüchen gegeben ist. Indeß will ich auch das Beispiel, welches Theon für diesen Fall giebt, weil es kurz ist, noch hieher setzen [36]). Er hat nämlich die Wurzel aus 2° 28′ zu ziehen, und sagt: „Ich beschreibe ein Quadrat und nehme dann ein kleineres Quadrat mit der Seite 1° an, dessen Inhalt gleichfalls 1° ist; denn diese Zahl ist dasjenige Quadrat, welches zunächst kleiner ist als die Zahl, deren Quadratwurzel gesucht wird. Nun subtrahire ich den einen Grad von den 2° 28′, den übrigbleibenden Grad löse ich in 60 Minuten auf, zu diesen addire ich die 28′, so entstehen 88′. Diese dividire ich durch das Doppelte des 1 Grades, nämlich durch 2°, und der Quotient ist 34′ (*καὶ γίνεται ὁ μερισμὸς περὶ τὸν λδ′*), zweimal 34′ ist 68′; wenn ich diese von den 88′ abziehe, bleiben 20 Minuten; diese löse ich in Secunden auf, so erhalte ich 1200 (im Original steht $\overline{\alpha\varsigma}$, 1006, Druckfehler für $\overline{\alpha\sigma}$); davon ziehe ich ab das Quadrat der 34 Minuten, das heißt 1156 Secunden und es bleiben noch 44 Secunden übrig; diese dividire ich wiederum durch das Doppelte von 1 Grad und 34 Minuten, das ist durch 3 Grade 8 Minuten, so wird der Quotient 15, und ich habe als Resultat gefunden 1° 34′ 15″ beinahe."

Auch bei dieser Rechnung steht am Rande eine Figur, wie bei dem ersten Beispiele; nur nimmt der Verfasser hier, weil er die Methode schon als bekannt voraussetzen darf, auf die Figur weniger Rücksicht, als oben, wenngleich die Vorstellung sich noch nicht ganz von derselben lossagt und immer noch auf einem geometrischen Fundamente ruht.

Man ersieht aus dem Mitgetheilten, daß diese Methode mit der von uns angewandten im Principe vollkommen übereinkommt,

---

μερίζοντες τὸν λοιπὸν ἀριθμὸν, ἀναλυθέντα εἰς πρῶτα ἑξηκοστὰ, ἀπὸ τοῦ ἐκ τῆς παραβολῆς γινομένου ἀφαιροῦμεν τετράγωνον, καὶ ἀναλύοντες πάλιν τὰ ὑπολειπόμενα εἰς δεύτερα ἑξηκοστὰ καὶ μερίζοντες παρὰ τὸν διπλασίονα τῶν μοιρῶν καὶ ἑξηκοστῶν, ἕξομεν ἔγγιστα τὸν ἐπιζητούμενον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγωνικοῦ χωρίου ἀριθμόν. Bei Delambre (Hist. p. 27) befindet sich ein Druckfehler, der auch in Hoffmann's Übersetzung S. 36 übergegangen ist, indem Beide Secunden statt Minuten geben, an der Stelle, die den Worten *ἀναλυθέντα εἰς πρῶτα ἑξηκοστὰ* entspricht.

36) Es steht Ed. Bas. p. 47.

Digitized by Google

und daß die Abweichungen beider in der Praxis nur in der verschiedenen Zahlenbezeichnung ihren Grund haben. Auch läßt sich leicht einsehen, daß dasselbe Verfahren, wenngleich bei großen Zahlen mit bedeutend vermehrter Schwierigkeit, sich auf das Griechische Decimalsystem anwenden ließe, wenn man die durch die Potenzen von zehn gebildeten Species an die Stelle der von Theon gebrauchten sechzigtheiligen substituirte. Daß indeß diese Methode von den Griechen bei Decimalzahlen nicht gebraucht worden ist, beweist, wie ich oben schon erwähnt, Eutokius, der die Ausziehung von Quadratwurzeln geflissentlich vermeidet, obgleich sein Commentar zu der Kreismessung Archimed's ihm gerade zu dieser Rechnung ununterbrochen Gelegenheit darbot.

Ich glaube in diesem Abschnitte ein treues Bild von den noch vorhandenen Griechischen Zahlenrechnungen entworfen zu haben. Wenigstens habe ich mich bemüht, jedesmal die eigenthümliche Vorstellungsweise der Alten gewissenhafter wiederzugeben, als es von Delambre geschehen ist, dessen Vorarbeit ich indeß nichts desto weniger mit gebührendem Danke anerkenne.

Digitized by Google

Fünftes Kapitel.

Die Griechische Arithmetik.

Der Gegenstand dieses Kapitels zwingt uns den bereits gewonnenen sichern historischen Boden einstweilen wieder zu verlassen, indem er uns in die Zeiten des grauen Alterthums und der unsicheren Sagen zurückversetzt. Es liegt indeß nicht in meinem Interesse, Sagen an einander zu reihen, bei denen wir weiter nichts thun können, als sie nacherzählen, und aus denen für die Geschichte der Wissenschaft keine Resultate gewonnen werden. Ich werde mich daher so viel als möglich nur an das Positive halten.

Dem speculativen Geiste der Griechischen Philosophen konnte ein Begriff, wie der der Zahl, nicht lange entgehen, und die Einfachheit, Ursprünglichkeit und Vieldeutigkeit dieses Begriffs machte ihn frühe zu einem beliebten Gegenstande philosophischer Untersuchungen. Es scheint, daß der berühmte (fast möchte man sagen, der berüchtigte) Pythagoras, um 550 v. Chr. G., hiezu die Bahn gebrochen hat, indem er als erstes Princip seines Systems den Begriff der Zahl hinstellte; und wie späterhin die Platonische Schule eine mächtige Pflegerin der Geometrie ward, so hat die Schule des Pythagoras die Zahlenlehre fortgebildet. Wir wollen es aber diesem großen Manne, von dem wir leider, so viel auch über ihn erzählt oder vielmehr geschwatzt wird, fast gar nichts wissen, nicht zum Vorwurf machen, daß die späteren Zöglinge seiner Schule und Fortpflanzer seines Namens sich bald in die zügellosesten excentrischen Träumereien verloren und daß man seinen Namen mißbrauchte, indem man Ausgeburten einer überspannten Phantasie, abgeschmackte Mysterien über die verborgenen Eigenschaften einzelner Zahlen, die jedes gesunden Geistes unwürdig sind, dadurch zu legitimiren suchte, daß man ihnen den großen Namen des alten Meisters an ihre freche leere Stirne schrieb. Man wird es mir nicht verargen, daß ich hier alle jene auf die Zahlenbetrachtung zurückgeführten kosmologischen Träu-

Digitized by Google

mereien bei Seite schiebe und das oft Gesagte, das nicht einmal erzählt zu werden verdiente, nicht wiederholen mag. Ich will dagegen den Mathematiker Pythagoras ins Auge fassen, und zwar nur eine, aber eine interessante Entdeckung, die er gemacht hat, hier mittheilen. Jedermann weiß aus seinen Knabenjahren her, welche schöne fruchtbare Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks Pythagoras entdeckt hat. Wenn alten Berichten Glauben zu schenken und nicht anzunehmen ist, daß eine späterer Entdeckung auf einen großen Namen der Vorzeit zurückgetragen worden ist, so hat Pythagoras sich nicht begnügt, seinen schönen Satz geometrisch ausgesprochen und bewiesen zu haben, sondern er hat auch, wie es heißt, eine Methode erfunden, rechtwinklige Dreiecke in rationalen darzustellen, d. h. zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl wird, eine Theorie, welche in der späteren Arithmetik von unberechenbarem Einfluß geworden ist und einen hohen Grad von Berühmtheit erlangt hat. Zwar giebt Pythagoras die Formel nicht allgemein, und selbst nach der Ergänzung, welche nach Proklus [1]) von Platon, nach Boethius von Archytas [2]) hinzugefügt ward, bleibt sie noch auf specielle Fälle eingeschränkt. Der Hauptschritt aber, nämlich der erste, war einmal geschehen, und es war sonach nicht mehr schwer, die specielle Methode zu verallgemeinern, und schon bei Euklides [3]) finden wir sie in ihrer völligen Allgemeinheit ausgesprochen. Proklus, der am angeführten Orte die Regel des Pythagoras und Platon uns aufbehalten hat, stellt dieselbe so dar: Παραδέδονται δὲ καὶ μέθοδοί τινες τῆς εὑρέσεως τῶν τοιούτων τριγώνων, ὧν τὴν μὲν εἰς Πλάτωνα ἀναπέμπουσι, τὴν δὲ εἰς Πυθαγόραν, ἣ ἀπὸ τῶν περιττῶν ἐστὶν ἀριθμῶν. Τίθησι γὰρ τὸν δοθέντα περιττὸν ὡς ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθήν· καὶ λαβοῦσα τὸν ἀπ' αὐτοῦ [4]) τετράγωνον καὶ τούτου μονάδα ἀφελοῦσα, τοῦ λοιποῦ τὸν ἥμισυν [5]) τίθησι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸν μείζονα· προσθεῖσα δὲ καὶ τούτῳ μονάδα, τὴν λοιπὴν ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν· οἷον τὸν τρία λαβοῦσα καὶ τετραγωνίσασα καὶ ἀφελοῦσα τοῦ

1) Comm. in Eucl. El. I. 47, ed. Bas. p. 111.

2) S. Chasles Gesch. d. Geom. S. 525 d. Übers.

3) Elem. X, 29. Lemma 1.

4) Ed. ἐπ' αὐτοῦ.

5) Ed. τὸν ἥμισυ; es muß entweder τὸν ἥμισυν, oder τὸ ἥμισυ heißen.

Digitized by Google

ἐννέα μονάδα, τοῦ $\overline{\eta}$ λαμβάνει τὸ ἥμισυ τὸν $\overline{\delta}$, καὶ τούτῳ προς τίθησι [6]) πάλιν μονάδα καὶ ποιεῖ τὸν $\overline{\varepsilon}$, καὶ εὕρηται τρίγωνον ὀρθογώνιον [7]) ἔχον τὴν μὲν τριῶν, τὴν δὲ [8]) τεσσάρων, τὴν δὲ $\overline{\varepsilon}$. Ἡ δὲ Πλατωνικὴ ἀπὸ τῶν ἀρτίων ἐπιχειρεῖ· λαβοῦσα γὰρ τὸν δοθέντα ἄρτιον, τίθησιν αὐτὸν [9]) ὡς μίαν πλευρὰν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τοῦτον διεχοῦσα δίχα καὶ τετραγωνίσασα [10]) τὸ ἥμισυ, μονάδα μὲν τῷ τετραγώνῳ προσθεῖσα, ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν, μονάδα δὲ ἀφελοῦσα [11]) τοῦ τετραγώνου, ποιεῖ τὴν ἑτέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν· οἷον τὸν τέσσαρα λαβοῦσα, καὶ τούτου τὸν ἥμισυν [12]) τὸν $\overline{\beta}$ τετραγωνίσασα καὶ ποιήσασα αὐτὸν $\overline{\delta}$, ἀφελοῦσα μὲν μονάδα ποιεῖ τὸν $\overline{\gamma}$, προσθεῖσα δὲ ποιεῖ τὸν $\overline{\varepsilon}$, καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ γενόμενον τρίγωνον, ὃ καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας ἀπετελεῖτο μεθόδου. d. h. „Es werden auch einige Methoden mitgetheilt, solche Dreiecke zu finden, deren eine man auf Platon, die andere, welche von ungeraden Zahlen anfängt, auf Pythagoras zurückführt. Man nimmt nämlich die gegebene ungerade Zahl als kleinere Kathete an. Von dem Quadrate derselben die Einheit subtrahirt, und der Rest halbirt, giebt die größere Kathete; zu dieser die Einheit addirt, giebt die Hypotenuse. Man nimmt z. B. 3 an, von dem Quadrate 9 nimmt man die Einheit weg, und halbirt den Rest 8, d. i. 4; dazu addirt man wiederum die Einheit, das macht 5, und es wird das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 3, 4, 5 gefunden [13]). Die

---

6) Ed. προτίθησι.

7) Ed. ὀρθωγώνιον.

8) δὲ fehlt in der Ausg.

9) Ed. αὐτῶν.

10) Ed. τετραγωνίας.

11) Ed. ἀφελῶν, offenbar falsch, weil überall μέθοδος als Subject gedacht wird.

12) Ed. ἥμισυ, s. N. 5.

13) Dieses Dreieck aus den Seiten 3, 4, 5 heißt auch zuweilen vorzugsweise das Pythagorische. Vitruvius IX, 2. sagt, Pythagoras habe mit Hilfe dieses Dreiecks gelehrt, praktisch einen rechten Winkel zu construiren, indem er drei Lineale, deren Längen sich wie die Zahlen 3, 4, 5 zu einander verhielten, zusammenstellte. In den Theologumenis Arithmeticae (Ed. Paris. p. 39. 40. Ed. Ast. p. 38. 39.) περὶ ἑξάδος heißt es: Καὶ νῦν δὲ, ἐφ' ὅσον ἑξάδι προσῆκεν, οὕτως ὁρατέον κατ' ἐπιδρομὴν ἀπὸ μονάδος ἐν τῷ Πυθαγορικῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὴν πρόοδον ποιουμένοις, etc. Die wunderbaren

Digitized by Google

Platonſche Methode beginnt von der geraden Zahl. Man nimmt nämlich irgend eine gegebene gerade Zahl, und ſetzt ſie als eine Kathete; dieſe halbirt und die Hälfte aufs Quadrat erhoben, und dem Quadrate die Einheit hinzugefügt, giebt die Hypotenuſe; die Einheit von dem Quadrate ſubtrahirt, giebt die andere Kathete. Nimmt man z. B. 4 an, ſo giebt die Hälfte 2 aufs Quadrat erhoben, 4. Davon die Einheit ſubtrahirt, giebt 3, die Einheit addirt giebt 5, und man erhält daſſelbe Dreieck, welches aus der erſten Methode hervorging."

Wenn wir dieſe beiden Regeln in moderne algebraiſche Formeln uns überſetzen, ſo ſetzen wir in der Pythagoräiſchen Regel die angenommene ungerade Zahl $2m - 1$, ihr Quadrat iſt $4m^2 - 4m + 1$, davon 1 ſubtrahirt und der Reſt halbirt, giebt $2m^2 - 2m$ für die zweite Kathete, und 1 dazu addirt, $2m^2 - 2m + 1$ für die Hypotenuſe. Demnach ſind die drei Zahlen, welche den Seiten des Dreiecks entſprechen

$$2m^2 - 2m + 1$$
$$2m^2 - 2m$$
$$2m - 1.$$

Dieſe Regel umfaßt alſo nur diejenigen rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenuſe und größere Kathete um 1 verſchieden ſind. Die allgemeine Formel giebt bekanntlich für die Hypotenuſe den Ausdruck $m^2 + n^2$, und für die Katheten $m^2 - n^2$ und $2mn$. Vergleichen wir beide Formeln mit einander, ſo ergiebt ſich, daß die Pythagoräiſche ſich auf den Fall beſchränkt, wo $(m^2 + n^2) - 2mn = 1$, d. h. $m - n = 1$ oder $n = m - 1$ iſt, wo alſo die beiden angenommenen Zahlen, aus denen das rechtwinklige Dreieck gebildet wird, um 1 verſchieden ſind [14]).

Eigenſchaften dieſes Dreiecks beſtehen nach des Verfaſſers Anſicht hauptſächlich darin, daß in demſelben ſich ein rechter Winkel, zwei ſchiefe einander ungleiche, zuſammen aber jenem gleiche ſich befinden; daß ferner drei die kleinere, vier die größere Kathete, fünf die Hypotenuſe und ſechs der Flächeninhalt iſt.

14) Von dieſer Formel für das rechtwinklige Dreieck ſcheint Boſſut nichts zu wiſſen. Er ſagt I, 5. 6. De toutes les découvertes arithmétiques de Pythagore, vraies ou supposées, le temps n'a réspecté que sa table de multiplication. Wir haben aber oben geſehen, daß die Multiplicationstafel nur durch ein Mißverſtändniß in der Ausgabe von Boethius Geometrie den Namen des Abacus Pythagoricus erhalten hat. Es wäre alſo weniger als wenig, wenn die Erfindung dieſer Tafel das Einzige wäre, was wir von Pythagoras Arithme-

Digitized by Google

Platon nimmt eine gerade Zahl, $2m$, als erste Kathete an; dann wird nach der Vorschrift die andere Kathete $m^2 - 1$, die Hypotenuse $m^2 + 1$. Vergleichen wir diese Ausdrücke mit den allgemeinen, so lehrt der Augenschein, daß hier $n = 1$ gesetzt ist. Nimmt man nun zur Bildung rechtwinkliger Dreiecke eine der beiden Zahlen, m, willkührlich an, so kann man für n, welches kleiner als m sein muß, successive die Zahlen $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$ .... 3, 2, 1 setzen, und jede einzige dieser Combinationen giebt ein von den übrigen verschiedenes Dreieck. Von diesen $m - 1$ Werthen, welche n für ein gegebenes m haben kann, benutzen die beiden mitgetheilten Formeln nur die beiden Extreme. Setzt man z. B. $m = 5$, so kann n successive 4, 3, 2, 1 sein; davon nimmt Pythagoras nur 4, Platon nur 1 an, und Jener findet nur das Dreieck 41, 40, 9, Dieser nur das Dreieck 13, 12, 5, und zwischen beiden bleiben die Dreiecke 17, 15, 8 und 29, 21, 20 übrig.

Man hat über die Erfindungen, welche Pythagoras in der Arithmetik gemacht hat, so viel geschrieben, freilich nur in unbestimmten Ausdrücken, daß Mancher, der sich um die Geschichte nicht näher bekümmert hat, sich wundern wird, wenn ich sage, das eben Vorgetragene sei das Einzige, was wir von der Arithmetik vor Euklides wissen. Und doch ist dem vollkommen also. Zwar werden uns noch Demokritus, Archytas, Eudoxus, Philippus, Speusippus, Xenokrates, Theophrastus und Andere als Verfasser arithmetischer Werke genannt, aber ihre Namen, und zum Theil die Titel ihrer Bücher, sind Alles, was uns über sie bekannt ist; Grund genug für uns, uns nicht länger bei ihnen aufzuhalten. Wir gehen also geradezu auf Euklides über.

Es gab in Europa eine Zeit, da man Alles, was in Euklid's Elementen enthalten war, als bekannt voraussetzen durfte. Die Zeit ist jetzt nicht mehr. Ich sehe mich daher genöthigt, den Inhalt des arithmetischen Theils seines Werks meinen Lesern etwas ausführlicher vor Augen zu führen, als es vor dreihundert Jahren nöthig gewesen wäre.

Gewöhnlich nennt man die Bücher 7 — 10 der Elemente die

---

tisches haben. Reimer, der zu seiner Übersetzung des Bossutschen Werks namentlich im ersten Bande bedeutende Zusätze geliefert, hat diesen Fehler berichtigt und die Theorie des rationalen Dreiecks nach Proklus hinzugefügt. Th. I. S. 31 folgd.

arithmetiſchen, die übrigen die geometriſchen. Dieſe Eintheilung iſt aber weder nach Griechiſcher, noch nach unſerer Vorſtellung ganz richtig. Denn das zehnte Buch iſt der Form nach geometriſch, indem es nicht von Irrationalzahlen, ſondern von Irrationallinien handelt. Erlauben wir uns aber, dieſe von Euklides geometriſch vorgetragene Theorie nach unſerer Denkart als eine arithmetiſche zu betrachten und zu behandeln, ſo dürfte es ſchwer werden, hier zwiſchen Form und Inhalt, als Eintheilungsgrund, eine ſtrenge Grenze zu ziehen. Jedenfalls aber müſſen wir dann das zweite Buch auch zu den arithmetiſchen zählen, da von ſeinen vierzehn Sätzen die erſten zehn gleichfalls nur geometriſch ausgeſprochene und bewieſene, aber ihrem Weſen nach lauter arithmetiſche Wahrheiten enthalten. Dieſe zehn Sätze ſind, arithmetiſch ausgedrückt, folgende:

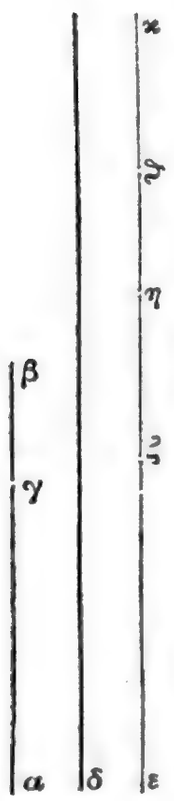
1. $ab + ac + ad + \ldots = a\,(b + c + d + \ldots)$
2. $(a + b)^2 = (a + b)\,a + (a + b)\,b$
3. $(a + b)\,a = ab + a^2$
4. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
5. $ab + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$
6. $(a + b)\,b + \frac{1}{4}a^2 = (\frac{1}{2}a + b)^2$
7. $(a + b)^2 + a^2 = 2\,(a + b)\,a + b^2$
8. $4\,(a + b)\,a + b^2 = (2a + b)^2$
9. $a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a - b}{2}\right)^2$
10. $b^2 + (a + b)^2 = 2\,(\frac{1}{2}a)^2 + 2\,(\frac{1}{2}a + b)^2$

Wir beſitzen auch ſchon eine arithmetiſche Übertragung dieſer zehn Sätze von einem ſpätern Griechen, Barlaam, der Mönch genannt, aus dem vierzehnten Jahrhundert, welche den Titel führt: *ἀριθμητικὴ ἀπόδειξις τῶν γραμμικῶς ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν στοιχειῶν ἀποδειχθέντων*, und die von Conrad Daſypodius zugleich mit dem zweiten Buche Euklid's herausgegeben worden iſt [15]). Die Art der Beweiſe in dieſer Bearbeitung iſt ganz dieſelbe, wie in dem ſiebenten und den folgenden Büchern Euklid's. Als Probe wähle ich

15) Εὐκλείδου τῶν πέντε καὶ δέκα στοιχειῶν ἐκ τῶν τοῦ Θεῶνος συνουσιῶν τὸ δεύτερον καὶ Βαρλάαμ μονάχου ἀριθμητικὴ ἀπόδειξις τῶν γραμμικῶς ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν στοιχειῶν ἀποδειχθέντων. Per Cunradum Dasypodium. 8. (Am Ende der praefatio ſteht die Jahrzahl 1564).

Digitized by Google

den vierten der genannten Sätze aus, welcher bei Euklides so lautet: Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Barlaam übersetzt den Satz so: Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς (τε) ἀπὸ τῶν μερῶν τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν μερῶν ἐπιπέδῳ. Die Ausführung ist folgende: Ἀριθμὸς γὰρ ὁ $\overline{αβ}$ διαιρήσθω εἰς δύο ἀριθμοὺς τοὺς $\overline{αγ}$ $\overline{γβ}$. Λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{αβ}$ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $\overline{αγ}$ $\overline{γβ}$ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν $\overline{αγ}$ $\overline{γβ}$ ἐπιπέδῳ. Ἔστω γὰρ ἀπὸ μὲν τοῦ $\overline{αβ}$ τετράγωνος ὁ $\overline{δ}$, ἀπὸ δὲ τοῦ $\overline{αγ}$ ὁ $\overline{εζ}$, ἀπὸ δὲ τοῦ $\overline{γβ}$ ὁ $\overline{ηθ}$, ἐκ δὲ τῶν $\overline{αγ}$ $\overline{γβ}$ ἑκάτερος τῶν $\overline{ζη}$, $\overline{θκ}$. Ἐπεὶ τοίνυν ὁ $\overline{αγ}$ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν $\overline{εζ}$, ὁ ἄρα $\overline{αγ}$ μετρεῖ τὸν $\overline{εζ}$ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας· πάλιν ἐπεὶ ὁ $\overline{γβ}$ τὸν $\overline{γα}$ πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν $\overline{ζη}$, μετρεῖ ἄρα τὸν $\overline{ζη}$ ὁ $\overline{αγ}$ κατὰ τὰς ἐν τῷ $\overline{γβ}$ μονάδας· ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν $\overline{εζ}$ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ· ὅλον ἄρα τὸν $\overline{εη}$ μετρεῖ ὁ $\overline{αγ}$ κατὰ τὰς ἐν τῷ $\overline{αβ}$ μονάδας. Ὁ ἄρα $\overline{αβ}$ πολλαπλασιάσας τὸν $\overline{αγ}$ ἐποίησε τὸν $\overline{εη}$. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ὁ $\overline{ηκ}$ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ ἐκ τῶν $\overline{αβ}$ $\overline{βγ}$· καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{αβ}$ τετράγωνος ὁ $\overline{δ}$· ἐὰν δὲ ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς ἐκ τοῦ ὅλου καὶ ἑκατέρου τῶν μερῶν ἐπιπέδοις· ἴσος ἄρα ὁ $\overline{δ}$ τῷ $\overline{εκ}$· ἀλλὰ μὴν ὁ $\overline{εκ}$ συγκείμενός ἐστιν ἔκ τε τῶν ἀπὸ τῶν $\overline{αγ}$ $\overline{γβ}$ τετραγώνοις καὶ τοῦ δὶς ἐκ τῶν $\overline{αγ}$ $\overline{γβ}$ ἐπιπέδου· ὁ δὲ $\overline{δ}$ ὑπάρχει ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{αβ}$ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ $\overline{αβ}$ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $\overline{αγ}$ $\overline{γβ}$ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν $\overline{αγ}$ $\overline{γβ}$ ἐπιπέδῳ. Eine arithmetische Anwendung dieses nämlichen Satzes haben wir schon im vorigen Kapitel betrachtet, bei Gelegenheit der Theonschen Methode der Wurzelausziehung. Aber der Satz ward da noch geometrisch ausgesprochen, sowie Theon's ganze Darstellungsweise noch geometrisch war. Bei Barlaam erscheint der Satz rein arithmetisch, und ähnlich sind die neun übrigen



Sätze behandelt. Von den sonstigen arithmetischen Arbeiten Barlaam's werden wir in Zukunft gehörigen Orts mehr sagen. Wir kehren jetzt zu Euklides zurück.

Das siebente, achte und neunte Buch der Elemente enthält die eigentliche Arithmetik, nämlich die der Nationalzahlen, welche auch von dem Verfasser als solche vorgetragen wird, und sowohl der Gegenstand als die Behandlungsart unterscheidet diese Bücher wesentlich von dem zehnten. Da diese Bücher das älteste Werk sind, in welcher die theoretische Zahlenlehre behandelt wird, und da dieselben also als die Grundlage aller späteren Untersuchungen der Art angesehen werden können, so sei mir hier eine etwas weitläuftigere Analyse und eine Aufzählung wenigstens der wichtigeren und für den späteren Stand der Wissenschaft einflußreicheren Sätze erlaubt, nachdem ich einige Worte über Euklid's Methode vorausgeschickt habe. Die Euklidische Arithmetik unterscheidet sich von den sämmtlichen späteren sehr zahlreichen Werken der Art durch die wissenschaftliche Strenge und Gründlichkeit der Beweise. Aber seine Beweise für Zahlenwahrheiten haften insofern an geometrischen Vorstellungen, als er, in Ermangelung passender Symbole, deren Einführung späteren Jahrhunderten vorbehalten blieb, zur sinnlichen Darstellung allgemeiner, aller zufälligen accessorischen Specialitäten entäußerter Zahlen sich der geraden Linien bedient. Cossali [16]) nennt eine ähnliche Erscheinung in dem Werke des Leonard Bonacci nicht unpassend eine **Analisi speciosa lineare**, zum Unterschiede der neueren **Analisi speciosa letterale**. Daß in manchen Handschriften neben diesen die allgemeinen Zahlen darstellenden Linien bestimmte Zahlenwerthe, welche für den speciellen Fall passen, sich befinden, wie Hornsby aus einem Manuscript der Bodleyanischen Bibliothek mittheilt [17]), thut der Sache weiter keinen Abbruch. Es sind dieselben blos als erläuternde Beispiele, vielleicht von der Hand eines späteren Abschreibers, anzusehen. Um Euklid's lineäre Methode zu veranschaulichen, wähle ich hier einen seiner einfachsten Beweise, nämlich den des 37. Satzes des siebenten Buchs aus, welcher so lautet:

Wenn zwei Zahlen eine (andere) Zahl messen, so

16) Orig. dell Alg. T. I. p. 37.

17) Euklid's Elemente übers. von Lorenz u. Mollweide. 4. Ausg. Halle u. Berlin. 1818. Vorrede S. XIX.

Digitized by Google

wird auch die kleinſte Zahl, welche von jenen gemeſſen wird, dieſelbe Zahl meſſen.

Beweis. Zwei Zahlen, α, β, ſollen eine Zahl $\overline{\gamma\delta}$ meſſen; die kleinſte, welche von ihnen gemeſſen wird, ſei ε; ſo ſage ich, daß auch ε die $\overline{\gamma\delta}$ mißt. Denn wenn ε die $\overline{\gamma\delta}$ nicht mißt, ſo wird ε, wenn es die $\overline{\delta\zeta}$ mißt, einen Reſt $\overline{\zeta\gamma}$ kleiner als ε laſſen. Da nun α und β die ε, ε aber die $\overline{\delta\zeta}$ mißt, ſo werden auch α und β die $\overline{\delta\zeta}$ meſſen. Aber α und β meſſen auch die ganze Zahl $\overline{\gamma\delta}$, folglich auch den Reſt $\overline{\gamma\zeta}$, welcher kleiner iſt als ε, was unmöglich iſt (weil ε ſchon die kleinſte Zahl war, die von α und β gemeſſen wird). Es iſt alſo nicht möglich, daß ε die $\overline{\gamma\delta}$ nicht mißt; daher mißt ſie dieſelbe; was zu beweiſen war [18]).

Die Baſeler Ausgabe der Elemente von 1533, welche ich zur Hand habe, ſetzt ebenfalls neben die Linien überall entſprechende Zahlenbeiſpiele. Bei dem vorliegenden Satze iſt $\alpha = 2$, $\beta = 3$, ε alſo $= 6$ geſetzt, $\overline{\zeta\gamma}$ unbeſtimmt durch ein Kreuzchen $+$ bezeichnet, und $\overline{\delta\zeta}$ wahrſcheinlich durch einen Druckfehler gleich 8 ſtatt 6 geſetzt, wie Lorenz es bezeichnet. Lorenz hat nämlich mit mehren andern Herausgebern und Überſetzern dieſe beigeſchriebenen Zahlen in der Art ausgedrückt, daß er ſtatt der Linien eine Reihe von Puncten in der angegebenen Anzahl ſetzt, was mir nicht paſſend ſcheint, da es der urſprünglichen und beabſichtigten Darſtellung der Allgemeinheit ſchadet.

Nach dieſer allgemeinen Bemerkung gehe ich zur Darſtellung

---

18) Weil die Kürze des Griechiſchen Originals ſich in keiner Überſetzung erreichen läßt, ſo ſtelle ich dieſen Satz, der ja einmal als Probe der Darſtellung dienen ſoll, in ſeiner Originalgeſtalt hieher:

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ ἀριθμόν τινα τὸν $\overline{\gamma\delta}$ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν $\overline{\varepsilon}$· λέγω ὅτι καὶ ὁ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\gamma\delta}$ μετρεῖ· εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\gamma\delta}$, ὁ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\zeta\delta}$ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν $\overline{\gamma\zeta}$, καὶ ἐπεὶ οἱ $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ τὸν $\overline{\varepsilon}$ μετροῦσιν, ὁ δὲ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\delta\zeta}$ μετρεῖ, καὶ οἱ $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ ἄρα τὸν $\overline{\delta\zeta}$ μετρήσουσιν· μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν $\overline{\gamma\delta}$· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν $\overline{\gamma\zeta}$ μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ $\overline{\varepsilon}$· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\gamma\delta}$, μετρεῖ ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Digitized by Google

der Euklidischen Arithmetik selbst über. Wenn ich im Folgenden mich werde veranlaßt sehen, einen oder den andern Euklidischen Beweis mitzutheilen, werde ich nur seinen Beweisgang angeben, ohne mich strenge an seine Worte zu halten.

Siebentes Buch.

Dieses Buch beginnt mit den Definitionen für die drei arithmetischen Bücher. Euklides definirt die Einheit, die Zahl, den Theil (μέρος, d. i. $\frac{1}{n}$), den Bruch (Lorenz's Übersetzung von μέρη, $\frac{m}{n}$) [19]), das Vielfache, die gerade, ungerade, gerademal gerade (ἀρτιάκις ἄρτιος), gerademal ungerade (ἀρτιάκις περισσός), ungerademal ungerade Zahl (περισσάκις περισσός), die Primzahl (πρῶτος), Primzahlen zu einander und deren Gegensätze, die zusammengesetzte Zahl und zusammengesetzte Zahlen zu einander, die Multiplication, die Flächenzahl (ἐπίπεδος), die Körperzahl (στερεός), die Quadrat- und Kubikzahl [20]), endlich die proportionirten, ähnlichen und vollständigen (τέλειος) Zahlen. Die Gegensätze der letztgenannten, die übervollständige (ὑπερτελής) und die mangelhafte Zahl (ἐλλιπής), welche bei den späteren Arithmetikern vorkommen, betrachtet Euklides noch nicht.

Satz 1. Wenn von zwei ungleichen gegebenen Zahlen immer abwechselnd die kleinere von der größern weggenommen wird, und der Rest den nächst vorhergehenden nie genau mißt, bis endlich die Einheit übrig bleibt, so sind die gegebenen Zahlen Primzahlen zu einander. (Beweis apagogisch).

S. 2. 3. Für zwei und mehre Zahlen das größte gemeinschaftliche Maaß zu finden.

---

19) Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

20) Ich muß hier bemerken, daß die Griechischen Mathematiker die Namen der figurirten Zahlen immer als Masculina, die Namen der entsprechenden geometrischen Figuren dagegen immer als Neutra gebrauchen. So heißt τρίγωνον das Dreieck, τρίγωνος die dreieckige Zahl, τετράγωνον das Quadrat, τετράγωνος die Quadratzahl, ἐπίπεδον die Ebene, ἐπίπεδος die ebene oder Flächenzahl, u. s. w. Alle diese Namen sind Adjectiva, und es ist in dem einen Falle ἀριθμός, in dem andern σχῆμα zu ergänzen. Nur κῦβος ist immer Masculinum.

Digitized by

S. 4 — 22. Von Theilen und Brüchen. Dieſe Sätze ſind die in arithmetiſche Form umgegoſſenen Lehren der im fünften Buch geometriſch vorgetragenen Theorie der Proportionen.

S. 23. 24. Primzahlen zu einander ſind die kleinſten unter allen Zahlen, welche mit ihnen einerlei Verhältniß haben, und umgekehrt.

S. 25. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einander, ſo iſt die Zahl, welche eine von beiden mißt, eine Primzahl zu der andern.

S. 26. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einer Zahl, ſo iſt auch ihr Product eine Primzahl zu derſelben Zahl.

S. 27. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einander, ſo iſt auch das Quadrat der einen eine Primzahl zu der andern.

S. 28. Sind zwei Zahlen zu jeder von zwei andern Primzahlen, ſo iſt auch das Product der erſtern eine Primzahl zu dem Product der letztern.

S. 29. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einander, ſo ſind auch alle ihre Potenzen Primzahlen zu einander. (Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινὰ, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· κἂν οἱ ἐξαρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει).

S. 30. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einander, ſo iſt auch deren Summe zu jeder von beiden eine Primzahl, und umgekehrt.

S. 31. Jede Zahl iſt eine Primzahl zu jeder Zahl, welche nicht von ihr gemeſſen wird.

S. 32. Wird das Product zweier Zahlen von einer Primzahl gemeſſen, ſo wird dieſe Primzahl auch eine der urſprünglichen beiden Zahlen meſſen [21]).

---

21) Ich muß hier anführen, daß Grunert in der Fortſ. von Klügels Wörterbuch Th. V. S. 1089 folg. in Betreff dieſer Euklidiſchen Sätze nicht ganz genau iſt. Unter der Überſchrift „I. Satz des Euklides von den Primzahlen" giebt er folgende drei Sätze:

1. Wenn jede der beiden Zahlen P, Q kleiner als die Primzahl p iſt, ſo iſt das Product PQ nicht durch p theilbar.
2. Geht die Primzahl p weder in P noch in Q auf, ſo geht ſie auch in PQ nicht auf.

Digitized by

S. 33. Jede zuſammengeſetzte Zahl wird von irgend einer Primzahl gemeſſen.

S. 34. Jede Zahl iſt entweder ſelbſt eine Primzahl, oder wird von einer Primzahl gemeſſen.

S. 35 — 41. Verhältniſſe in kleinſten Zahlen, Aufſuchung des kleinſten Dividendus und Ähnliches.

Achtes Buch.

Stetige Proportion und Progreſſion (ἑξῆς ἀνάλογοι ἀριθμοί), Quadrat- und Cubikzahlen, ähnliche Flächen- und Körperzahlen. Hieraus nur einige Hauptſätze:

S. 1. Mehre ſtetig proportionirte Zahlen, deren äußerſte Primzahlen zu einander ſind, ſind die kleinſten in ihrem Verhältniß.

S. 9. 10. Wenn zwiſchen zwei Zahlen, welche Primzahlen zu einander ſind, einige mittlere Proportionalzahlen (κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογοι) fallen, ſo fallen deren ebenſoviele zwiſchen jede der beiden Zahlen und die Einheit, und umgekehrt.

S. 11. 12. Zwiſchen zwei Quadratzahlen fällt eine, zwiſchen zwei Cubikzahlen fallen zwei mittlere Proportionalzahlen. (S. 18, 19 Ausdehnung deſſelben Satzes auf ähnliche Flächen- und Körperzahlen).

S. 13. Sind mehre Zahlen ſtetig proportionirt, ſo ſind alle ihre gleichnamigen Potenzen auch ſtetig proportionirt.

S. 14 — 17. Meſſen einander Quadrat- oder Cubikzahlen, ſo meſſen einander auch ihre Seiten, und umgekehrt.

Neuntes Buch.

S. 1 — 19. Fortſetzung derſelben Materie.

S. 8. Wenn von der Einheit an beliebig viele Zahlen ſtetig pro-

---

3. Geht alſo die Primzahl p in PQ auf, ſo muß ſie entweder in P oder in Q aufgehen.

„Dieſen Satz, welcher in der Zahlenlehre ſehr geſchätzt wird, hat ſchon Euklides (VII. 32)." Und S. 1159 citirt er als Euklidiſch „den oben in I bewieſenen Satz." Es iſt hier nicht recht klar, welchen Satz er eigentlich meint. No. 3 iſt allerdings Euklidiſch, VII. 32. Die beiden andern aber, No. 1, 2, ſind wenigſtens in der hier ausgeſprochenen Form nicht Euklidiſch, wenngleich ſie ſich aus VII. 26 leicht herleiten laſſen. Jedenfalls aber iſt Grunert's Anführung ungenau.

Digitized by Google

proportionirt sind, so ist die dritte von der Einheit eine Quadratzahl, und ebenso allemal eine um die andere (οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες); die vierte ein Cubus, und ebenso alle folgenden, mit Überspringung von je zweien; die siebente zugleich Cubus und Quadrat, und ebenso alle folgenden mit Überspringung von fünfen.

Der Grieche sagt hier wieder die dritte, die vierte, die siebente, wo wir die zweite, die dritte, die sechste sagen würden. Ich habe darüber schon oben gesprochen. Der Satz erhellt unmittelbar aus der Betrachtung der Reihe

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12} \ldots .$

S. 9. Sind mehre Zahlen von der Einheit an stetig proportionirt, so sind, wenn die erste nach der Einheit eine Quadratzahl ist, alle folgenden Quadratzahlen, und wenn die erste nach der Einheit eine Cubikzahl ist, alle folgenden Cubikzahlen.

S. 12. Sind von der Einheit an mehre Zahlen stetig proportionirt, so wird von allen Primzahlen, von welchen die letzte gemessen wird, auch die neben der Einheit stehende gemessen werden.

S. 13. Sind von der Einheit an mehre Zahlen stetig proportionirt, so wird, wenn die auf die Einheit folgende eine Primzahl ist, die letzte der Zahlen von keiner andern Zahl gemessen werden, als von den in der Progression ihr vorhergehenden.

S. 14. Die kleinste Zahl, welche von gewissen Primzahlen gemessen wird, wird von keinen andern Zahlen, als von diesen Primzahlen gemessen.

S. 15. Wenn drei stetig proportionirte Zahlen die kleinsten in diesem Verhältnisse sind, so ist die Summe von je zweien eine Primzahl zu der dritten.

S. 16 — 19. Diese Sätze gelten ausschließlich für ganze Zahlen. S. 16. Wenn zwei Zahlen Primzahlen zu einander sind, so giebt es zu beiden keine dritte Proportionalzahl (οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά). S. 17. Wenn beliebig viele Zahlen stetig proportionirt, und die äußersten Primzahlen zu einander sind, so giebt es zu der ersten, zweiten und letzten keine vierte Proportionalzahl.

Als Beschluß dieser Theorie steht der berühmte und wichtige Satz da:

S. 20. Die Anzahl der Primzahlen ist größer als jede gegebene Menge derselben.

D. h. Die Anzahl der Primzahlen ist unendlich groß. Der

Digitized by

Euklidiſche Beweis dieſes Satzes iſt ſo einfach, daß ich mich nicht enthalten kann, ihn hier anzugeben. Geſetzt es ſeien die Primzahlen a, b, c u. ſ. w. gegeben, ſo iſt, wenn man zu dem Producte derſelben 1 addirt, $abc \ldots + 1$ entweder eine Primzahl (und dann iſt der Satz bewieſen), oder keine Primzahl. Im zweiten Falle wird $abc \ldots + 1$ alſo nach **VII**, 33 von irgend einer Primzahl gemeſſen werden. Nun kann aber $abc \ldots + 1$ durch keine der Primzahlen a, b, c . . . gemeſſen werden, weil dann, da $abc \ldots$ durch a, b, c gemeſſen wird, auch 1 durch die genannten Zahlen gemeſſen werden würde, was nicht möglich iſt. Folglich iſt die Primzahl, von welcher $abc \ldots + 1$ gemeſſen wird, von den anfangs gegebenen a, b, c verſchieden. In jedem Falle erhalten wir alſo zu den gegebenen Primzahlen noch eine neue; und das war zu beweiſen. — Hiemit begnügt ſich Euklides; da man aber dieſe Schlußfolgen ohne Ende mit jeder neu hinzugekommenen Primzahl fortſetzen kann, ſo folgt daraus, daß die Anzahl der Primzahlen unendlich groß iſt.

S. 21 — 34. Elementarſätze über gerade, ungerade, gerademal gerade, gerademal ungerade Zahlen u. ſ. w. Über den ungerechten Tadel, welchen Jamblichus wegen des S. 34 gegen Euklides ausſpricht, werden wir unten ſprechen.

S. 35. Wenn beliebig viele Zahlen ſtetig proportionirt ſind, und man ſubtrahirt von der zweiten und der letzten eine der erſten gleiche Zahl, ſo wird ſich der Überſchuß der zweiten über die erſte zur erſten Zahl verhalten, wie der Überſchuß der letzten über die erſte zur Summe aller vorhergehenden Glieder.

D. h. Hat man die Progreſſion

$$a^n,\ a^{n-1}\,b,\ a^{n-2}\,b^2,\ +\ \ldots\ a^2\,b^{n-2},\ a\,b^{n-1},\ b^n,$$

ſo verhält ſich

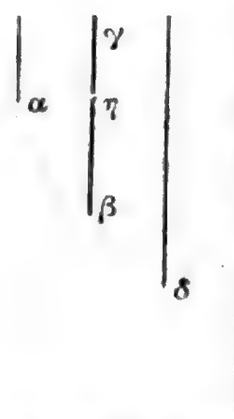
$$a^{n-1}\,b - a^n : a^n = b^n - a^n : a^n + a^{n-1}\,b + a^{n-2}\,b^2 + \ldots\ a^2\,b^{n-2} + a\,b^{n-1},$$

woraus unmittelbar der Satz ſo folgt, wie er in den modernen Lehrbüchern gewöhnlich ausgeſprochen wird

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} = a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots\ a\,b^{n-2} + b^{n-1}.$$

Digitized by Google

Euklid's Beweis ist folgender:



ζ Sei $\alpha : \overline{\beta\gamma} = \overline{\beta\gamma} : \delta = \delta : \overline{\varepsilon\zeta}$. Mache $\overline{\gamma\eta}$
ϑ $= \overline{\zeta\vartheta} = \alpha$, $\overline{\zeta\varkappa} = \overline{\beta\gamma}$, $\overline{\zeta\lambda} = \delta$, so verhält
sich, wenn wir für α, $\overline{\beta\gamma}$, δ ihre entsprechenden
ϰ Stücke auf $\overline{\varepsilon\zeta}$ substituiren $\overline{\zeta\vartheta} : \overline{\zeta\varkappa} = \overline{\zeta\varkappa} : \overline{\zeta\lambda}$
λ $= \overline{\zeta\lambda} : \overline{\zeta\varepsilon}$, also dividendo $\overline{\zeta\vartheta} : \overline{\vartheta\varkappa} = \overline{\zeta\varkappa} : \overline{\varkappa\lambda}$
$= \overline{\zeta\lambda} : \overline{\lambda\varepsilon}$ und componendo $\overline{\zeta\vartheta} : \overline{\vartheta\varkappa} = \overline{\zeta\vartheta}$
ε $+ \overline{\zeta\varkappa} + \overline{\zeta\lambda} : \overline{\vartheta\varkappa} + \overline{\varkappa\lambda} + \overline{\lambda\varepsilon}$ und nun wie-
der die ursprünglichen Größen substituirt und die Proportion rück-
wärts gelesen

$$\overline{\varepsilon\vartheta} : \alpha + \overline{\beta\gamma} + \delta = \overline{\beta\eta} : \alpha$$

d. i. $\overline{\varepsilon\zeta} - \alpha : \alpha + \overline{\beta\gamma} + \delta = \overline{\beta\gamma} - \alpha : \alpha$ q. e. d.

Es ist zugleich leicht einzusehen, wie der hier nur für vier Grö-
ßen bewiesene Satz auf mehre sich ausdehnen läßt.

S. 36. Nimmt man so viele von der Einheit an stetig ver-
doppelte Zahlen, bis deren Summe eine Primzahl wird, so ist das
Product aus dieser Summe in die letzte jener Zahlen eine vollstän-
dige Zahl (numerus perfectus), d. h. eine Zahl, welche der Summe
aller ihrer Theiler, 1 mitgerechnet, gleich ist.

Nimmt man die nach den ganzen Potenzen von 2 fortschrei-
tende Reihe 1, 2, 4, 8 .... 2^n, deren Summe $2^{n+1} - 1$ ist,
so ist, nach Euklid's Satz, die Zahl $2^n (2^{n+1} - 1)$ eine vollstän-
dige Zahl, so oft $2^{n+1} - 1$ eine Primzahl ist [22]).

Euklid's Beweis dieses Satzes ist in seiner lineären Manier

---

22) Der Beweis läßt sich sehr leicht so führen. Sei $2^{n+1} - 1 = p$, und die Summe der Factoren der Zahl $2^n (2^{n+1} - 1)$ d. h. $2^n p$ sei S, so ist

$$S = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n + p (1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1})$$
$$= (1 + p) (1 + 2 + 4 \ldots + 2^{n-1}) + 2^n$$

Aber $1 + 2 + 4 \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$,
$1 + p = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, demnach

$$S = 2 \cdot 2^n (2^n - 1) + 2^n = 2^n [2 (2^n - 1) + 1] = 2^n (2^{n+1} - 1)$$
$$= 2^n p$$

Aus diesem Beweise leuchtet zugleich ein, daß der Satz nicht gilt, wenn p Fac-
toren hat.

Digitized by

etwas weitläuftig, weshalb ich ihn hier nicht mittheile. Er beweiſt zuerſt, daß die gefundene Zahl, deren Vollſtändigkeit bewieſen werden ſoll, ſich zu der Summe der zum Grunde gelegten Reihe verhalte, wie das letzte Glied dieſer Reihe zur Einheit, ein Reſultat, welches wir durch unſere Formeln ſogleich vor Augen haben, indem wir die in Rede ſtehende Zahl durch $2^n (2^{n+1} - 1)$ ausdrücken. Nun iſt offenbar, daß dieſe Zahl durch alle Glieder der beiden Reihen $1, 2 \ldots 2^n$ und $2^{n+1} - 1, 2(2^{n+1} - 1) \ldots 2^{n-1}(2^{n+1} - 1)$ theilbar iſt. Euklid beweiſt nun zweitens, daß $2^n (2^{n+1} - 1)$ die Summe ſämmtlicher Glieder beider Reihen iſt, und drittens, daß dieſelbe Zahl keine anderen Factoren habe, als die genannten, wobei ſich die Bedingung ergiebt, daß $2^{n+1} - 1$ Primzahl ſein muß [23]).

---

23) Die Unterſuchung, ob eine Zahl von der Form $2^{n+1} - 1$ Primzahl ſei oder nicht, iſt nicht ganz leicht, wenn die Zahlen anfangen groß zu werden. Fermat hat in einem Briefe an Merſenne (Varia opera mathem. Petri de Fermat. Tolosae. 1679. fol. p. 177) drei hübſche Sätze gegeben, welche die Unterſuchung ſehr abkürzen. Schreibt man ſich nämlich in eine Reihe die um 1 verminderten Potenzen von 2, welches eben jene Summenglieder ſind, und darüber die Exponenten der um 1 größeren Zahlen für die Wurzel 2, etwa ſo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		n
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	....	$2^n - 1$

ſo finden zwiſchen den Exponenten und den darunterſtehenden Hauptgrößen folgende Beziehungen ſtatt:

1. Wenn der Exponent keine Primzahl iſt, iſt auch die Hauptgröße keine Primzahl, (weil $a^{pq} - 1$ immer ſowohl durch $a^p - 1$, als durch $a^q - 1$ theilbar iſt).
2. Wenn der Exponent eine Primzahl iſt, ſo iſt die um 1 verminderte Hauptgröße durch den doppelten Exponenten theilbar. $\left(\frac{2^n - 2}{2n} = \frac{2^{n-1} - 1}{n}\right.$, demnach iſt dieſer Satz ein ſpecieller Fall des bekannten Satzes, daß, wenn p Primzahl iſt und in a nicht aufgeht, allemal $a^{p-1} - 1$ durch p aufgeht).
3. Wenn der Exponent n eine Primzahl iſt, ſo kann die Hauptgröße nur theilbar ſein durch Zahlen von der Form $2mn + 1$. Hat nun die Hauptgröße keinen Theiler dieſer Form, was ſich leicht verſuchen läßt, ſo hat ſie überhaupt keinen Theiler.

Für den vorliegenden Zweck dienen namentlich der erſte und dritte dieſer Sätze. Wie gewöhnlich, ſo theilt auch hier Fermat ſeinen Beweis nicht mit, ſondern begnügt ſich, den ausgeſprochenen Sätzen die Worte hinzuzufügen: Voilà trois fort belles propositions que j'ay trouvées et *prouvées* non sans

So wie Euklid den Satz ausgesprochen hat, hat er ihn scharf und genügend bewiesen; aber wir vermissen bei dem Satze etwas, dessen Euklides nicht Erwähnung thut, nämlich die Behauptung und den Beweis, daß es außer den hier angegebenen keine anderen Zahlen giebt, welche die erwähnte Eigenschaft haben.

Übrigens ist die Materie dieses an und für sich allerdings merkwürdigen Satzes, den darum Euklides auch als Schlußstein seiner rationalen Arithmetik benutzt, ziemlich unfruchtbar, und auch in der Folgezeit nicht viel weiter fortgebildet. Auch ähnliche Probleme und Sätze, welche Fermat anregte, haben zu ihrer Zeit keinen Anklang gefunden, eben weil ihr Einfluß auf die Wissenschaft zu gering ist im Verhältniß zu der Schwierigkeit, mit welcher ihre Behandlung verbunden ist.

So weit nun erstreckt sich die rationale Arithmetik Euklid's, die Manches enthält, dessen Wichtigkeit die späteren Griechischen Arithmetiker nicht erkannt und das sie daher in ihre Abhandlungen nicht aufgenommen haben, und was erst in neueren Zeiten als elementare Grundlage einer wissenschaftlichen Zahlentheorie wieder geltend gemacht ist. Ganz gewiß rühren die hier von Euklides vorgetragenen Sätze ebenso wenig alle von ihm selbst her, als seine geometrischen Bücher; nur sind die Nachrichten über seine Vorarbeiten in der Arithmetik noch spärlicher, als die Winke über geometrische Arbeiten und Erfindungen, die er benutzt hat. Von den bis hieher vorgetragenen Sachen in Form und Wesen verschieden ist der Gegenstand, welchem Euklides sein

Zehntes Buch

gewidmet hat. Dieses Buch, an Umfang das größte, an Inhalt das schwierigste der Euklidischen Elemente, handelt in eigenthümlicher Weise von den Irrationalgrößen, indem alle uns als algebraische Formeln bekannte irrationale Zahlenausdrücke hier in ganz geometrischer Vorstellungsweise als Irrationallinien betrachtet werden. Das Buch beginnt mit folgenden Definitionen:

Commensurable und incommensurable Größen, (σύμμετρα, ἀσύμμετρα); Größen sind commensurabel, wenn sie von

---

peine. Je les puis appeller les fondements de l'invention des nombres parfaits.

Digitized by

einem und demſelben Maaße gemeſſen werden, oder wie hieraus im S. 5 gefolgert wird, wenn ſie ſich zu einander verhalten wie eine Zahl zu einer Zahl. Im entgegengeſetzten Falle ſind ſie incommenſurabel. Z. B. a und $\sqrt{b}$ ſind, wenn b kein Quadrat iſt, incommenſurable Größen.

In Potenz commenſurabel (δυνάμει σύμμετροι) ſind zwei Linien, wenn ihre Quadrate von demſelben Flächenraum gemeſſen werden, im entgegengeſetzten Falle ſind ſie in Potenz incommenſurabel. Z. B. a und $\sqrt{b}$ ſind immer in Potenz commenſurabel, dagegen a und $\sqrt[n]{b}$, wenn $n > 2$, oder a und $b + \sqrt{c}$ in Potenz incommenſurabel.

Dieſes vorausgeſetzt, wird gezeigt, daß einer angenommenen geraden Linie unzählige andere gerade Linien commenſurabel und incommenſurabel ſind, theils in Länge und Potenz, theils in Potenz allein. Dieſe angenommene gerade Linie heiße rational (ῥητή).

Rational heißen ferner alle Linien, die dieſer entweder in Länge und Potenz, oder bloß in Potenz commenſurabel ſind.

Irrational (ἄλογοι) aber, die ihr incommenſurabel ſind.

Es iſt zu bemerken, daß Euklides den Begriff der rationalen und irrationalen Größe anders nimmt, als wir und Diophant, indem wir das irrational nennen, was Euklides incommenſurabel nennt. Der Unterſchied rührt daher, daß Euklides die Rationalität auch auf die bloß in Potenz commenſurablen Größen ausdehnt. Daher iſt ihm das Verhältniß $a : \sqrt{b}$ rational, weil die Quadrate beider Ausdrücke commenſurabel werden.

Auch das Quadrat der angenommenen geraden Linie heiße rational, und was demſelben commenſurabel iſt, heiße ebenfalls rational.

Was aber jenem Quadrate incommenſurabel iſt, heiße irrational, und ebenſo heißen die Linien, welche irrationale Räume potenziren, irrational; wenn der Raum ein Quadrat iſt, ſo ſind es die Seiten ſelbſt, wenn er aber eine andere geradlinige Figur iſt, ſo ſind es die Seiten der dieſen gleichen Quadrate (αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι).

Ich habe den Ausdruck, eine Linie potenzirt einen Raum, aus Lorenz's Überſetzung beibehalten, welcher dadurch recht glücklich den Griechiſchen Ausdruck, εὐθεῖα δυνάμει τὸ χωρίον wiedergiebt;

Digitized by Google

ἡ δυναμένη τὸ χωρίον ist nämlich die Seite des Quadrats, welches dem Raume gleich ist.

Eine Menge specieller Definitionen finden sich nun noch im Laufe des Vortrages zerstreut, weil sie sich nicht füglich vor der Kenntniß der Sache geben lassen.

Der Inhalt dieses Buchs nun läßt sich ganz ungezwungen in folgende vier Abschnitte theilen:

I. Allgemeine Sätze über Commensurabilität, S. 1 — 21.

II. Über die Mediallinie, S. 22 — 35 [24]).

III. Irrationallinien, die durch Zusammensetzung entstehen, und zwar S. 36 — 72 durch Addition, S. 73 — 111 durch Subtraction.

IV. Fünf Ergänzungssätze, S. 112 bis zum Ende.

Nach dieser Übersicht will ich nun, so kurz es sich thun läßt, ohne etwas Wesentliches zu übergehen, den Inhalt dieses merkwürdigen Buches darstellen, und der modernen Vorstellungsweise dadurch zu Hilfe kommen, daß ich die Resultate und Formeln mit den uns geläufigen Zeichen ausdrücke.

Erster Abschnitt.

S. 1. Der berühmte Satz, auf dem die Methode der Exhaustion beruht: Wenn zwei ungleiche Größen gegeben sind, und man nimmt von der größeren mehr als die Hälfte, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte, und so fort, so bleibt endlich eine Größe übrig, welche kleiner ist, als die kleinere der beiden gegebenen Größen. Ebenso, wenn immer nur die Hälfte weggenommen wird.

S. 2. Wenn zwei ungleiche Größen gegeben sind, und man nimmt immer die kleinere von der größeren weg, so sind, wenn nie ein Rest den nächst vorhergehenden genau mißt, die beiden Größen incommensurabel. Vergl. VII, 1.

S. 3. 4. Für commensurable Größen das größte gemeinschaftliche Maaß zu finden.

S. 5 — 9. Commensurable Größen verhalten sich wie Zahlen zu einander, incommensurable nicht; Quadrate commensurabler

24) Von S. 31 an stimmen die Ausgaben in den Zahlen nicht überein, indem Einige, so auch Lorenz in seiner Übersetzung, den S. 30 der Baseler Ausgabe, nach der ich citire, in zwei zerlegen.

Digitized by

Größen verhalten sich wie Quadratzahlen. Umkehrung aller dieser Sätze.

S. 10. Aufgabe [25]). Zu einer gegebenen geraden Linie zwei andere zu finden, deren eine ihr bloß in Länge, die andere aber in Länge und Potenz incommensurabel ist.

S. 11. Satz des Theätetus. Wenn vier Größen in Proportion stehen, und die erste der zweiten commensurabel ist, so ist auch die dritte der vierten commensurabel; ist aber die erste der zweiten incommensurabel, so ist auch die dritte der vierten incommensurabel.

S. 12 — 14. Folgen, wenn zwei Größen sich in Bezug auf Commensurabilität zu einer dritten gleich oder ungleich verhalten.

S. 15. Wenn vier Linien in Proportion stehen, und es potenzirt die erste über die zweite um das Quadrat einer der ersten in Länge commensurablen oder incommensurablen Linie, so potenzirt die dritte über die vierte in derselben Weise.

Δύναται ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει heißt: das Quadrat der ersten übertrifft das Quadrat der zweiten um ein Quadrat, dessen Seite der ersten in Länge commensurabel ist; oder anders ausgedrückt, die größere der beiden Linien ist Hypotenuse, die kleinere eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zweite Kathete der Hypotenuse in Länge commensurabel ist.

S. 16. 17. Werden zwei commensurable Größen zusammengesetzt, so ist das Ganze jeder von ihnen commensurabel, und umgekehrt dasselbe von incommensurablen Größen.

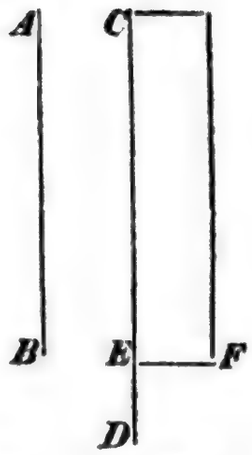
S. 18. 19. Wenn zwei gerade Linien ungleich sind, und ein dem vierten Theile des Quadrats der kleineren gleiches Rechteck an der größeren entworfen wird, dessen Ergänzung ein Quadrat ist, und welches die größere Linie in zwei in Länge commensurable Abschnitte theilt, so potenzirt die größere über die kleinere um das Quadrat einer ihr in Länge commensurablen Linie; und umgekehrt. Sind dagegen die Abschnitte der größeren in Länge incommensurabel, so potenzirt auch die größere über die kleinere um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurablen Linie.

Zur Erklärung dieses Satzes muß ich folgendes hinzufügen.

---

25) In mehren Ausgaben vertauschen die Sätze 10 u. 11 ihre Stellen.

Digitized by Google



An eine Linie CD ein Rechteck CF anlegen, deſſen Ergänzung ein Quadrat iſt, heißt, das Rechteck CF ſo anlegen, daß $EF = ED$, alſo das vollendete Rechteck DF ein Quadrat wird. Nun ſagt der Satz folgendes: Wenn zwei Linien AB, CD gegeben ſind und man legt ein Rechteck, welches gleich $\frac{1}{4} AB^2$ iſt, an CD ſo an, daß $EF = ED$ wird, (was immer möglich iſt), ſo ſind, wenn CE und ED nach dieſer Operation einander commenſurabel ausfallen, die beiden Linien AB und CD ſo beſchaffen, daß $\sqrt{CD^2 - AB^2}$ der Linie CD commenſurabel iſt. Fallen dagegen die Abſchnitte CE, ED einander incommenſurabel aus, ſo iſt auch $\sqrt{CD^2 - AB^2}$ der CD incommenſurabel. Der Satz leuchtet ein, wenn wir bedenken, daß commenſurable Größen ſich wie Zahlen verhalten. Setzen wir alſo $CE : ED = m : n$; da nun $CE \cdot EF = CE \cdot ED = \frac{1}{4} AB^2$ iſt, ſo iſt $CE = \frac{1}{2} AB \sqrt{\frac{n}{m}}$, $ED = \frac{1}{2} AB \sqrt{\frac{m}{n}}$, alſo $CD = \frac{1}{2} AB \left(\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}} \right) = \frac{1}{2} AB \frac{m+n}{\sqrt{mn}}$. Demnach $CD^2 - AB^2 = \frac{1}{4} AB^2 \left[\frac{(m+n)^2}{mn} - 4 \right] = \frac{1}{4} AB^2 \frac{(m-n)^2}{mn}$, alſo $\sqrt{CD^2 - AB^2} = \frac{1}{2} AB \frac{m-n}{\sqrt{mn}}$, demnach verhält ſich $\sqrt{CD^2 - AB^2} : CD = m - n : m + n$ d. h. wie zwei Zahlen, demnach ſind beide Ausdrücke einander in Länge commenſurabel.

S. 20. Jedes unter rationalen in Länge commenſurablen Linien enthaltene Rechteck iſt rational.

S. 21. Wenn an einer Rationallinie ein rationales Rechteck angelegt wird, ſo giebt daſſelbe eine rationale der angenommenen in Länge commenſurable Linie zur Breite. D. h. Eine Rationalzahl durch eine Rationalzahl dividirt giebt einen rationalen Quotienten.

Lemma. Die Linie, welche einen irrationalen Raum potenzirt (ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον), iſt irrational. D. h. Eine Linie oder Zahl, deren Quadrat irrational iſt, iſt ſelbſt irrational.

Digitized by Google

Dieſes Lemma, welches auf den Ausdruck $\sqrt{\sqrt{ab}}$ führt, macht den Übergang zur Betrachtung der Mediallinie.

Zweiter Abſchnitt.

Die erſte Irrationallinie, welche Euklides betrachtet, iſt die Mediallinie, μέση, die er ſo definirt: Die μέση iſt eine Irrationallinie, welche ein unter rationalen bloß in Potenz commenſurablen Linien enthaltenes Rechteck potenzirt; oder, wie es im

S. 22. heißt: Das unter rationalen bloß in Potenz commenſurablen Linien enthaltene Rechteck iſt irrational, und die dieſen Raum potenzirende Linie (die Seite des ihm gleichen Quadrats) iſt auch irrational, und heiße die Mediale.

Nun ſind rationale bloß in Potenz commenſurable Linien entweder a und $\sqrt{b}$, oder $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$; demnach die unter ihnen enthaltenen Rechtecke $a\sqrt{b}$ und $\sqrt{ab}$. Dieſe ſind, obgleich mit einfachem Quadratwurzelzeichen behaftet, irrational, dahingegen die dieſen Formen entſprechenden Linienausdrücke für rational gelten. Die Rationalität der letztern beruht aber darauf, daß ihre Quadrate rational werden, eine Betrachtung, welche auf unſere Ausdrücke, weil ſie ſchon Räume bedeuten, nicht mehr angewandt werden kann. Die Mediale wird alſo die beiden weſentlich nicht verſchiedenen Formen haben können $\sqrt{a\sqrt{b}} = \sqrt[4]{a^2 b}$ und $\sqrt[4]{ab}$, vorausgeſetzt daß, wenn wir Zahlen betrachten, weder a noch b Quadratzahl iſt; dieſe Bedingung iſt, wenn wir $\sqrt[4]{ab}$ als den allgemeinen Ausdruck betrachten, dahin zu beſchränken, daß eine von den beiden Zahlen a, b keine Quadratzahl ſei.

S. 23. Das Quadrat der Mediale, einer rationalen Linie angepaßt, giebt eine rationale, dieſer Linie in Länge incommenſurable Breite. $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $\frac{\sqrt{ab}}{c}$.

Einen Raum einer Linie anpaſſen (παρεμβάλλειν oder παραβάλλειν παρὰ εὐθεῖαν) heißt, ein dieſem Raume gleiches Rechteck bilden, deſſen eine Seite die beſagte Linie iſt, oder arithmetiſch gedacht, das Maaß des Raumes durch das Maaß der Linie dividiren.

S. 24. Die der Mediale commenſurable Linie iſt eine Me-

Digitized by Google

diale. Wie Rationallinien, so können auch Mediale entweder in Länge und Potenz zugleich, oder bloß in Potenz commensurabel sein.

S. 25. Das unter medialen bloß in Länge commensurablen Linien enthaltene Rechteck ist medial.

Wenn m und n rationale Zahlen bedeuten, so sind zwei in Länge commensurable Medialen $m\sqrt[4]{ab}$ und $n\sqrt[4]{ab}$; ihr Rechteck also $mn\sqrt{ab}$ der Ausdruck des medialen Rechtecks.

S. 26. Das unter medialen bloß in Potenz commensurablen Linien enthaltene Rechteck ist entweder rational oder medial.

Bloß in Potenz commensurable Mediale sind $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\sqrt{c\sqrt{b}}$, ihr Rechteck $\sqrt{acb}$ wird rational sein, wenn acb ein Quadrat (eine Quadratzahl) ist, sonst medial.

S. 27. Ein Mediales übertrifft ein Mediales nicht um ein Rationales.

S. 28. Zwei bloß in Potenz commensurable Mediale zu finden, deren Rechteck rational ist.

Die beiden Linien sind $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{a}}$; oder $\sqrt[4]{ab}$ und $\sqrt{b\sqrt{\frac{b}{a}}}$. Die Quadrate der beiden ersteren sind $a\sqrt{b}$ und $\frac{b}{a}\sqrt{b}$, die der beiden letztern $\sqrt{ab}$ und $b\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a}\sqrt{ab}$, also in beiden Fällen commensurabel. Das Rechteck jedes der beiden Paare ist b, also rational.

S. 29. Zwei mediale bloß in Potenz commensurable Linien zu finden, deren Rechteck medial ist.

1) $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\sqrt{\frac{ac}{b}\sqrt{b}}$ 2) $\sqrt[4]{ab}$ und $\sqrt{\frac{c\sqrt{ab}}{b}}$

Lemma 1. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe auch eine Quadratzahl ist.

Euklides löst diese Aufgabe so: $\underline{A \quad D \quad C \quad B}$

Nimm zwei Zahlen AB, BC so an, daß beide zugleich gerade oder beide ungerade sind; in jedem Falle wird der Rest AC gerade sein und sich in D halbiren lassen. AB, BC seien ferner ähnliche Flächenzahlen, oder auch Quadratzahlen, so ist ihr Product eine Quadratzahl. Nun ist nach II, 6. $AB \cdot BC$

$+ CD^2 = BD^2$, folglich ſind $AB \cdot BC$ und CD^2 die geſuchten Zahlen.

Dieſe Auflöſung führt zu dem bekannten Reſultate, wenn man $AB = 2m^2$, $BC = 2n^2$ ſetzt; es werden dann die Wurzeln der beiden Quadratzahlen $m^2 - n^2$ und $2mn$. Diophant hat dieſe Aufgabe, vielleicht weil die Euklidiſche Auflöſung ihm nicht gefiel, wieder aufgenommen und giebt II, 8. 9. zwei Auflöſungen derſelben.

Lemma 2. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe keine Quadratzahl iſt. $(2mn)^2$ und $(m^2 - n^2 - 1)^2$

S. 30. Zwei rationale bloß in Potenz commenſurable Linien zu finden, deren größere über die kleinere um das Quadrat einer der erſteren in Länge commenſurablen Linie potenzirt.

Nach Euklid a und $\sqrt{\frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2}}$, ſo daß $b^2 - c^2$ kein Quadrat iſt. Einfacher a und $\sqrt{a^2 - d^2}$.

S. 30ª (bei Andern S. 31). Zwei rationale bloß in Potenz commenſurable Linien zu finden, ſo daß die größere über die kleinere um das Quadrat einer jener in Länge incommenſurablen Linie potenzirt.

$$a \text{ und } \sqrt{a^2 - d}$$

S. 31 (32). Zwei mediale bloß in Potenz commenſurable Linien zu finden, deren Rechteck rational iſt, und deren größere über die kleinere um das Quadrat einer der erſteren in Länge commenſurablen Linie potenzirt.

1) $\sqrt{a\sqrt{a^2 - b^2}}$ und $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a\sqrt{a^2 - b^2}}}$;

2) $\sqrt[4]{a(a - b^2)}$ und $\frac{a - b^2}{\sqrt[4]{a(a - b^2)}}$

Zuſatz. Ähnlich findet man dieſe Linien, wenn die potenzirende Linie der größeren incommenſurabel iſt.

Nämlich 1) $\sqrt{a\sqrt{a^2 - b}}$ und $\frac{a^2 - b}{\sqrt{a\sqrt{a^2 - b}}}$;

2) $\sqrt[4]{a(a - b)}$ und $\frac{a - b}{\sqrt[4]{a(a - b)}}$

Digitized by Google

S. 32 (33). Zwei mediale bloß in Potenz commensurable Linien zu finden, deren Rechteck medial ist, und von denen die größere über die kleinere um das Quadrat einer jener (α) commensurablen oder (β) incommensurablen Linie potenzirt.

(α) 1) $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}}$

2) $\sqrt[4]{ab}$ und $\frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt[4]{ab}}$

3) $\sqrt{b\sqrt{a}}$ und $\frac{b\sqrt{a-c^2}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$

(β) 1) $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\frac{\sqrt{b(a^2-c)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}}$

2) $\sqrt[4]{ab}$ und $\frac{\sqrt{b(a-c)}}{\sqrt[4]{ab}}$

3) $\sqrt{b\sqrt{a}}$ und $\frac{b\sqrt{a-c}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$

S. 33 (34). Zwei in Potenz incommensurable Linien zu finden, so daß die Summe ihrer Quadrate rational, ihr Rechteck aber medial sei.

1) $\sqrt{\frac{a^2+a\sqrt{b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{b}}{2}}$

2) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{ab}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{a-\sqrt{ab}}{2}}$

S. 34 (35). Zwei in Potenz incommensurable Linien zu finden, so daß die Summe ihrer Quadrate medial, ihr Rechteck aber rational sei.

1) $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}}$

2) $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}$

S. 35 (36). Zwei in Potenz incommensurable Linien zu finden, so daß sowohl die Summe ihrer Quadrate als ihr Rechteck medial, beide Mediale aber einander incommensurabel seien.

Digitized by

1) $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(a-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}$

2) $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}$

3) $\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{2}}$ und $\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{2}}$

Dritter Abschnitt.

Ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἑξάδων, die sechs Abschnitte über die durch Addition gebildeten Linien (S. 36 — 72). Diesem Abschnitte Satz für Satz analog ist der folgende unter der Überschrift Δευτέρα τάξις ἑτέρων λόγων, τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν, über die durch Subtraction gebildeten Linien (S. 73 — 110), und weil die Behandlung beider durchaus nicht verschieden ist, so habe ich aus beiden bei Euklides getrennten Abschnitten einen gebildet, indem ich immer die correspondirenden Sätze beider Abschnitte zusammenfasse. Die deutschen Benennungen der einzelnen Irrationallinien habe ich nach Lorenz beibehalten. Beide correspondirende Abschnitte sind bei Euklides in Unterabtheilungen getheilt, welche er, weil die meisten derselben aus sechs Sätzen bestehen, Hexaden nennt.

Erste Hexade. Bildung der zusammengesetzten Irrationallinien.

S. 36. 73 (37. 74). Wenn zwei rationale bloß in Potenz commensurable Linien zusammengesetzt werden, so ist die ganze irrational, und heißt die Binomiale (ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων). Die Differenz zweier solcher Linien heißt die Apotome (ἀποτομή) $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $a \pm \sqrt{b}$, für die Apotome noch $\sqrt{a} - b$.

Der Ausdruck Binomium hat sich bei uns in viel weiterer Bedeutung für jede algebraische Summe und Differenz erhalten, so daß wir alle von Euklides unterschiedenen Irrationalformeln Binomien nennen würden. Der Ausdruck Apotome und der von den Italienern dafür substituirte recisum, reciso, ist gegenwärtig ganz verschwunden.

S. 37. 74 (38. 75). Wenn zwei bloß in Potenz commensurable Mediallinien, deren Rechteck rational ist (vergl. S. 28. 31.), verbunden werden, so ist sowohl ihre Summe als ihre Differenz irrational, und die erstere heißt die erste Bimediale (ἡ ἐκ δύο

Digitized by Google

μέσων πρώτη), die andere heißt die erste Medialapotome (ἡ μέσης ἀποτομὴ πρώτη).

Ich will hier und bei den folgenden Linien die im vorigen Abschnitte gegebenen Formeln nicht wiederholen, sondern verweise nur auf die Nummer des Satzes, welcher zwei solche Linien finden lehrt, wie sie hier verlangt und verbunden werden. Aus S. 31. lassen sich zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der größere Theil über den kleineren um das Quadrat einer dem größeren Theil commensurablen oder incommensurablen Linie potenzirt. Da aber Euklides diesen Unterschied bei der Definition der zusammengesetzten Irrationallinien nicht macht, so will ich auch bloß darauf hinweisen.

S. 38. 75 (39. 76). Wenn zwei bloß in Potenz commensurable Mediallinien, deren Rechteck medial ist (S. 29. 32.), verbunden werden, so ist sowohl die Summe als die Differenz dieser Linien irrational, und die erstere heißt die zweite Bimediale (ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα), die andere die zweite Medialapotome (ἡ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα).

S. 39. 76 (40. 77). Wenn zwei in Potenz incommensurable Linien, deren Summe der Quadrate rational, deren Rechteck aber medial ist (S. 33.), verbunden werden, so ist sowohl die Summe als die Differenz dieser Linien irrational, und jene heißt die größere Irrationale (ἡ μείζων), diese die kleinere Irrationale (ἡ ἐλάσσων).

S. 40. 77 (41. 78). Wenn zwei in Potenz incommensurable Linien, deren Quadratsumme medial, deren Rechteck aber rational ist (S. 34.), verbunden werden, so ist sowohl die Summe als die Differenz dieser Linien irrational, und jene heißt die ein Rationales und Mediales Potenzirende (ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη), diese die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende (ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα).

S. 41. 78 (42. 79). Wenn zwei in Potenz incommensurable Linien, deren Quadratsumme und Rechteck medial, aber einander incommensurabel sind (S. 35.), verbunden werden, so ist sowohl die Summe als die Differenz dieser Linien irrational, und jene heißt die zwei Mediale Potenzirende (ἡ δύο μέσα δυναμένη). diese die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende (ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα).

Hier nun noch Einiges über die von Euklides gewählten oder

Digitized by Google

vielleicht schon vor ihm gebrauchten Namen der verschiedenen Irrationallinien. Die Namen der ersten sechs Linien sind klar, weil sie von der äußeren Form des Ausdrucks hergenommen sind; bei den sechs folgenden aber beruht die Benennung auf abgeleiteten Eigenschaften des Ausdrucks. Der Name der größern und kleinern Irrationale scheint willkührlich gewählt zu sein, indem Namen, welche mit demselben Rechte, dem reinen Wortverstande gemäß, auf alle anderen Arten von Irrationalgrößen hätten angewandt werden können, durch den mathematischen Sprachgebrauch einer speciellen Art derselben zugetheilt wurden, ebenso wie jede dieser Irrationallinien mit demselben Rechte wie die erste ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων genannt werden könnte, zumal da Euklides in den Sätzen der zweiten Hexade wirklich die beiden Bestandtheile sämmtlicher Irrationallinien ὀνόματα nennt. Jedenfalls ist die von Lorenz (nach S. 40.) gegebene Erklärung des Namens unpassend. Lorenz sagt, diese Linie habe ihren Namen daher erhalten, weil die rationale Summe der Quadrate der beiden Theile größer ist als das irrationale oder mediale Rechteck derselben. Daraus ist erstens der Name der größern Irrationale noch ganz und gar nicht motivirt, indem man nach wie vor fragt, warum heißt die Linie denn nun die größere Irrationale? zweitens aber gilt ganz dasselbe von der kleinern Irrationale. Die noch übrigen vier Namen aber haben ihren guten Grund. Die ein Rationales und ein Mediales Potenzirende, welche nach S. 34. gebildet wird, hat die Form

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}.$$

Das Quadrat dieses Ausdrucks ist $\sqrt{a^2-ab}+(a-b)$, es besteht also aus einem rationalen und einem medialen Rechteck (s. S. 25.), wodurch nach der bekannten Bedeutung des Verbums δύναϑαι der Name völlig motivirt ist. Die zwei Mediale Potenzirende, die aus S. 35. abgeleitet wird, hat die Form

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}},$$

und ihr Quadrat ist $\sqrt{ab}+\sqrt{(a-c)\,b}$, also die Summe zweier medialen Rechtecke. Die Namen der diesen beiden entsprechenden Differenzenlinien sind ebenfalls nicht von der Form der Linien selbst, sondern von der Form ihrer Quadrate hergenommen. Das Quadrat der

Digitized by Google

der erstern von ihnen ist $\sqrt{a^2 - ab} - (a - b)$; wenn man zu diesem Quadrate das rationale Rechteck $(a - b)$ addirt, so wird die Summe ein mediales Rechteck, $\sqrt{a^2 - ab}$, daher der Name die mit einem Rationalen ein Mediales Ganze Gebende. Das Quadrat der letztern dagegen wird $\sqrt{ab} - \sqrt{(a - c)\,b}$, welches, wenn man das mediale Rechteck $\sqrt{(a - c)\,b}$ hinzu addirt, die mediale Summe $\sqrt{ab}$ giebt; daher heißt die Linie die mit einem Medialen ein Mediales Ganze Gebende.

Zweite Hexade. S. 42 — 47 (43 — 48) und S. 79 — 84 (80 — 85). Jede durch Addition oder Subtraction zusammengesetzte Irrationallinie kann nur in einem Puncte in ihre beiden Bestandtheile (ὀνόματα) aufgelöst werden.

Dieser Satz wird für jede der zwölf zusammengesetzten Linien besonders bewiesen. Drücken wir den Satz arithmetisch aus, so sagt er z. B. für den Fall der Binomiale, daß $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ nicht gleich $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sein könne, wenn a, b und x, y von einander verschiedene rationale Zahlen sind; es kann also z. B. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ nicht anders $= \sqrt{2} + \sqrt{3}$ werden, als wenn $x = 2$ und $y = 3$ ist.

Dritte Hexade. Unterscheidung der sechs Arten von Binomialen und Apotomen, und Regeln, jede derselben zu construiren. S. 48 — 53 (49 — 54) und S. 85 — 90 (86 — 91).

Der allgemeine Ausdruck der Binomiale und Apotome ist $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Je nachdem nun a oder b oder keines von beiden (in unserm Sinne des Worts) rational ist, und in jedem der drei Fälle die größere über die kleinere um das Quadrat einer der ersteren commensurablen oder incommensurablen Linie potenzirt, unterscheidet Euklides sechs Arten beider Linien, die sich nach dem letztgenannten Eintheilungsgrunde in zwei Klassen theilen lassen.

I. Der größere Theil potenzirt über den kleinern um das Quadrat einer der größern in Länge commensurablen Linie.

1) Der größere Theil ist einer angenommenen Rationallinie commensurabel, oder kürzer ausgedrückt, ist rational. Erste Binomiale und Apotome.

$$a \pm \sqrt{a^2 - d^2} \text{ oder } a \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - c^2}$$

2) Der kleinere Theil ist rational. Zweite Binomiale und Apotome.

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2 - c^2}} \pm a$$

3) Keiner beider Theile ist rational. Dritte Binomiale und Apotome.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a\,(b^2 - c^2)}{b^2}} \text{ oder } \sqrt{a} \pm \sqrt{a - ad^2}$$

II. Der größere Theil potenzirt über den kleineren um das Quadrat einer dem größeren in Länge incommensurablen Linie.

1) Der größere Theil ist rational. Vierte Binomiale und Apotome.

$$a \pm \sqrt{a^2 - d}$$

2) Der kleinere Theil ist rational. Fünfte Binomiale und Apotome.

$$\sqrt{a^2 + d} \pm a$$

3) Beide Theile sind irrational. Sechste Binomiale und Apotome.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{a - d}$$

Diese scheinbar willkührliche Eintheilung wird motivirt durch die Resultate der beiden folgenden Hexaden, in denen der auffallende Zusammenhang, in welchem die sechs Binomialen und Apotomen mit den in der ersten Hexade erklärten sechs additiven und sechs subtractiven Irrationallinien stehen, nachgewiesen wird.

Vierte Hexade. Quadratwurzeln aus Binomien und Apotomen. S. 54 — 59 (55 — 60) und S. 91 — 96 (92 — 97).

Bei seiner geometrischen Darstellung kann Euklides nicht geradezu aus einer Binomiale oder Apotome die Wurzel ziehen, weil diese Ausdrücke ihm durchaus Linien vorstellen. Darum bildet er erst ein Rechteck aus der Binomiale in irgend eine Rationallinie. Ein rationaler Factor ändert aber offenbar die Natur des irrationalen Ausdrucks nicht, und da derselbe überdies beliebig ist, so können wir, wenn wir die irrationalen Größen als Zahlenausdrücke behandeln, denselben gleich 1 setzen, wodurch wir die Euklidische Operation in eine wirkliche Quadratwurzelausziehung aus dem reinen vorgelegten Binomium verwandeln. Das interessante Resultat dieser beiden

Digitized by Google

correspondirenden Hexaden ist, daß die Quadratwurzeln der sechs Binomialen der Reihe nach durch die sechs in der ersten Hexade erklärten additiven, die Quadratwurzeln der sechs Apotomen durch die sechs subtractiven Irrationallinien repräsentirt werden. Demgemäß ist die Wurzel aus der ersten Binomiale eine Binomiale, die Wurzel aus der zweiten Binomiale die erste Bimediale u. s. w.

Fünfte Hexade. Quadrate der zusammengesetzten Irrationallinien. S. 60 — 65 (61 — 66) und S. 97 — 102 (98 — 103).

Diese Sätze enthalten die Umkehrung der in der vorigen Hexade bewiesenen, und die Resultate sind die, daß die Quadrate der sechs additiven Irrationalgrößen der Reihe nach die sechs Binomialen, die Quadrate der sechs subtractiven Irrationalgrößen der Reihe nach die sechs Apotomen hergeben. Demgemäß ist z. B. das Quadrat jeder der sechs Binomialen ohne Unterschied eine erste Binomiale, das Quadrat der ersten Bimediale eine zweite Binomiale u. s. w. Weil aber wiederum geometrisch betrachtet das Quadrat einer Linie nicht eine Linie sein kann, so stellt Euklides die Sache so dar, daß er an eine Rationallinie ein Rechteck anlegt, welches dem Quadrate irgend einer der Irrationallinien gleich ist, und nun die Breite, d. h. die andere Seite dieses Rechtecks bestimmt. Wir erhalten hier wiederum das einfache Zahlenresultat, wenn wir die angenommene Rationallinie 1 setzen.

Sechste Hexade. Jede einer zusammengesetzten Irrationallinie in Länge commensurable Linie ist eine Irrationallinie derselben Art. S. 66 — 70 (67 — 71) und S. 103 — 107 (104 — 108).

Dieser Satz wird in S. 66 und S. 103 von allen Binomialen und Apotomen und in S. 67 und in S. 104 von beiden Bimedialen und Medialapotomen bewiesen. Daher enthält diese der Analogie wegen sogenannte Hexade nur fünf Sätze in jedem der beiden correspondirenden Abschnitte.

Es folgen nun in dem ersten Abschnitte zwei, in dem zweiten drei einzelne Sätze, welche auf eine gefällige Weise Mittel an die Hand geben, die zwölf zusammengesetzten Irrationallinien zu bilden. Wir wollen sie einzeln durchgehen.

S. 71 (72). Wenn man einen rationalen und einen medialen

Digitized by

Raum zusammenstellt, so entstehen (als den Summenraum potenzirend) vier Irrationallinien, und zwar entweder die Binomiale, oder die erste Bimediale, oder die größere Irrationale, oder endlich die ein Rationales und Mediales Potenzirende.

Beweis. Die beiden Räume seien ***AB***, der rationale und ***CD***, der mediale.

Erster Fall. $AB > CD$.

Lege an eine beliebige Rationallinie ***EF*** die beiden Rechtecke $EG = AB$, $HI = CD$, so wird ***EH*** rational und in Länge commensurabel der ***EF***, (S. 21), dagegen ***HK*** rational aber nur in Potenz der ***EF*** commensurabel (S. 23); daher ist auch ***HK*** der ***EH*** bloß in Potenz commensurabel, also ***EK*** eine Binomiale, und zwar, da $EH > HK$, entweder eine erste oder eine vierte Binomiale, je nachdem ***EH*** über ***HK*** um das Quadrat einer der ***EH*** in Länge commensurablen oder incommensurablen Linie potenzirt. Ist nun ***EK*** eine erste Binomiale, so ist nach S. 54. die den Raum ***EI*** potenzirende Linie eine Binomiale. Ist dagegen ***EK*** eine vierte Binomiale, so ist nach S. 57. die den Raum ***EI*** potenzirende Linie die größere Irrationale.

Zweiter Fall. $AB < CD$.

Hier wird ganz ähnlich gezeigt, daß ***EK*** entweder die zweite oder fünfte Binomiale, die den Raum ***EI*** potenzirende Linie also im ersten Falle die erste Bimediale, im zweiten Falle die ein Rationales und Mediales Potenzirende sei.

Ganz gleichförmig sind die Beweise der folgenden Sätze, die ich daher nicht ausführen will.

S. 72 (73). Wenn man zwei einander incommensurable mediale Räume zusammenstellt, so entstehen (in dem Sinne wie vorher) die beiden übrigen Irrationallinien, nämlich entweder die zweite Bimediale oder die zwei Mediale Potenzirende.

In dem Abschnitte über die subtractiven Irrationallinien entsprechen dem erstern dieser beiden Sätze zwei andere, indem entweder das Mediale von dem Rationalen, oder das Rationale von dem Medialen subtrahirt wird. Demnach haben wir hier folgende Sätze:

S. 108 (109). Wenn man von einem rationalen einen me-

Digitized by Google

dialen Raum wegnimmt, so ist die Linie, welche den Rest potenzirt, entweder eine Apotome oder die kleinere Irrationale.

S. 109 (110). Wenn man von einem medialen einen rationalen Raum wegnimmt, so entstehen zwei andere Irrationallinien, und zwar entweder die erste Medialapotome oder die mit einem Rationalen ein Mediales Ganze Gebende.

S. 110 (111). Wenn man von einem medialen Raume einen andern medialen jenem incommensurablen Raum wegnimmt, so entstehen die beiden übrigen Irrationallinien, entweder die zweite Medialapotome oder die mit einem Medialen ein Mediales Ganze Gebende.

Endlich correspondiren noch in beiden Abschnitten ein Lemma zu S. 72 (73) mit dem S. 111 (112), welche die essentielle Verschiedenheit sämmtlicher bisher betrachteten Irrationallinien behaupten.

S. 72. Lemma. Die Binomiale und die auf sie folgenden Irrationallinien sind weder mit der Mediale, noch unter einander einerlei.

S. 111 (112). Die Apotome ist mit der Binomiale nicht einerlei. Das heißt $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ kann nie $= \sqrt{x} + \sqrt{y}$ werden.

Lemma. Die Apotome und die auf sie folgenden Irrationallinien sind weder mit der Mediale, noch unter einander einerlei.

Vierter Abschnitt.

Es folgen nun noch als Beschluß dieses Buchs fünf einzelne Sätze, welche wir noch kürzlich betrachten wollen.

S. 112 (113). Das dem Quadrate einer Rationallinie gleiche an einer Binomiale entworfene Rechteck giebt zur Breite eine Apotome, deren Bestandtheile den Theilen der Binomiale commensurabel und proportionirt sind, und die von derselben Ordnung wie die Binomiale ist.

Das heißt, eine Quadratzahl c^2, dividirt durch eine Binomiale $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, giebt zum Quotienten eine Apotome, die der Binomiale ähnlich ist; es ist nämlich

$$\frac{c^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c^2 (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b},$$

oder wenn wir für c^2 gleich von vorne herein 1 substituiren

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}, \quad a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

Digitized by Google

S. 113 (114). Das dem Quadrate einer Rationallinie gleiche an einer Apotome entworfene Rechteck giebt zur Breite eine Binomiale, deren Theile den Theilen der Apotome commensurabel und proportionirt sind, und die mit der Apotome von derselben Ordnung ist.

Das heißt $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$

S. 114 (115). Wenn ein Raum enthalten ist unter einer Apotome und einer Binomiale, deren Theile den Theilen jener commensurabel und proportionirt sind, so wird der Raum von einer Rationallinie potenzirt.

$\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})\ (m\sqrt{a} - m\sqrt{b})} = \sqrt{m\,(a - b)}$, und der Raum selbst ist $m\,(a - b)$.

Porisma. Daraus leuchtet ein, daß es möglich ist, daß ein rationaler Raum unter irrationalen Linien enthalten sei.

S. 115 (116). Aus einer Mediallinie entstehen unzählige Irrationallinien, und keine derselben ist mit irgend einer der vorher behandelten einerlei.

Euklides sucht die mittlere Proportionale zwischen einer Rationallinie a und einer Mediale $\sqrt[4]{b}$, welche $\sqrt{a\sqrt[4]{b}}$ ist, und die sich von allen bisher betrachteten Irrationallinien dadurch unterscheidet, daß ein ihrem Quadrate gleiches an einer Rationallinie entworfenes Rechteck eine mediale Breite giebt, oder, wie Lorenz dem Sinne nach richtig, aber ganz ungeometrisch sagt, daß ihr Quadrat eine Mediallinie giebt. Ferner nimmt er die mittlere Proportionale zwischen a und $\sqrt{a\sqrt[4]{b}}$ und so weiter fort.

S. 118 [26]) (117). In jedem Quadrate ist die Diagonale der Seite in Länge incommensurabel.

Die Einführung dieses Satzes, wie er im Original ausgesprochen ist, ist ganz von Euklid's Manier abweichend, indem der Text sich der Einleitungsformel bedient: προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι ὅτι u. s. w. Es ist auch auffallend, daß dem natürlichen und ganz kurzen Be-

26) Als S. 116. 117 hat die Baseler Ausgabe zwei Sätze, die schon oben als S. 105. 106 da gewesen sind. Am Rande steht: Non habet alterum graecum exemplar. Sie gehören auch gar nicht hieher.

Digitized by Google

weiſe dieſes Satzes, dem nämlich, daß das Quadrat der Diagonale ſich zum Quadrat der Seite wie 2 zu 1, alſo nicht wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (S. 9) verhält, ein anderer ziemlich langer Beweis vorausgeſchickt wird, der zwar richtig iſt, aber eben wegen ſeiner entbehrlichen Weitläuftigkeit gar nicht Euklidiſch ausſieht. Vielleicht gehört dieſer Satz, der hier als ein bloßer Anhang zu der Lehre von den Irrationallinien erſcheint, ſo wie gewiß die hinter ihm folgende Anmerkung, welche lehrt, daß die Irrationalität nicht auf Linien beſchränkt iſt, ſondern auch auf Flächen und Körper ausgedehnt werden kann, zu den Zuſätzen eines ſpäteren Bearbeiters der Elemente, vielleicht Theon's.

Aber es ſei hierüber genug. Ich bin gerade bei dieſem Euklidiſchen Buche etwas ausführlich geweſen, weil wir dem hier behandelten Gegenſtande nicht ſobald wieder begegnen. Oft und vielfach iſt die rationale Arithmetik der Griechen behandelt worden und die Erweiterungen, welche die Euklidiſche Lehre des ſiebenten, achten und neunten Buchs erfahren hat, ſind ſehr weſentlich. Aber ſein zehntes Buch iſt das einzige Überbleibſel aus dem Alterthume, welches von der irrationalen Arithmetik der Griechen uns einen Begriff giebt, und wir haben auch keine Nachricht, daß irgend ein ſpäterer Mathematiker dieſer Nation die Euklidiſche Lehre weiter fortgebildet oder ſich auch nur damit beſchäftigt hätte [27]). Der Grund dieſer Erſcheinung mag allerdings darin ſeine Erklärung finden, daß Euklides die irrationale Arithmetik bedeutend vollſtändiger behandelt hat, als die rationale, welche, wie ſie in ſeinen drei genannten Büchern uns vorliegt, in der That noch vieles zu wünſchen übrig läßt. Der Erſte meines Wiſſens, der ſich der Fortbildung der Theorie der Irrationalgrößen wieder angenommen hat, iſt Lucas Pacioli de Burgo gegen das Ende des funfzehnten Jahrhunderts, nachdem die Lehre beinahe achtzehn Jahrhunderte brach gelegen.

Kaum habe ich nöthig, den Leſer auf den hohen Grad der Abſtraction, welchen die Behandlung dieſes Gegenſtandes als einer geometriſchen Theorie bei den der algebraiſchen Formelnſprache entbehrenden Griechen vorausſetzt und verräth, aufmerkſam zu machen.

---

27) Dagegen berichtet Diogenes Laertius l. IX. sg. 47. daß vor Euklides Demokritus ein Werk περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ στερεῶν verfaßt habe. Was das letzte Wort hier bedeuten ſoll, weiß ich nicht.

Digitized by

Mehr als irgend eine von den Griechen bearbeitete Methode zeugt eben die Theorie der Irrationalgrößen für das ungeheure Übergewicht, welches in ihrer Vorstellungsweise die Geometrie über die Arithmetik behauptete. Diese Formeln, welche wir meistens aus sehr complicirten und in einander geschobenen Quadratwurzeln gebildet in der eben gegebenen Darstellung vor Augen gestellt haben, behandelt Euklid, auf den einfachen und einzigen Begriff der Commensurabilität gestützt, ohne auch nur einer Quadratwurzel zu erwähnen. Er sieht nur gerade Linien vor sich, die mit unsern Formeln nicht den unschätzbaren Vorzug gemein haben, daß ihre mannigfachen Eigenschaften und Eigenthümlichkeiten sich gleich in ihrer äußeren Form verrathen; die algebraische Formel trägt für das geübte Auge alle, auch die verborgensten Eigenschaften, die ihr anhaften, sogleich zur Schau; aber eine gerade Linie sieht auf ein Haar der andern ähnlich, und ihr einziges unterscheidendes Merkmal, das aber eben auf ihre sonstige Beschaffenheit keinen directen Einfluß hat, ist ihre Länge. Es ist allein der abstracte Gedanke, der diesen Linien ihre tiefen Geheimnisse entlockt, welche unsre Formeln uns fast unaufgefordert ausplaudern. Und somit glaube ich nicht zu viel zu sagen, wenn ich behaupte, daß dieses in seiner geometrischen Gestalt jetzt freilich wenig brauchbare und darum wenig beachtete Buch gerade dasjenige ist, welches uns den alten Mathematiker in seiner höchsten Glorie erkennen lehrt.

Das Säculum, welches Euklides eröffnet, war das goldene Zeitalter der Griechischen Mathematik. Die von den ersten Ptolemäern in Alexandrien gestiftete Schule, verbunden mit der weltberühmten Bibliothek, trug sehr bald herrliche Früchte, und die Wissenschaften fanden hier gleichsam in einem großen gemeinschaftlichen Centrum Vertreter, welche nicht nur selbst ihrer Zeit und ihrer Schule alle Ehre machten, sondern auch anderwärts schlummernde Talente weckten und zur Nacheiferung anregten. Euklides selbst gehörte zu den Ersten, welche Ptolemäus Lagi zu einem Lehramte an der neu gegründeten Schule berief. Dieser Umstand ist aber auch fast das Einzige, was wir von den äußern Lebensverhältnissen des berühmten Mannes wissen [28]). Seine Collegen waren die von Ptolemäus, dem

28) S. Proklus Comment. zum Euklid. Ed. Bas. p. 20. Bar. I. c. 4. Ausführlichere Nachrichten theilen uns Arabische Historiker über ihn mit, die aber,

Digitized by Google

Verfaſſer der Μεγάλη Σύνταξις, oft citirten Aſtronomen Timocharis und Ariſtillus. Es folgt nun eine Reihe von Mathematikern und Aſtronomen, welche entweder in Alexandrien ſelbſt lebten, oder doch der dortigen Schule ihre Ausbildung verdankten, und deren Werke die Bewunderung, welche die Nachwelt ihnen gezollt hat und noch bis auf den heutigen Tag zollt, in vollem Maaße verdienen. Es iſt hinreichend, in einem Zeitraume von wenig mehr als einem Jahrhundert die Namen Ariſtarchus, Archimedes, Eratoſthenes, Apollonius, Kteſibius, Heron, Hipparchus zu nennen, durch welche die Geometrie und Aſtronomie der Griechen auf den hohen Gipfel erhoben wurde, auf dem dieſe Disciplinen allen ſpäteren Nationen als Muſter vorleuchteten. Auch der praktiſche Calcul blieb nicht vernachläſſigt, und wir haben oben von den dahin

---

ſobald ſie ſich ins Ausland wagen, wenig zuverläſſig ſind. Der anonyme Verfaſſer der gegen das Ende des zwölften Jahrhunderts geſchriebenen Gelehrten-Chronik, (تاريخ الحكماء), aus welcher Caſiri in ſeiner Bibl. Arab. Hisp. Escur. ſo ſchätzenswerthe Auszüge über Mathematiker mittheilt, ſagt T. I. p. 341 des angeführten Werkes: „Euklides, der Sohn des Naukrates, des Sohns des Zenarchus (ſo corrigirt Caſiri den Arabiſchen Text, in welchem die beiden Namen نوقطرس Nauſtares und زنبقس Zenikus lauten), bekannt unter dem Namen des Geometers (wörtlich des Beſitzers der Geometrie, صاحب جومطريا), ein Gelehrter der alten Zeit, ſeinem Stamme nach ein Grieche, ſeinem Aufenthalte nach ein Syrer, ſeinem Geburtsorte nach ein Tyrier, beſaß eine große Geſchicklichkeit in der Geometrie u. ſ. w.“ Zu einem Tyrier macht ihn auch Abulfaraj Hist. dyn. ed. Pococke p. 64. Merkwürdig iſt, daß beide Autoren, erſterer auf Jakob ben Iſaak Alkindi ſich berufend, unſern Euklides jünger als Apollonius machen. Alkindi nämlich ſagt, Euklides habe zwei Bücher des Apollonius über die Kegelſchnitte vervollſtändigt, ſodann eine Einleitung zum Verſtändniß der fünf Körper geſchrieben, und daraus ſeien die ihm zugeſchriebenen dreizehn Bücher entſtanden. Abulfaraj a. a. O. ſagt, Apollonius Werk über die Kegelſchnitte nebſt einem andern Buch, das Apollonius verfaßt habe, ſeien die Veranlaſſung geweſen, daß Euklides lange Zeit nachher ſein Werk geſchrieben habe. Bauer in ſeiner Überſetzung des Abulfaraj (S. 58) hat es nicht für gut befunden, dieſer Stelle eine berichtigende Anmerkung beizufügen. Daß die älteren Occidentalen, ſelbſt noch bis ins ſiebzehnte Jahrhundert hinein, den Mathematiker Euklides mit dem gleichnamigen Philoſophen von Megara, dem Zeitgenoſſen Platon's verwechſelten, habe ich oben S. 13 bereits erwähnt. Den doppelten Fehler, den ich dort bei Dechales gerügt habe, begeht auch Blancanus, daß er nämlich den Megarenſiſchen Philoſophen, welcher c. 424 ſtarb, unter Ptolemäus dem Erſten, welcher ſeit 323 das im Jahre 332 erbaute Alexandria in Beſitz nahm, in dieſe Stadt ziehen läßt. S. Chronol. math. p. 45.

gehörigen Arbeiten Archimed's und Apollonius gesprochen. Weniger Nahrung fand in dieser geometrischen Periode die theoretische Arithmetik, und es ist unter den genannten Männern nur ein einziger, dem wir eine überdies nicht sehr erhebliche Erweiterung dieses Zweiges der Wissenschaft verdanken. Es ist Eratosthenes. Er hat eine Methode zur Auffindung der Primzahlen erfunden, welche unter dem Namen des Siebes des Eratosthenes (κόσκινον) bekannt ist [29]). Den Namen hat diese Methode daher, daß Eratosthenes nicht die Primzahlen geradezu finden lehrte, sondern vielmehr aus der fortlaufenden Zahlenreihe allmählig alle diejenigen ausschied, welche nicht Primzahlen sind, so daß zuletzt nur die Primzahlen übrig blieben. Er siebte also gewissermaßen die Zahlen durch, so daß die unbrauchbaren durchfallen mußten und nur die verlangten zurückblieben. Geradezu als unbrauchbar schied Eratosthenes zur Vereinfachung der Arbeit alle geraden Zahlen aus, und schrieb nur die ungeraden von 3 ab in einer möglichst langen Reihe hin (ὡς δυνατὸν μάλιστα ἐπὶ μήκιστον στίχον, sagt Nikomachus). Er untersuchte nun zunächst, welche Zahlen durch 3 theilbar wären, und fand, daß von 3 an jede dritte als zusammengesetzte Zahl wegzustreichen sei. Ebenso konnte er von 5 an jede fünfte, von 7 an jede siebente u. s. w. wegstreichen. Wenn er nun diese Operation durch die ganze Reihe durchgeführt hatte (wobei noch der Vortheil zu berücksichtigen war, daß er, wenn er die Reihe bis zur $n$ten ungeraden Zahl, also bis zur Zahl $2n - 1$ hingeschrieben hatte, den Versuch nur mit den Zahlen von 3 bis zur $\sqrt{2n - 1}$ anstellen durfte), so standen zuletzt als undurchstrichen nur noch die Primzahlen da. So hatte er von den vorher durch einander gemengten Zahlen die unbrauchbaren ausgesiebt und nur die brauchbaren behalten. Übrigens fällt in die Augen, daß diese Methode unüberwindliche Hindernisse in der Ausführung darbietet, sobald man der Tabelle der Primzahlen eine auch nur einigermaßen bedeutende Ausdehnung geben will, und Bossut hätte diese Methode schwerlich un moyen *facile et commode* de trouver les nombres premiers [30]) genannt, wenn er der Probe halber versucht hätte, mit Hilfe dieses leichten und

29) Die Nachricht davon findet sich in der Arithmetik des Nikomachus, l. 1. c. 13. p. 84. 85. Ast. — p. 17. 18. Paris.

30) Hist. des math. T. 1. p. 6.

Digitized by Google

bequemen Mittels die Primzahlen etwa bis zu einer Million auszusieben.

Diesen kleinen Zuwachs abgerechnet, scheint die Arithmetik, wie sie in den Elementen Euklid's enthalten ist, fast vierhundert Jahre hindurch einzige Norm geblieben zu sein. Wenigstens wird uns in diesem langen Zeitraume von etwa 300 v. Chr. bis ungefähr 100 n. Chr. kein einziger Mathematiker genannt, der eine wissenschaftliche Zahlentheorie, d. i. Ἀριθμητική, geschrieben hätte. Die Geometrie und Astronomie scheint alle Kräfte der Mathematiker in Anspruch genommen, und das Beispiel der großen Geometer Archimedes und Apollonius alle mathematischen Talente nach dieser einseitigen Richtung mit sich fortgerissen zu haben. Diese Erscheinung darf uns aber nicht Wunder nehmen; sie liegt vielmehr ganz in der Natur des menschlichen Geistes begründet, und die Geschichte der Wissenschaft bietet uns ähnliche Erscheinungen mehr als einmal dar. Als am Ende des ersten oder am Anfange des zweiten christlichen Jahrhunderts Nikomachus seine Arithmetik geschrieben hatte, da nahm die ganze mathematische Literatur der Griechen bis auf die spätesten Zeiten des Griechenthums hin eine ganz arithmetische Richtung, und das Publicum wurde vom zweiten bis zum vierzehnten Jahrhundert mit arithmetischen Werken überschwemmt. Als Leonardo Bonacci die Algebra aus Arabien nach Europa gepflanzt hatte, arbeiteten die Mathematiker fast vierhundert Jahre hindurch nur in der Algebra, und während diese Disciplin reißende Fortschritte machte, blieben die übrigen auf ihrem alten Standpuncte stehen. Da erschien die erste Übersetzung und bald darauf die Originalausgabe von Diophant. Alsbald ward die Algebra der bestimmten Gleichungen verlassen, und die größten Genies, Bachet, Fermat, Pell, Freniele, lösten Diophantische Aufgaben und führten dessen Theorien fort. Dieses Streben ward unterbrochen durch die Erfindung der Differentialrechnung, und kam so ganz und gar in Vergessenheit, daß nun wieder über hundert Jahre lang nichts für Diophant und dessen Analysis gethan ward, bis Euler den Gegenstand wieder aufnahm; seitdem ist nun die unbestimmte Analytik Diophant's und seine Zahlentheorie wieder Lieblingsstudium der größten Mathematiker geworden, unter denen besonders Lagrange, Legendre, Gauß und Jacobi genannt zu werden verdienen. Und analoge Erscheinungen bietet die Geschichte fast jeder Wissenschaft dar. So war z. B. gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts, seit der großartigen Arbeit Kenni-

Digitized by Google

cott's, in alle Theologen eine wahre Manie gefahren, Varianten-sammlungen zum Bibeltext anzulegen, eine Richtung, deren Hemmung nicht das kleinste Verdienst ist, welches Eichhorn um die Theologie sich erworben hat. Aber wir kehren zur Sache zurück.

Es scheint, als habe Asien seine Ansprüche an die Arithmetik, auch im Griechischen Sinne des Worts, frühzeitig geltend machen wollen. Die drei berühmtesten Griechischen Arithmetiker, Nikomachus, Theon und Jamblichus waren Asiaten von Geburt. Von den beiden erstgenannten mag es zweifelhaft scheinen, wem vor dem andern der Vorzug der Priorität gebühre, da das Alter des Nikomachus nicht ganz bestimmt angegeben werden kann. Indeß hat die Annahme, daß er am Ende des ersten bis in den Anfang des zweiten Jahrhunderts hinein, also vor Theon gelebt habe, manches für sich. Jedenfalls will ich mit ihm als dem bei weitem wichtigeren hier beginnen. Obgleich Nikomachus bei den Griechen sich in bleibendem Ansehen erhalten hat und von fast unzähligen Schriftstellern genannt und citirt wird, so wissen wir doch sehr wenig, fast gar nichts, über seine äußern Lebensverhältnisse. Die Annahme, daß er etwa um das Jahr 100 n. Chr. gelebt habe, gründet sich auf die beiden Data, daß er auf einer Seite in seiner Schrift über die Musik den unter Tiberius Regierung lebenden Thrasyllus nennt [31]),

31) Enchir. harmon. I. p. 24: καὶ προσεκτησάμεθα τὴν Πυθαγορικοῦ κανόνος κατατομὴν ἀκριβῶς κατὰ τὸ βούλημα τοῦ διδασκάλου συντετελεσμένην, οὐχ ὡς Ἐρατοσθένης παρήκουσεν ἢ Θράσυλλος, ἀλλ' ὡς ὁ Λοκρὸς Τίμαιος etc. — Vergl. *Fabricii bibl. graeca ed. Harles.* T. V. p. 630. not. c. Equidem Thrasylli cujusdam musici ac poetae antiqui patria Phliasii mentio apud Plutarchum de musica p. 1137. atque hunc a Nicomacho laudari putabat doctissimus Jonsius p. 224. Sed scripsisse illum minus constat; itaque verisimilius est, intelligi Thrasyllum Mendesium, multarum artium scientiam professum et Platonicae sectae addictum, quem Tiberius in contubernium adscivit, astrologicis ejus divinationibus usus etc. . . . . Ἐν τῷ περὶ τῶν ἐκτὰ τόνων citatur Thrasyllus a Porphyrio in Ptolemaei music. p. 266. — Jedenfalls untergeschoben ist das Citat des Ptolemäus in Nikomachus Enchir. harm. II. p. 36, weil Nikomachus unmöglich Ptolemäus citiren und zugleich von Apulejus übersetzt sein kann, und es ist jedenfalls der Conjectur Meibom's, des Herausgebers des mir bisher nicht zugänglichen Enchiridion harmonices, welche Fabricius l. l. p. 630 anführt, beizustimmen: quin libro altero memorat Claudium Ptolemaeum, clarum Antonini Pii temporibus, nisi cum Marco Meibomio adfirmare velis, verba illa de Ptolemaeo esse a recentiore manu, praesertim cum enchiridion

Digitized by Google

und daß auf der andern Seite Apulejus von Madaura, unter der Regierung der Antoninen, seine Arithmetik ins Lateinische übersetzt hat. Er gehörte der Pythagoräischen Schule an [32]), und war aus der Stadt Gerasa, wahrscheinlich in Arabien [33]), gebürtig, woher er den Beinamen Γερασηνός oder Γερασινός führt. Nicht leicht sind über einen alten Auctor so viele Irrthümer verbreitet worden, wie über Nikomachus. Einige sogenannte Historiographen der Mathematik erweisen ihm die Ehre, ihn ins sechste Jahrhundert vor Christo zu versetzen [34]). Solche Anachronismen beweisen nur, daß die Erzähler das Werk des Auctors nicht gelesen haben und nicht wissen, daß, um anderer Data nicht zu erwähnen, gerade die Nachricht über das Sieb des Eratosthenes, die ich so eben mitgetheilt habe, sich bei Nikomachus findet, so daß er wenigstens nicht Jahrhunderte vor Eratosthenes gelebt haben kann. Diese Irrthümer haben wahrscheinlich darin ihren Grund, daß man irgendwo einen Nikomachus (und deren gab es unter den Griechen unzählige) fand, der um die er-

---

harmonicum integrum libro primo absolvatur, et quae libri secundi vice subjunguntur, tantum excerpta sint ex majore, ut videtur, opere musico, quod pluribus libris Nicomachus post enchiridion concinnarat. Ceterum Claudio Ptolemaeo suppar fuit Apulejus Madaurensis, qui Nicomachi Arithmeticen latine converterat, teste Cassiodoro de Arithmet. p. 555, ex quo idem tradunt Isidorus Hisp. l. III. originum cap. 2. et Beda libro de computo, aliique. Vergl. außerdem *Tennulii* notae in Jamblichi arithm. p. 64. 65. *Brucker* hist. philos. T. II. p. 160. 161.

32) Pappus III. prop. 16. (p. 19. der Ausg. v. 1660). Mehre Citate s. in Brucker hist. phil. T. II. p. 160. not. y.

33) Fabr. bibl. graeca T. V. p. 629. *Nicomachus e Gerasa Arabiae urbe.* Dazu die Note a): Sed fuit et altera Gerasa Syriae coeles, cujus meminere Stephanus Byz. et Ptolemaeus, quamque Nicomachi nostri fuisse patriam omnes unanimiter adseverare adfirmat Abr. Berkelius ad Stephanum p. 296. Sed neminem certe veterum hoc adfirmare video. Itaque malo adsentire antiquo scriptori, (non Jamblicho, in cujus commentario per Tennulium edito nihil tale legitur, sed Johanni Philopono vel Asclepio Tralliano), qui patriam Nicomachi scribit Gerasam finitimam Bostrae in Arabia. Γερασηνὸς δὲ λέγεται ἀπὸ τῆς πόλεως, ἣ ὄνομα Γέρασα. Ἔστι δὲ περὶ Βόστραν καὶ Ἀραβίαν. [Γυψαρίαν legit Berkelius, forte scribendum Βόστραν τὴν Ἀραβίας].

34) Blancanus p. 42. in seinem Quartum Seculum incipiens ab urbe cond. ann. 201, ante Christum ann. 552. Dechales p. 29: Tertio Urbis conditae saeculo floruit Nicomachus Arithmeticus.

Digitized by Google

wähnte Zeit gelebt haben mochte, und der wurde dann schnell mit unserm Arithmetiker identificirt, ähnlich wie Temulius ohne Bedenken hinschreibt: Vixit post Philostratum, teste Sidonio lib. VIII. ep. 3. *Apollonii Pythagorici vitam, non ut Nicomachus senior e Philostrati, sed ut Thascius Victorianus e Nicomachi schedio exscripsit, quia jusseras, misi,* etc. [35]), womit er den Arithmetiker ins dritte Jahrhundert nach Christo, also hinter einige seiner Commentatoren zurückschiebt, ohne zu bedenken, ob in der angeführten Stelle nicht vielleicht ein anderer Nikomachus gemeint sein könne. Von mehr Bedeutung aber, als diese vagen Anachronismen, sind die verkehrten Urtheile über den Inhalt der Arithmetik des Nikomachus. Fast einstimmig heißt es, Nikomachus habe sich in seinem Werke mit den Pythagoräischen Zahlengeheimnissen beschäftigt [36]). Man verwechselte seine sehr werthvolle Arithmetik

---

35) Notae in Jambl. arithm. p. 65. Das hindert diesen infelix editor aber nicht, auf der folgenden Seite die Arithmetik schon im zweiten Jahrhundert von Apulejus, qui vixit tempore Marci Antonini, ins Lateinische übersetzen zu lassen.

36) Was Montucla T. 1. p. 318. 19. über Nikomachus sagt, beweist nur, daß er weder dessen Arithmetik, noch die fälschlich ihm beigelegten Theologumena gelesen hat. — Dasselbe gilt von Käſtner (Gesch. d. Math. Th. I. S. 43. 44.); nachdem er von der Euklidischen Arithmetik als einziger Quelle, aus der wir die Griechische Arithmetik kennen, gesprochen, fährt er so fort: „Von dem Sichern in diesen Kenntnissen machte man Anwendungen, die auf Geheimnisse führen sollten, und jetzo höchstens für Spielwerke erkannt werden, viele gar für Unsinn, und wer strenge von ihnen urtheilt, strafbaren Aberglauben. Dergleichen finden sich in Nicomachi Arithmetica Par. 1538. Τὰ θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς . . . . Par. 1543. Jamblichus in Nicomachi Arithmeticam introductionem" u. s. w. Ich möchte wohl wissen, ob Käſtner aus Nikomachus oder Jamblichus auch nur eine Stelle als Belag für seine Aussage hätte beibringen können. Ich habe keine der Art gefunden. — Mönnich (Lehrbuch d. Mathem. 1. Thl. 2. Abth. S. 460) schreibt sehr bestimmt: „Unter Tiber's Regierung (?) schrieb Nikomachus, ein Pythagoräer, εισαγωγην αριθμητικην; sie ist zuerst (bis auf Mönnich's Zeit aber auch nicht wieder) in Paris 1538 gedruckt. Außer vielen, theils wenig brauchbaren Eintheilungen der Zahlen enthält dies Buch viel von Zahlengeheimnissen oder eigentlich Spielwerken mit Zahlen, worüber unter den Alten Jamblichus einen Griechischen Commentar, ed. 1668 u. s. w. geschrieben." — Die Herren wissen alle sehr gut und richtig anzugeben, wann und wo die Arithmetik des Nikomachus gedruckt worden ist; hätten sie sie dann nicht auch lesen können? — Bossut macht es, wie oft, am besten; er nennt Nikomachus gar nicht, sondern läßt gleich auf Eratosthenes Diophant folgen.

Digitized by Google

mit einem Werke, welches mit Unrecht Nikomachus Namen führt; es sind dieses die Θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς. Allerdings soll Nikomachus, einer Nachricht bei Photius gemäß [37]), ein ähnliches Werk verfaßt haben, aber die auf uns gekommenen Theologumena sind sicher nicht von ihm, weil er selbst, ja sogar der Commentator seiner Arithmetik, Anatolius, aus dem vierten Jahrhundert, darin citirt wird. Der Grund der vielen schiefen und unbestimmten Urtheile über diesen Autor ist wahrscheinlich darin zu suchen, daß seine Arithmetik noch nicht das Glück gehabt hat, in irgend eine occidentalische Sprache übersetzt worden zu sein, ein Umstand, der die Mathematiker von dem Studium des Werkes abgeschreckt zu haben scheint. Freilich haben wir in Nikomachus keinen Diophant, aber wir haben in seinem Werke eine ziemlich vollständige elementare Arithmetik, und eine Vorarbeit Diophant's, welche keinesweges die gänzliche Vernachlässigung verdient, welche sie in neuerer Zeit erfahren hat [38]). Es sei mir daher erlaubt, hier gut zu machen, was man so lange gegen den verdienstvollen Verfasser vergangen hat, und so ausführlich, wie es sich, ohne weitschweifig zu sein, thun läßt, den Inhalt seiner Arithmetik Schritt für Schritt meinen Lesern vor Augen zu führen.

Erstes Buch.

Nach einer gelehrten philosophirenden Einleitung (Kap. 1—6) beginnt die eigentliche Arithmetik mit der Definition der Zahl (Kap. 7): Ἀριθμός ἐστι πλῆθος ὡρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χῦμα ἐκ μονάδων συγκείμενον. Es folgt sodann die Eintheilung der Zahlen in gerade und ungerade.

---

37) S. Fabricii bibl. graeca T. V. p. 638. ed. Harles.

38) Ich muß hier Reimer, den Übersetzer der Vossut'schen Geschichte der Mathematik, ausnehmen, der im ersten Theil seiner Übersetzung S. 42. Nikomachus wenigstens insoweit Gerechtigkeit widerfahren läßt, daß er ihn nennt und über die übrigen Griechischen Arithmetiker erhebt, wenngleich er ihn darin wieder zu tief herabsetzt, daß er sagt, sein Werk enthalte keinen besonders merkwürdigen Satz, der dem Verfasser eigen zu sein scheint. Wir können zwar aus Mangel an Quellenkenntniß nicht unterscheiden, was Nikomachus selbst und was von Alters her der Schule angehörte; indeß berechtigt uns das doch nicht anzunehmen, daß Nikomachus bloß compilirt habe.

Digitized by Google

Kap. 8. Jede Zahl ist die halbe Summe der zu beiden Seiten gleich weit von ihr abstehenden. Einzig in ihrer Art steht hier die Einheit da, weil sie nicht zu beiden Seiten Zahlen hat; sie ist die Hälfte der einzigen, die neben ihr steht. (Wenn wir es sonst nicht schon wüßten, so würde hieraus deutlich erhellen, wie ganz fremd den Griechen die Vorstellung war, die Zahlenreihe nach der andern Seite über 1 hinaus fortzusetzen. Auch die Null galt ihnen nicht als Zahl, sonst hätte Nikomachus nicht nöthig gehabt, die Zahl 1 von seiner Regel auszunehmen). Die gerade Zahl zerfällt in drei Klassen, in die gerademal-gerade (ἀρτιάκις ἄρτιος), die ungerad-gerade (περισσάρτιος) und die gerad-ungerade (ἀρτιοπέρισσος). Dieser Gegenstand macht den Inhalt des achten bis zehnten Kapitels aus, und Nikomachus weicht hier von Euklides ab, dessen Definitionen insofern nicht genau sind, als sie sich nicht gegenseitig ausschließen. Bei Euklides, unter den Definitionen des siebenten Buchs, heißt es nämlich: „Eine gerademal gerade Zahl ist eine solche, welche durch eine gerade Zahl dividirt eine gerade Zahl zum Quotienten giebt, eine gerademal ungerade, welche durch eine gerade Zahl dividirt eine ungerade Zahl zum Quotienten giebt." Er selbst sagt aber IX, 34: „Wenn eine gerade Zahl weder durch fortgesetzte Verdoppelung der 2 entstanden ist, noch durch 2 dividirt einen ungeraden Quotienten giebt, so ist sie sowohl gerademal gerade als auch gerademal ungerade." Diese Inconvenienz wird von Jamblichus in seinem Commentar über Nikomachus mehrmals heftig getadel [39]), nur scheint Jamblichus manchmal zu verlangen, daß Euklides sich hätte nach des Nikomachus Definitionen richten sollen. Nach Nikomachus sind gerademal gerade nur die Potenzen von 2, d. h. diejenigen Zahlen, bei denen man durch fortgesetztes Halbiren nicht eher als bei der Einheit auf einen ungeraden Quotienten kommt; dieselben Zahlen nennt Euklides IX, 32. ἀρτιάκις ἄρτιοι μόνον. Diesen entgegengesetzt sind die gerad-ungeraden (ἀρτιοπέριττοι), deren Hälften bereits ungerade sind. In der Mitte stehen die ungerad-geraden (περισσάρτιοι), deren Hälften zwar gerade sind, bei denen man aber durch fortgesetztes Halbiren einmal auf einen andern ungeraden Quotienten als auf 1 kommt. Demnach sind die drei Klassen, in Zeichen ausgedrückt, folgende

ἀρ-

39) Ed. Tennulii p. 26. 27. 31. 34.

Digitized by Google

ἀρτιάκις ἄρτιοι . . . . 2^n
ἀρτιοπέριττοι . . . . . $2\,(2m+1) = 4m+2$
περισσάρτιοι . . . . . $2^{n+1}\,(2m+1)$.

Die letzteren eben sind es, von denen Euklides sagt, daß sie, nach seiner Definition, sowohl gerademal gerade als gerademal ungerade sind. — Die erste Klasse bildet eine geometrische, die zweite eine arithmetische Reihe, die dritte aber mehre parallel laufende arithmetische Reihen. Die letzten findet man nämlich, wenn man die Reihe der ungeraden Zahlen erst mit 4, dann mit 8 und so fort mit den höhern Potenzen von zwei, oder was dasselbe ist, wenn man die Glieder der zweiten Klasse, der ἀρτιοπέρισσοι, der Reihe nach mit jedem Gliede der ersten Klasse, der ἀρτιάκις ἄρτιοι, multiplicirt. Schreibt man sich nun die aus den successiven Multiplicationen hervorgehenden Gliederreihen eine unter die andere, so wird, nach Nikomachus, folgende wunderbare Erscheinung sich zeigen: Die Horizontalreihen haben die Eigenschaft der gerad-ungeraden Zahlen, daß nämlich die Summe der äußern Glieder gleich ist dem doppelten mittlern, wenn die Anzahl ungerade, oder gleich der Summe der beiden mittlern, wenn die Anzahl gerade ist; die Verticalreihen dagegen theilen mit den gerademal geraden Zahlen die Eigenthümlichkeit, daß das Product der beiden äußern Glieder unter denselben Bedingungen entweder gleich dem Quadrat des mittlern oder gleich dem Product der beiden mittleren Glieder ist; daher kommen dieser Zahlenklasse die Eigenschaften jener beiden Klassen zugleich zu, aus denen sie gemischt ist [40]).

---

40) Kap. 10. am Ende: Ὅταν δὴ τοὺς ἐξ ἑκάστου πολλαπλασιασμοῦ ἐν ἰδίῳ στίχῳ ἐντάξῃς, παραλλήλους ποιούμενος τοὺς στίχους, φανήσεταί σοι θαυμασιῶς· κατὰ μὲν τὸ πλάτος συμβαῖνον τὸ τῶν ἀρτιοπερισσῶν (leg. ἀρτιοπερίσσων) ἰδίωμα, ὅτι ἀεὶ τῶν ἄκρων ὁ μέσος ὑποδιπλάσιος, εἰ εἷς εἴη, εἰ δὲ δύο μέσοι, ἴσοι κατὰ σύνθεσιν· κατὰ δὲ τὸ μῆκος τὸ τῶν ἀρτιάκις ἀρτίων· τὸ γὰρ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπό, εἰ μία εἴη μεσότης, ἢ τῷ ὑπό, εἰ δύο εἵησαν· ὥστε τὰ ἀμφοτέρων ἰδιώματα τούτῳ μόνῳ συμβέβηκεν, ὡς ὄντι φυσικῷ μίγματι αὐτῶν. Ich habe diese Stelle besonders aus philologischen Rücksichten hier abgeschrieben. Zuerst habe ich πολλαπλασιασμοῦ, welches Ast auf Autorität eines Codex in πολλαπλασιασμοὺς verwandelt hat, als ganz gewiß allein richtig wiederhergestellt. Eine ganz unglückliche Conjectur aber hat Ast gemacht, indem er die elliptischen, aber ganz klaren Worte τὸ γὰρ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπὸ . . . ἢ τῷ ὑπό ergänzt und respective corrumpirt in τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ (!) μέσου . . . ἢ τῷ

Kap. 11 — 13. Wie die geraden, so lassen sich auch die ungeraden Zahlen in drei Klassen theilen. Diese drei Klassen (εἴδη) sind die Primzahl (bei Nikomachus und Theon von Smyrna immer πρῶτος καὶ ἀσύνθετος, bei Euklides bloß πρῶτος), die zusammengesetzte Zahl (δεύτερος καὶ σύνθετος, bei Euklides bloß σύνθετος), und in der Mitte zwischen beiden diejenige Klasse, deren Zahlen an und für sich zusammengesetzte, in Bezug auf eine andere Zahl aber Primzahlen sind. Diese Eintheilung leidet an wesentlichen Mängeln, weil erstens die dritte Klasse sämmtliche Zahlen der zweiten Klasse mit in sich begreift, zweitens, weil nicht abzusehen ist, warum die Zahlen der zweiten und dritten Klasse durchaus un-

---

ὑπὸ τῶν μέσων. Der Ausdruck ὁ ὑπὸ τῶν — ist das Product zweier Zahlen, ὁ ἀπὸ τοῦ — ist das Quadrat einer Zahl, aber ὁ ὑπὸ μέσου hat gar keinen Sinn. Für diesen strenge geschiedenen Gebrauch des ὑπὸ und ἀπὸ Beispiele anzuführen, ist unnütz; Euklides und Diophantus liefern deren auf jeder Seite. Aber auch dafür giebt es Beispiele, daß beide Präpositionen mit dem Artikel absolut für Product und Quadrat gesetzt werden, wenn die bezüglichen Zahlen sich von selbst verstehen. So heißt es bei Diophant III, 17. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. πάντων δὲ δύο τετραγώνων κατὰ τὸ ἑξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον d. h. Man soll drei Zahlen der Art finden, daß das Product von je zweien zur Summe derselben beiden addirt, ein Quadrat wird; und ferner von je zweien dieser Quadrate das Product sammt der Summe ein Quadrat werde. Eben so IV, 6: ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ ὑπὸ ἐστι μ^{ο} θ̄. Desgleichen IV, 14. 17. Und ganz in derselben Verbindung, wie an unserer Stelle haben wir die Formel noch einmal bei Nikomachus II, 19, wo es ebenfalls von der continuirlichen Proportion heißt τὸ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπὸ, und wo Ast eben so ungeschickt, wie an dieser Stelle, corrigirt τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ (!!) τοῦ μέσου. Jedenfalls hätte Ast der Umstand, daß an beiden Stellen sämmtliche Handschriften übereinstimmten, vorsichtig machen sollen. Camerarius in seiner Explicatio in Nicom. (bei Tennulius Ausg. des Jamblichus p. 35) hat diese zweite Stelle gar nicht verstanden. Er sagt: Quod autem ait autor: καὶ ἐπὶ πασῶν (δὲ) τῶν συζυγιῶν τὸ ὑπό ἴσον τῷ ἀπὸ etc., quae latine interpretari etsi perquam difficile fuit, sumus tamen conati hoc modo: Atque in omnibus illis copulationibus, aequale reperitur ab aliquibus, et id quod ex aliquo existit. Die Worte heißen ganz einfach: Das Product (nämlich der äußeren Glieder, was sich von selbst versteht) ist gleich dem Quadrat (des mittleren Gliedes). — Dagegen muß bei Nikomachus II, 24 (p. 142) in den Worten κἂν μὴ συνημμένοι, ἀρτιοταγεῖς δὲ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῶν μέσων für ἀπὸ jedenfalls ὑπὸ gelesen werden, obgleich Ast in den Anmerkungen keiner andern Leseart erwähnt.

Digitized by Google

gerade Zahlen sein sollen, was die der ersten Klasse allerdings, mit Ausnahme der Zahl 2, immer sind, drittens und hauptsächlich aber, weil die dritte (Klasse kann man eigentlich nicht sagen) Bezeichnung gar nicht hieher gehört. Nikomachus sagt nämlich am Anfange des Kap. 17: Προτετεχνολογημένου δὲ ἡμῖν ἐν τοῖς ἄνω περὶ τοῦ καθ' αὑτὸ ποσοῦ, νῦν μετερχώμεθα καὶ ἐπὶ τὸ πρός τι. „Nachdem ich in den vorigen Abschnitten die Vorkenntnisse in Betreff der Größe an und für sich gegeben habe, gehe ich jetzt zu der relativen Größe über." Nun ist aber die Eigenschaft einer Zahl, vermöge deren sie nach unserm Kunstausdruck relative Primzahl ist, doch sicher keine an ihr absolut haftende, sondern eine erst in der Vergleichung mit andern Zahlen sich herausstellende Eigenschaft; es gehört also dieses Merkmal durchaus nicht als Eintheilungsgrund in eine auf ihre subjectiven Eigenschaften gegründete Klassification der Zahlen. Dergleichen Inconvenienzen führt das unselige Streben nach Consequenz herbei; Nikomachus hätte sicherlich diesen Fehler nicht begangen, wenn er nicht, der Analogie wegen, durchaus drei Theile hätte herausbringen wollen. Da läßt sich schon eher die wenngleich ebenfalls unnöthige Eintheilung von Psellus hören (Ed. Xylander p. 3): Τῶν δὲ περιττῶν οἱ μέν εἰσι πρῶτοι, οἱ δὲ σύνθετοι ... μέσοι δὲ οἱ μεταξὺ τούτων, οἱ μήτε μόνῃ μονάδι, μήτε δυσὶν ἢ πλείοσι καταμετρούμενοι ἀριθμοῖς, ἀλλ' ἑνὶ μόνῳ ἀριθμῷ μετρούμενοι, ὡς ὁ ἐννέα τριάδι, ὁ εἰκοσιπέντε πεντάδι, ὁ τεσσαρακονταεννέα ἑπτάδι, καὶ ὅσοι τούτοις παρόμοιοι, das heißt, die ungeraden Quadratzahlen. Übrigens giebt Nikomachus im Kap. 13. die oben mitgetheilte Methode des Eratosthenes zur Aufsuchung der Primzahlen, und die Methode, die schon Euklides lehrt, zu untersuchen, ob zwei gegebene Zahlen zu einander Primzahlen seien oder nicht, und im letztern Falle, welches das größte gemeinschaftliche Maaß beider sei.

Kap. 14 — 16. Unter den geraden Zahlen sind einige übervollständig (ὑπερτελεῖς), andere unvollständig oder mangelhaft (ἐλλιπεῖς), und mitten inne stehen die vollständigen Zahlen (τέλειοι, Theol. III. p. 15. auch ἴσοι genannt). Auch hier leuchtet nicht ein, warum gerade nur unter den geraden Zahlen übervollständige und unvollständige sein sollen. Übrigens setzt Nikomachus zu der Euklidischen Theorie nichts Neues hinzu, außer dem Namen der ὑπερτελεῖς und ἐλλιπεῖς.

Kap. 17. „Nachdem ich bisher die Vorkenntnisse in Betreff

der Größe an und für sich gegeben habe, gehe ich jetzt zu der Größe in ihrer Beziehung zu andern über. Die Beziehung einer Größe auf eine andere ist im Allgemeinen ursprünglich zwiefach, Gleichheit und Ungleichheit. Über die Gleichheit läßt sich weiter nichts sagen, weil von zwei gleichen Größen nicht die eine so, die andere anders beschaffen sein kann. Das Ungleiche aber ist zwiefach, es hat ein Größeres und ein Kleineres. Nach der verschiedenen Art der Abhängigkeit von einander hat nun sowohl die größere als die kleinere zweier Größen andere Namen. Und zwar werden bei jeder von beiden fünf Arten von Beziehungen unterschieden." Diese fünf Beziehungen oder Verhältnisse (Nikomachus braucht nicht das Wort λόγος, sondern εἶδος) sind der Gegenstand der folgenden sechs Kapitel.

Kap. 18. Von zwei Zahlen, deren eine die andere mehr als einmal genau ganz in sich enthält, heißt die größere πολλαπλάσιος (multiplex, das Vielfache), die kleinere ὑποπολλαπλάσιος (submultiplex, Theil). Davon werden nun für bestimmte Zahlen die Adjectiva gebildet διπλάσιος, τριπλάσιος u. s. w. und die Gegensätze davon ὑποδιπλάσιος u. s. w.

Kap. 19. Von zwei Zahlen, deren eine die andere einmal ganz, und außerdem noch einen Theil derselben in sich enthält, heißt die größere ἐπιμόριος (superparticularis), die kleinere ὑπεπιμόριος (subsuperparticularis), das heißt, die größere Zahl verhält sich zu der kleineren, wie $p + 1$ zu p. Die für bestimmte Zahlenwerthe gebildeten Namen sind nun

$\frac{3}{2}$ ἡμιόλιος (sexquialter)	$\frac{2}{3}$ ὑφημιόλιος
$\frac{4}{3}$ ἐπίτριτος (sexquitertius)	$\frac{3}{4}$ ὑπεπίτριτος
$\frac{5}{4}$ ἐπιτέταρτος u. s. w.	$\frac{4}{5}$ ὑπεπιτέταρτος u. s. w.

Nikomachus erläutert die Sache durch folgenden Apparat. Er giebt eine Tabelle, deren erste Horizontalreihe die Reihe der natürlichen Zahlen, die zweite die doppelten, die dritte die dreifachen der ersten Zahlenreihe enthält, u. s. w., welches also die einfache Multiplicationstafel ist. Hier ist jede Zahl einer unteren Reihe ein πολλαπλάσιον (Vielfaches) der entsprechenden Zahl in der ersten Reihe. Dagegen stehen je zwei auf einander folgende Reihen, mit Ausnahme der ersten beiden, zu einander in dem Verhältnisse, daß die Zahlen der untern die ἐπιμόριοι der obern, dagegen die Zahlen der obern die ὑπεπιμόριοι der nächstfolgenden sind. Auch die folgenden Ver-

Digitized by Google

hältniſſe finden in dieſer Tafel, bei der wir uns nicht länger aufhalten wollen, ihre Anwendung.

Kap. 20. 21. Wenn eine Zahl eine andere einmal ganz und außerdem noch mehre Theile derſelben in ſich enthält, ſo heißt das Verhältniß der größern zur kleinern ἐπιμερής (superpartiens), das umgekehrte ὑπεπιμερής (subsuperpartiens). Nach dieſer Definition begreift das Verhältniß der ἐπιμερεῖς die allgemeine Form $2m + n : m + n$ in ſich. Es iſt aber zu bemerken, daß die für beſtimmte Zahlen gebildeten Namen bei den Griechen wie bei den Römern immer vorausſetzen, daß in der gegebenen Formel $n = 1$ iſt, ſo daß, wenn die kleinere Zahl 1 iſt, die größere $1 + \frac{m}{m+1}$ wird. Die einzelnen Namen ſind dann

$1 + \frac{2}{3}$ ἐπιδιμερής, superbipartiens
$1 + \frac{3}{4}$ ἐπιτριμερής, supertripartiens
$1 + \frac{4}{5}$ ἐπιτετράμερής, superquadripartiens

u. ſ. w., wo alſo nur der Zähler m ausgedrückt wird. Die umgekehrten Verhältniſſe heißen dann ὑπεπιδιμερής u. ſ. w. Aber Nikomachus theilt Kap. 21. und 23. eine andere Bildungsmethode dieſer Namen mit, derzufolge das allgemeine Verhältniß $1 + \frac{m}{m+n}$ ausgedrückt werden kann. Demzufolge heißen die bereits angeführten Verhältniſſe ἐπιδίτριτος, ἐπιτριτέταρτος, ἐπιτετράπεμπτος, und eben ſo kann man auch ſagen ἐπιτρίπεμπτος für $1 + \frac{3}{5}$, ἐπιτετραέβδομος für $1 + \frac{4}{7}$ u. ſ. w.

Die beiden folgenden Verhältniſſe ſind durch die Verbindung des erſten mit jedem der beiden andern entſtanden.

Kap. 22. Wenn eine Zahl eine andere mehr als einmal ganz, und außerdem noch einen Theil derſelben in ſich enthält, ſo heißt das Verhältniß der größern zur kleinern πολλαπλασιεπιμόριος, das umgekehrte ὑποπολλαπλασιεπιμόριος (lateiniſch multiplex superparticularis und multiplex subsuperparticularis). Das in dieſen Worten definirte Verhältniß iſt als $mn + 1 : n$. Bei den Namen für beſtimmte Zahlenwerthe geht der Werth des m in das πολλαπλάσιος, der Werth für n in das ἐπιμόριος ein, ſo daß die Namen ſich ſo geſtalten

$2 + \frac{1}{2}$ διπλασιεφήμισυς, duplex sexquialter
$2 + \frac{1}{3}$ διπλασιεπίτριτος, duplex sexquitertius
$2 + \frac{1}{4}$ διπλασιεπιτέταρτος, duplex sexquiquartus

Digitized by Google

$3 + \frac{1}{2}$ τριπλασιεφήμισυς, **triplex sexquialter**
$3 + \frac{1}{3}$ τριπλασιεπίτριτος, **triplex sexquitertius**
$3 + \frac{1}{4}$ τριπλασιεπιτέταρτος, **triplex sexquiquartus u. ſ. w.**

Kap. 23. Wenn eine Zahl eine andere mehr als einmal ganz und außerdem noch mehre Theile derſelben in ſich enthält, ſo heißt das Verhältniß der größern zur kleinern πολλαπλασιεπιμερής, das umgekehrte ὑποπολλαπλασιεπιμερής (lateiniſch **multiplex superpartiens und multiplex subsuperpartiens**). Die Namen der einzelnen Verhältniſſe für beſtimmte Zahlenwerthe, welche Nikomachus mittheilt, ſetzen immer voraus, daß in der allgemeinen Formel dieſes Verhältniſſes $p + \frac{m}{m+n} : 1 \quad n = 1$ ſei. Die Namen ſind dann folgende

$2 + \frac{2}{3}$ διπλασιεπιδιμερής, **duplex sexquibipartiens**
$2 + \frac{3}{4}$ διπλασιεπιτριμερής, **duplex supertripartiens**
$3 + \frac{2}{3}$ τριπλασιεπιδιμερής, **triplex superbipartiens u. ſ. w.**

Es ließen ſich jedoch ebenſo, wie bei den Verhältniſſen der einfachen ἐπιμερεῖς, Namen bilden, welche Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{m}{m+n}$ ausdrückten.

Den Schluß dieſes Kapitels bildet die an allen dieſen verſchiedenen Verhältniſſen erprobte Nachweiſung des Satzes, daß aus der Gleichheit als einziger und urſprünglicher Quelle alle mannigfachen Geſtaltungen der Ungleichheit und deren Verſchiedenheiten hervorgehen. Denn wenn uns, ſagt Nikomachus, drei gleiche Zahlen z. B. drei Einheiten vorliegen, ſo entſtehen daraus zunächſt die πολλαπλάσιοι, ſodann die ἐπιμόριοι, drittens die ἐπιμερεῖς, u. ſ. w., indem man nach ganz feſten und unveränderlichen Geſetzen fortſchreitet. Dieſe Geſetze ſind folgende; den erſten Ausdruck (der neuen Reihe) macht man dem erſten (der drei vorliegenden), den zweiten der Summe des erſten und zweiten, den dritten der Summe des erſten, des doppelten zweiten und des dritten gleich. Denken wir uns alſo die urſprünglichen drei Einheiten

1 1 1

und verfahren damit auf die vorgeſchriebene Weiſe, ſo wird die zweite Reihe

	1	2	4
die dritte	1	3	9
die vierte	1	4	16

Digitized by Google

und so fort; man erhält also durch Anwendung des vorgeschriebenen Satzes aus dem Verhältniß der Gleichheit successive alle Verhältnisse der verschiedenen Vielfachen. Schreiben wir uns nun irgend eine Reihe der Vielfachen umgekehrt hin, und bringen das allgemeine Gesetz in Anwendung, so erhalten wir das entsprechende Verhältniß aus der Reihe der ἐπιμόριοι.

Z. B. 4 2 1, die Reihe der Doppelten,
giebt 4 6 9, die Reihe der ἡμιόλιοι,

in welcher jedes Glied $1\frac{1}{2}$ des vorigen ist, aus der Reihe der Dreifachen 9 3 1
erhalten wir 9 12 16, die ἐπίτριτοι, in denen jedes Glied $1\frac{1}{3}$ des vorigen ist u. s. w. Gehen wir ferner von irgend einer Reihe der ἐπιμόριοι, umgekehrt hingeschrieben, aus, so erhalten wir die entsprechenden ἐπιμερεῖς. Z. B.

9 6 4
9 15 25, wo jedes Glied $1\frac{2}{3}$ des vorigen ist, und ebenso, wenn man irgend eine andere Reihe der ἐπιμόριοι zu Grunde legt. Gehen wir dagegen von irgend einer Reihe der ἐπιμόριοι in gerader Ordnung aus, so erhalten wir die πολλαπλασιεπιμόριοι. So wird aus

4 6 9
4 10 25 nach dem Verhältnisse $2\frac{1}{2}$,
aus 9 12 16
wird 9 21 49 nach dem Verhältnisse $2\frac{1}{3}$.

Und endlich aus den ἐπιμερεῖς in gerader Ordnung erhalten wir die πολλαπλασιεπιμερεῖς, z. B.

aus 9 15 25
wird 9 24 64 nach dem Verhältniß von $2\frac{2}{3}$, und ebenso die übrigen. So sind denn alle diese verschiedenen Verhältnisse aus dem ursprünglichen Verhältnisse der Gleichheit entwickelt worden. Nikomachus macht über diese Schemata noch die Bemerkung, daß immer die beiden äußern Glieder Quadratzahlen sind und daß das mittlere das Product ihrer Wurzeln ist; ferner daß in den beiden aus derselben Reihe in gerader und umgekehrter Ordnung abgeleiteten Reihen das letzte größte Glied dasselbe ist. Dieses ist der Inhalt des ersten Buchs dieser Arithmetik, welches im Ganzen wenig wissenschaftlich Interessantes darbietet.

Digitized by Google

Zweites Buch.

Wie Nikomachus am Ende des ersten Buchs gezeigt hatte, daß alle fünf von ihm aufgestellten Verhältnisse aus drei gleichen Terminis sich herleiten lassen, so lehrt er in den ersten fünf Kapiteln dieses Buchs, daß umgekehrt alle gegebenen Verhältnisse sich auf das Verhältniß der Gleichheit als ursprüngliches Element zurückführen lassen. „Da ein Element (στοιχεῖον) dasjenige ist, aus welchem als Erstem etwas zusammengesetzt und in welches als Letztes ein Ding aufgelöst wird, so will ich zeigen, daß auch die Gleichheit ein Element der relativen Größe ist (τοῦ πρός τι ποσοῦ). Nun haben wir gezeigt, wie alle Verhältnisse aus der Gleichheit zusammengesetzt werden; es ist also nur noch übrig darzuthun, daß auch die Auflösung derselben zuletzt immer auf die Gleichheit zurückführt."

Kap. 3. lehrt uns aus jeder Reihe der Vielfachen alle Zahlen zu finden, die in dem gleichnamigen Verhältnisse der ἐπιμόριοι stehen. Die Sache ist einfach die. Man schreibt in eine Reihe irgend eine von 1 beginnende geometrische Progression, darunter schreibt man die Reihe der Summen von je zwei auf einander folgenden Gliedern, unter diese die zweite Summenreihe und so fort, so erhält man eine Tabelle, welche alle Zahlen enthält, die zu einander in demjenigen epimorischen Verhältnisse stehen, welches dem Exponenten der ursprünglichen geometrischen Progression gleichnamig ist. Gehen wir z. B. von den Potenzen von 2 aus, so erhalten wir sämmtliche Zahlen, die gegen einander ἡμιόλιοι ($1\frac{1}{2}$) sind. Das Schema gestaltet sich so

1	2	4	8	16	32
	3	6	12	24	48
		9	18	36	72
			27	54	108
				81	162
					243

Hier ist jede Zahl gleich drei Halben der zunächst über ihr stehenden; und ganz analog ist es bei den übrigen Verhältnissen.

Kap. 4. Wenn man so das Schema nach den fortlaufenden Potenzen irgend einer Zahl bildet, so bilden die Anfangsglieder der Summenreihen allemal die successive Potenzenreihe der um 1 größeren Zahl.

Digitized by Google

1	n	n^2	n^3	n^4
	$n+1$	n^2+n	n^3+n^2	n^4+n^3
		n^2+2n+1	n^3+2n^2+n	$n^4+2n^3+n^2$
			n^3+3n^2+3n+1	$n^4+3n^3+3n^2+n$
				$n^4+4n^3+6n^2+4n+1$

Wir wollen uns aber bei diesem Gegenstande nicht länger aufhalten, sondern zu dem folgenden viel interessanteren Sujet übergehen, nämlich zu der Theorie der Polygonalzahlen, welche sich in der Arithmetik des Nikomachus (Kap. 6—20) zuerst behandelt findet, und zwar in einer überraschenden Vollständigkeit. Da die Pythagoräer Alles an Zahlen zu erläutern und zu veranschaulichen pflegten [41]), so sind die Anhänger dieser Schule gewiß lange vor Nikomachus auf die Idee gekommen, die in ihre Einheiten zerlegten Zahlen in der Form verschiedener geometrischer Figuren anzuordnen, und ganz gewiß tritt bei Nikomachus die schon so weit ausgebildete Lehre der Polygonalzahlen nicht als eine neue Wissenschaft auf. Aber wir haben Gründe zu glauben, daß Nikomachus wirklich zuerst über diesen Gegenstand, so wie überhaupt über die Pythagoräische Zahlenlehre, geschrieben hat. Tennulius und Fabricius bringen mehre Stellen aus alten Autoren bei, in welchen Nikomachus als derjenige bezeichnet wird, der die arithmetischen Lehren des Pythagoras zuerst systematisch geordnet und zu Papier gebracht hat [42]). Diese Abhandlung über die Polygonalzahlen ist aber nicht bloß deshalb wichtig, weil sie hier zum erstenmal erscheint, sondern vornehmlich auch darum, weil wir dieselbe als eine, sei es nun mittelbare, sei es unmittelbare, Vorarbeit und Quelle Diophant's anzusehen haben, der nicht bloß in seiner Schrift über die Polygonalzahlen diesen Gegenstand berührt, sondern denselben durch sein ganzes größeres Werk wie einen Goldfaden durchwebt. Ich will daher den Inhalt dieser Kapitel so vollständig wie möglich angeben.

---

41) Vergl. darüber Tennulius, Notae in Jambl. p. 74.

42) Ebendas. Auctor Altercationis Synagogae et Ecclesiae cap. 1. *Arithmeticam Samius Pythagoras invenit, Nicomachus scripsit.* Isidorus orig. lib. 3. cap. 2. *Numeri disciplinam primum apud Graecos Pythagoram autumant conscripsisse (?); ac deinde a Nicomacho diffusius esse compositam.* — Vergl. Fabricii Bibl. Graeca T. V. p. 635. 636. (Ed. Harles.).

Digitized by

Kap. 6. Einleitung: „Zunächst muß man anerkennen, daß jeder Buchstabe, mit dem wir eine Zahl bezeichnen, z. B. ι für zehn, κ für zwanzig, λ für dreißig, durch menschliche Einrichtung und Übereinkunft, nicht von Natur ein Zeichen dieser Zahl ist; die natürliche und ungekünstelte und eben deswegen einfachste Bezeichnung der Zahlen würde die Nebeneinanderstellung der in jeder enthaltenen Einheiten sein. So würde die Bezeichnung einer Einheit durch ein α das Zeichen für eins, die Hinstellung zweier Monaden, das ist zweier Alpha, neben einander, das Zeichen für zwei sein, und so fort [43]). Denn nur durch eine solche Schrift und Bezeichnung könnte die Darstellung der sogenannten ebenen und körperlichen Zahlen erläutert und deutlich gemacht werden. Demnach wird die Einheit in das Verhältniß und in die Stelle des Puncts eintreten, indem sie der Anfang der Dimensionen und Zahlen, aber weder Dimension noch Zahl selbst ist, gleichwie der Punct der Anfang der Linie und Entfernung, nicht aber Linie und Entfernung."

Es folgen nun noch einige Analogien und Vergleichungen zwischen Arithmetik und Geometrie, und darauf fährt der Verfasser im

Kap. 7. also fort: „Jede Zahl von 2 ab kann als lineäre Zahl (ἀριθμὸς γραμμικός) betrachtet werden; die erste ebene Zahl (ἐπίπεδος) dagegen ist die drei und darauf alle folgenden.

Kap. 8. Eine dreieckige Zahl (τρίγωνος) ist eine solche, welche in Einheiten aufgelöst sich in der Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks darstellen läßt. Die Einheit ist eine dreieckige Zahl δυνάμει, nicht aber ἐνεργείᾳ, das heißt, ihrem Wesen nach, insofern die allgemeinen Regeln auch auf sie anwendbar sind, nicht aber in der Wirklichkeit, weil sie sich nicht als Dreieck darstellen läßt. Diesen Unterschied macht Nikomachus bei allen folgenden Polygonalzahlen.

Die dreieckigen Zahlen entstehen durch die successive Summirung der natürlichen Zahlenreihe (Γεννᾶται δὲ ἀπὸ τοῦ φυσικοῦ

---

43) Nikomachus sagt nicht, daß die Griechen sich jemals dieser Methode wirklich bedient haben. Das thut aber Jamblichus p. 80: Ἴστέον γὰρ ὅτι (fehlt bei T.), ὡς τὸ παλαιὸν φυσικώτερον, οἱ πρόσθεν ἐσημαίνοντο τὰς τοῦ ἀριθμοῦ ποσότητας ἀναλύοντες εἰς μονάδας, ἀλλ' οὐχ, ὥσπερ οἱ νῦν, συμβολικῶς. Beruht diese Nachricht auf bloßer Conjectur, oder auf Mißverständniß der Stelle bei Nikomachus, oder auf Kenntniß von Thatsachen? Das Letzte ist bei einem so spät lebenden Autor, wie Jamblichus, kaum denkbar.

Digitized by Google

ἀριθμοῦ στοιχηδὸν ἐκτεθέντος, καὶ ἀεὶ ἀπ' ἀρχῆς τῶν συνεχῶν κατὰ ἕνα συντιθεμένων). Die Seite des Dreiecks ist gleich der Anzahl der addirten Zahlen.

Kap. 9. Hierauf folgt zunächst die viereckige (Quadrat-) Zahl (τετράγωνος), die sich in Gestalt eines Quadrats darstellen läßt. Auch diese Zahlen entstehen durch Addition, aber nicht der natürlichen um 1 fortschreitenden, wie die dreieckigen, sondern der eine um die andere gesetzten, das heißt der ungeraden Zahlen (Γεννᾶται δὲ καὶ οὗτος ἀπὸ τοῦ στοιχηδὸν ἐκτεθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ, τῇ μονάδι ἐπισωρευθέντων οὐκέτι τῶν ἐφεξῆς τοῖς ἐφεξῆς, ὡς δέδεικται ἐπὶ τῶν τριγώνων, ἀλλὰ τῶν παρ' ἕνα κειμένων πάντων, τουτέστι, τῶν περισσῶν).

Kap. 10. Die fünfeckige Zahl (πενταγωνος). Sie entsteht durch Addition der von 1 anfangenden und dann immer zwei überspringenden Zahlenreihe (ἐπισωρεύονται ἀλλήλοις εἰς πενταγώνου γένεσιν οἱ ἀπὸ μονάδος δύο διαλείποντες ἐφ' ὁσονοῦν, τουτέστιν, οἱ τριάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντες).

Kap. 11. Die sechseckigen, siebeneckigen und folgenden Zahlen gehen auf ähnliche Weise hervor aus der Reihe der natürlichen Zahlen, indem man zu dem Abstande derselben immer 1 hinzufügt. — Die arithmetische Reihe, deren Summenglieder irgend eine Klasse der Polygonalzahlen hergeben, heißt die Reihe der γνώμονες dieser Polygone, ein Ausdruck, der, wie diese ganze Theorie, bildlich von der Geometrie hergenommen ist, indem Nikomachus und ebenso alle folgenden Arithmetiker die Euklidische Definition (II, 2) vermöge einer einfach sich darbietenden Analogie von dem Parallelogramm auf alle geradlinigen Figuren ausdehnen [44]). Demnach giebt unser Autor folgende allgemeine Regel zur Bildung der Polygonal-

---

44) Nikomachus braucht das Wort γνώμων, γνώμονες in dem angedeuteten Sinne, ohne es zu definiren. Jamblichus p. 82. erklärt es so: εἴρηται δὲ γνώμων, ὁ αὐξητικὸς ἑκάστου εἴδους τῶν πολυγώνων, κατὰ προσθεσιν τὸ αὐτὸ εἶδος διαφυλάττων. — Theon von Smyrna Kap. 23: πάντες δὲ οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἀπογεννῶντες τριγώνους ἢ τετραγώνους ἢ πολυγώνους γνώμονες καλοῦνται. Undeutlicher ist Asklepius (bei Bullialdus ad Theonem Smyrn. p. 239): γνώμονας καλοῦμεν τοὺς μετροῦντας ἀριθμούς, ἀμέλει ἕως τῆς νῦν πᾶν τὸ μετροῦν γνώμονα προσαγορεύομεν.

Digitized by Google

zahlen jeder Ordnung: ἑκάστου πολυγώνου τοὺς γνώμονας διαφέρειν ἀλλήλων δυάδι ἐλαττόνως ἢ κατὰ τὴν ἐν τῷ ὀνόματι ποσότητα τῶν γωνιῶν, „die Gnomones eines jeden Polygons stehen von einander um 2 weniger ab, als die Anzahl der im Namen ausgedrückten Winkel beträgt," d. h. die constante Differenz der Gnomonreihe der $n$eckigen Zahlen beträgt $n - 2$. Merkwürdig ist, daß Diophant [45]) diesen Satz dem Hypsikles zuschreibt, da doch Hypsikles nach der seit Fabricius allgemein angenommenen Meinung (worüber im folgenden Kapitel ein Mehreres) erst gegen das Ende des zweiten Jahrhunderts gelebt hat. Indeß ist diese scheinbar von der Wahrheit abweichende Angabe daraus zu erklären, daß Diophant den Satz des Nikomachus etwas erweitert ausspricht, und daß vielleicht diese Erweiterung desselben von Hypsikles herrührt.

Kap. 12. Nach diesen allgemeinen Regeln, die Bildung der Polygonalzahlen betreffend, folgen nun einige besondere Eigenthümlichkeiten derselben. Wie jede viereckige Figur durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird, so läßt sich jede viereckige Zahl in zwei, aber auf einander folgende dreieckige auflösen, und umgekehrt, je zwei auf einander folgende dreieckige Zahlen geben zur Summe eine Quadratzahl, z. B. $1 + 3 = 4$, $3 + 6 = 9$, $6 + 10 = 16$ u. s. w.

Aus einer viereckigen Figur wird, wenn man ihr eine dreieckige ansetzt, eine fünfeckige; ebenso in Zahlen, nur mit der Beschränkung, daß die Seite der dreieckigen Zahl um 1 kleiner sein muß, als die Seite der viereckigen, zu der sie addirt wird, z. B. $4 + 1 = 5$, $9 + 3 = 12$, $16 + 6 = 22$ u. s. w.

Ebenso werden sechseckige Zahlen als Summen einer fünfeckigen und einer dreieckigen Zahl dargestellt, und so fort. Der Übersicht wegen schreibe man sich die Polygonalzahlen jeder Ordnung in Parallelreihen unter einander,

---

45) De Numeris Polyg. prop. 8. pag. 18. Ed. Bachet. — S. 329. der Schulzschen Übersetzung.

Digitized by Google

dreieckige	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
viereckige	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
fünfeckige	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
sechseckige	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
siebeneckige	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

u. s. w., so finden hier folgende Beziehungen Statt:

1) Jedes Polygon ist gleich der Summe des zunächst über ihm stehenden und des Dreiecks der um 1 kleineren Seite, z. B. das Siebeneck 148 ist gleich dem Sechseck 120 plus dem Dreieck 28. (*Ἵνα ἕκαστος πολύγωνος σύστημα ᾖ τοῦ τε ὑπὲρ αὐτὸν ὁμοταγοῦς πολυγώνου καὶ τοῦ ἀνωτάτου τριγώνου τοῦ μονάδι ἐλάττονος ὁμοταγοῦς*).
2) Die Verticalreihen sind arithmetische Progressionen, deren constante Differenz das vorhergehende Dreieck ist.

Kap. 13. „Hierauf nun ist leicht einzusehen, was eine körperliche Zahl (*στερεὸς ἀριθμός*) ist und wie eine solche gleichseitig wird." Nach einer kleinen Digression über Dimensionen und über die Natur der Pyramide, als des einfachsten unter den Körpern, fährt er so fort: „Wie nun die Polygonalzahlen durch Summation der einfachen arithmetischen Reihen entstanden, auf dieselbe Weise entstehen, wenn man die ebenen Polygonalzahlen zu einander addirt und sie gleichsam über einander schichtet, die einer jeden Klasse gleichnamigen Pyramiden, die mit dreieckiger Basis von den dreieckigen Zahlen, die mit viereckiger Basis von den viereckigen u. s. w. Es ist natürlich, daß man die größere Zahl sich zu unterst denkt; denn sie stellt die Basis vor; die zunächst kleinere über ihr und so fort, bis die Einheit auf der Spitze erscheint und gleichsam in einem Punct die Vollendung der Pyramide abschwänzt. (*Ἕως ἂν ἡ μονὰς ἐπὶ τῇ κορυφῇ φανῇ καὶ ὡσανεὶ εἰς σημεῖον ἀπομειουρίσῃ τὴν τελείωσιν τῆς πυραμίδος*)."

Kap. 14. Wenn man den Bau einer arithmetischen Pyramide von unten, das heißt, von dem größten Polygon beginnt, aber nicht bis zur Einheit fortsetzt, sondern eher abbricht, so entsteht eine abgestumpfte Pyramide, welche Nikomachus, wenn bloß die Einheit fehlt, κόλουρος, wenn die Einheit und die nächstfolgende Polygonalzahl fehlt, δικόλουρος, ähnlich τρικόλουρος u. s. w. nennt.

Kap. 15. Es giebt noch andere Körperzahlen als Pyramiden,

Digitized by Google

nämlich Kubi, balkenförmige (δοκίδες), ziegelförmige (πλινθίδες), keilförmige (σφηνίσκοι), kugelförmige (σφαιρικοί), Parallelepipeda. Die Quadratzahlen haben in der Ebene zwei gleiche Dimensionen; giebt man ihnen noch eine dritte den vorigen gleiche Dimension, das heißt, multiplicirt man jede der Quadratzahlen noch einmal in ihre Seite, so erhält man die Kubikzahlen.

Kap. 16. Dem Kubus, als aus drei gleichen Dimensionen gebildet, stehen entgegen die aus drei ungleichen Dimensionen gebildeten Zahlen, wie 2 mal 3 mal 4. Solche Körper nennt man einfach schiefe (σκαληνά); Einige nennen sie Keile (σφηνίσκους), Andere Pfähle (σφηκίσκους), noch Andere Stufen- oder Altarzahlen (βωμίσκους [46])). In der Mitte zwischen beiden Extremen stehen die Zahlen, welche Parallelepipeda genannt werden, deren entsprechende ebene Zahlen die ἑτερομήκεις (s. das folg. Kap.) sind, gleichwie die den Kubikzahlen entsprechenden die Quadratzahlen.

Kap. 17. Eine Zahl wird ἑτερομήκης (in den lateinischen Übersetzungen altera parte longior) genannt, wenn ihre Länge und ihre Breite um die Einheit verschieden sind, (οὐδὲ τὸ μῆκος τῷ πλάτει ἴσον, ἀλλὰ παρὰ μονάδα), das heißt, die Heteromekes sind die Producte aus je zwei auf einander folgenden Zahlen, $n(n+1)$ [47]).

---

46) Ἕτεροι δὲ τοὺς αὐτοὺς βωμίσκους προσαγορεύουσιν ἀπὸ οἰκείας εἰκόνος· οἱ γὰρ παλαιότροποι βωμοὶ, μάλιστα δὲ οἱ ἰωνικοὶ, οὔτε τὸ πλάτος τῷ βάθει οὔτε συναμφότερα τῷ μήκει ἴσα ἔχουσιν οὔτε τὴν βάσιν τῇ κορυφῇ, ἀλλὰ πάντη εἰσὶν ἐξηλλαγμένοι ταῖς διαστάσεσιν.

47) *Theon Smyrn.* cap. 13. p. 40. (Ed. Bullialdi): ἑτερομήκεις δὲ οἱ τοιοῦτοι κέκληνται, ἐπεὶ πρώτην ἑτερότητα τῶν πλευρῶν ἡ προσθήκη τῇ ἑτέρᾳ πλευρᾷ τῆς μονάδος ποιεῖ. — Jamblichus nimmt hier wieder Gelegenheit zu einem Ausfall gegen Euklides, welcher seiner Meinung nach diese Unterschiede nicht scharf genug auffaßt; es heißt bei ihm p. 105. 106. so: Ὡς οὖν ἀπὸ πάντων τῶν τέσσαρας πλευράς τε καὶ γωνίας ἐχόντων σχημάτων συστείλαντες τὸ ὄνομα τετράγωνον ἐκαλέσαμεν, τὸν πάσας πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχοντα, οὕτω καὶ ἑτερομήκη καλέσομεν ἀπὸ πάντων τῶν τῆς ἑτερότητος εἰδῶν κατὰ τὰς πλευρὰς τὸν ἐγγυτάτω τῆς ἑτερότητος τὴν παρατροπὴν ἐμφήναντα, τουτέστι, τὸν παρὰ μονάδα τὸ ἕτερον ἐν τοῖς μήκεσιν ἐσχηκότα, ἀντιδιεστραμμένως λεγόμενον τῷ αὐτομήκει. Ὅπερ πάλιν οὐ συνιδὼν ὁ Εὐκλείδης συνέχει καὶ τοῦτο τὴν τῆς θεωρίας ἐξαλλαγὴν καὶ ποικιλίαν, οἰηθεὶς ἑτερομήκη εἶναι τὸν ἁπλῶς ὑπὸ διαφόρων δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιασθέντων γινόμενον, καὶ μὴ διακρινόμενος αὐτοῦ προμήκη, ὅπερ εἰ συγχωρήσειέ τις αὐτῷ, συμ-

Wenn aber die Seiten um mehr als eins von einander verschieden sind, so wird eine solche Zahl nicht eigentlich mehr ἑτερομήκης, sondern προμήκης (numerus oblongus) genannt. Nach dieser eingeschobenen Definition des oben gebrauchten Ausdrucks fährt der Verfasser in der nähern Bestimmung der verschiedenen Körperzahlen fort, welche er in sehr deutlichen und kurzen Definitionen folgendermaßen angiebt: Die drei Dimensionen einer Körperzahl sind entweder

1) alle drei gleich, dann sind die Zahlen ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις; diese Klasse begreift die Kubikzahlen, die auch schon Euklides (VII. def. 19.) ebenso definirt, und dem analog die Quadratzahlen ἰσάκις ἴσοι.
2) alle drei ungleich, ἀνισάκις ἄνισοι ἀνισάκις; hieher gehören die oben erwähnten σφηνίσκοι.
3) zwei einander gleich, und die dritte
   a) kleiner, $m^2 (m - n)$, ἰσάκις ἴσοι ἐλαττονάκις; hieher gehören die ziegelförmigen Zahlen, πλινθίδες.
   b) größer, $m^2 (m + n)$, ἰσάκις ἴσοι μειζονάκις; diese Klasse wird gebildet von den balkenförmigen Zahlen (δοκίδες), nach Jamblichus (p. 134) auch στηλίδες, Pfeiler, genannt.

Die Zahlen, deren letzte Ziffern 1, 5, 6 sind, haben die Eigenschaft, daß alle ihre Potenzen immer mit eben diesen Ziffern endigen, daher heißen sie bildlich kreisförmige, oder auch kugelförmige Zahlen. Oder um die Vorstellung räumlicher Dimensionen beizubehalten, nennt man auch die Quadrate solcher Zahlen kreisförmige, die Kubi derselben kugelförmige Zahlen. Indeß beruhen diese Benennungen auf einem ganz andern Princip, als die der bisher behandelten figurirten Zahlen. Bei den Kreis- und Kugelzahlen ist von bildlicher Darstellung und Anordnung der Einheiten nicht mehr die Rede.

Kap. 18 — 20. Vergleichung der ἑτερομήκεις, der προμήκεις und der Quadratzahlen, welche jenen analog ἰδιομήκεις oder

---

βήσεται τὰ ἐναντία ἀσυνύπαρκτα φύσει ὄντα, ἅμα καὶ περὶ τὸ αὐτὸ εὑρίσκεσθαι. Τὸν αὐτὸν γὰρ ἀριθμὸν τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ ἑτερομήκη ἀποφαίνει ὁ ἐκείνου λόγος, οἷον τὸν $\overline{\lambda\varsigma}$ καὶ τὸν $\overline{\iota\varsigma}$ καὶ ἑτέρους πολλούς· ὅπερ ἴσον ἂν εἴη τῷ τὸν περισσὸν ἀριθμὸν ταὐτὸν εἶναι τῷ ἀρτίῳ.

Digitized by Google

ταυτομήκεις genannt werden könnten, unter einander. Besonders freut Nikomachus sich im Kap. 19. viele Analogien und Beziehungen zwischen den Heteromekes und den Quadratzahlen entdeckt zu haben. Man schreibe, sagt er, in zwei Parallelreihen unter einander die Quadratzahlen und die Heteromekes,

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100
2 6 12 20 30 42 56 72 90 110

so finden zwischen beiden folgende Beziehungen Statt:

1) Die Zahlen der zweiten Zeile sind von der zweiten an der Reihe nach die verschiedenen ἐπιμόριοι der über ihnen stehenden Zahlen der ersten Zeile; 6 : 4 ἡμιόλιος, 12 : 9 ἐπίτριτος, 20 : 16 ἐπιτέταρτος u. s. w. Die Sache ist daher klar, weil immer unter dem Gliede n^2 der ersten Zeile $n(n+1)$ in der zweiten steht; also $n(n+1) : n^2 = n+1 \div n$.
2) Die Differenzen der correspondirenden Zahlen beider Zeilen bilden der Reihe nach die natürlichen Zahlen, $2-1=1$, $6-4=2$, $12-9=3$, $20-16=4$; im Allgemeinen $n(n+1)-n^2=n$.
3) Vergleicht man dagegen jedes Glied der ersten Reihe mit dem vorhergehenden Gliede der zweiten Reihe, so sind die Verhältnisse dieselben wie unter No. 1, nämlich 4 : 2 ist ein Vielfaches, wie 2 : 1, 9 : [illegible] ein ἡμιόλιος, wie 6 : 4, 16 : 12 ein ἐπίτριτος u. s. w. Daraus folgt, daß jedes Glied der zweiten Reihe die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem darüber stehenden, und dem folgenden Gliede der ersten Reihe ist, $n^2 : n(n+1) = n(n+1) : (n+1)^2$ [48]).
4) Zwischen je zwei Quadratzahlen liegt allemal ein, aber auch nur ein Heteromekes.
5) Die Differenzen der Quadrate geben die Reihe der ungeraden, die der Heteromekes die Reihe der geraden Zahlen.
6) Die Summe zweier auf einander folgenden Glieder der ersten Reihe nebst dem Doppelten des unter dem ersten derselben liegenden Gliedes der zweiten Reihe ist allemal eine Quadratzahl. Desgleichen ist die Summe zweier an einander liegenden Glie-

48) Über die an dieser Stelle befindlichen Worte τὸ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπὸ s. die Note 40 dieses Kapitels.

Digitized by Google

Glieder der zweiten Reihe nebst dem Doppelten des über dem zweiten derselben liegenden Gliedes der ersten Reihe eine Quadratzahl. Zwei solche Gliederpaare, in allgemeinen Zeichen ausgedrückt, sind
in der Reihe der Quadrate n^2 $(n+1)^2$
in der Reihe der Heteromekes $n(n+1)$ $(n+1)(n+2)$,
demnach ist $n^2 + (n+1)^2 + 2n(n+1) = (2n+1)^2$,
dagegen $n(n+1) + (n+1)(n+2) + 2(n+1)^2$
$= (n+1)[n + (n+2) + 2(n+1)]$
$= 4(n+1)^2$.

7) Die successive Addition von je zwei Gliedern beider Reihen, wenn man von dem ersten Gliede der ersten Reihe zum ersten Gliede der zweiten Reihe, von diesem zum zweiten der ersten Reihe, von da wieder zum zweiten der zweiten Reihe u. s. w. fortgeht, giebt nach der Reihe sämmtliche dreieckige Zahlen; z. B. $1 + 2 = 3$, $2 + 4 = 6$, $4 + 6 = 10$, $6 + 9 = 15$, $9 + 12 = 21$ u. s. w. Es müssen demnach, nach den unter 6) aufgestellten Ausdrücken $n^2 + n(n+1)$, $n(n+1) + (n+1)^2$ und $(n+1)^2 + (n+1)(n+2)$ drei auf einander folgende dreieckige Zahlen sein, was sich sogleich als wahr erweist, wenn wir die Formeln so umwandeln

$$n^2 + n(n+1) = \frac{2n(2n+1)}{2}$$

$$n(n+1) + (n+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}$$

$$(n+1)^2 + (n+1)(n+2) = \frac{(2n+2)(2n+3)}{2}.$$

8) Jede Quadratzahl sowohl plus als minus ihrer Wurzel wird ein Heteromekes $n^2 \pm n = n(n \pm 1)$. [Umgekehrt ist auch jedes Heteromekes sowohl die Summe als die Differenz eines Quadrats und seiner Wurzel; denn $n(n+1) = n^2 + n = (n+1)^2 - (n+1)$].

Den Beschluß dieses Abschnitts macht folgende Betrachtung: „Die ταυτότης hat ihren Ursprung in dem Ungeraden, die ἑτερότης in dem Geraden; die Quadrate entstehen aus den ungeraden Zahlen (durch Addition), die Heteromekes aus den geraden; in jeder von der Einheit anfangenden geometrischen Progression sind die Glieder an den ungeraden Stellen Quadrate (ταυτομήκεις), aber kein Glied an

Digitized by Google

einer geraden Stelle (wenn nicht schon das erste selbst ein Quadrat ist). Selbst die ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις, das ist die Kubikzahlen, die drei Dimensionen und dadurch noch mehr Antheil an der ταυτότης haben als die Quadratzahlen, sind ein Erzeugniß der ungeraden Zahlen, nicht der geraden. Denn schreibt man sich von der Einheit an alle ungeraden Zahlen nach der Reihe hin, so ist die erste ein Kubus δυνάμει (s. oben), die beiden folgenden zusammen bilden den zweiten Kubus, die drei nächstfolgenden den dritten, die folgenden vier den vierten und so fort."

Dieser hübsche Satz scheint Nikomachus eigenthümlich anzugehören. Um die allgemeine Formel zu entwickeln, setzen wir n^3 gleich der Summe von n ungeraden Zahlen; die erste sei $2x + 1$, so ist die $n$te $2x + 2n - 1$, also die Summe derselben $n^3 = (2x + n)\, n$, $x = \frac{n^2 - n}{2}$; demnach hat man, um n^3 zu produciren, die ungeraden Zahlen von $n^2 - n + 1$ bis $n^2 + n - 1$ zu addiren, deren arithmetisches Mittel n^2 ist.

Hier wäre nun nach den Begriffen der Späteren die Arithmetik des Nikomachus abgeschlossen; er zieht aber noch in ihren Bereich eine Theorie, welche, obgleich ihrer Natur nach ganz zur Arithmetik gehörig, von den Späteren, selbst schon von Theon von Smyrna, gewöhnlich in der Theorie der Musik abgehandelt wird, wo sie freilich eine vielfältige Anwendung findet. Es ist dieses die Lehre von den Analogien und Medietäten (μεσότητες), oder, was dasselbe sagen will, die Lehre von den verschiedenen Proportionen [49]). Sie

---

49) Es ist bei den Neuern Sitte, die Worte ἀναλογία und μεσότης so zu unterscheiden, daß ἀναλογία die Proportion im Allgemeinen, μεσότης dagegen die stetige Proportion bedeute. Ich muß gestehen, daß ich diesen den Worten untergelegten Sinn bei den Alten nicht habe bestätigt gefunden. Nikomachus definirt II. 21. die ἀναλογία, aber nicht die μεσότης. Theon von Smyrna giebt Mus. cap. 32. (p. 132. 133. Bull.) mit gewohnter Geschwätzigkeit den Unterschied an, aber man ersieht aus seinen Worten weiter nichts, als daß der eben erwähnte Sinn in beiden Terminis nicht liegt: Διαφέρει δὲ, heißt es, ἀναλογίας μεσότης ἐπειδὴ εἰ μέν τι ἀναλογία, τοῦτο καὶ μεσότης· εἰ δέ τι μεσότης, οὐκ εὐθὺς ἀναλογία· ἐγχωρεῖ γάρ τι κατὰ τάξιν μέσον ὂν μὴ ἔχειν ἀναλόγως πρὸς τὰ ἄκρα, ὡς τὰ δύο μέσα ἐστὶ τῇ τάξει τῶν τριῶν καὶ τοῦ ἑνὸς καὶ τῶν ι· τὰ γ καὶ τὰ δ καὶ τὰ ε· (diese Stelle ist offenbar corrumpirt) ἀπὸ γὰρ τοῦ ἑνὸς οὐχ οἷόν τε ἐλθεῖν ἐπὶ τὰ ι,

bildet den Inhalt der Kapitel 21. bis 29. und den Schlußstein der Arithmetik des Nikomachus, und zwar nicht ohne Absicht, wie er selbst sagt, nämlich

Kap. 21. „Hierauf dürfte es am rechten Orte sein, mit der Lehre von den Proportionen (ἀναλογίαι), die sehr nothwendig ist für die Naturkunde und für die Lehren der Musik, der sphärischen Trigonometrie und der Planimetrie, am meisten aber zu dem Verständniß der Alten (ἀναγκαιότατον ὄντα εἰς τὰς φυσιολογίας καὶ εἰς τὰ μουσικά τε καὶ σφαιρικὰ καὶ γραμμικὰ θεωρήματα, οὐχ ἥκιστα δὲ καὶ εἰς τὰς τῶν παλαιῶν συναναγνώσεις), die arithmetische Einleitung auf eine passende und die angemessenste Weise zu beschließen."

Hier nur wenige Worte über diesen Gegenstand.

μὴ πρότερον ἐλθόντα ἐπὶ τὰ $\overline{\beta}$ καὶ τὰ $\overline{\gamma}$ καὶ τὰ $\overline{\delta}$· ἀλλ' οὐδὲν τούτων ἀναλόγως ἔχει πρὸς τὰ ἄκρα· τὸ γὰρ ἓν οὐκ ἐν τούτῳ ἐστὶ τῷ λόγῳ πρὸς τὰ δύο, ἐν ᾧ τὰ δύο πρὸς τὰ $\overline{\gamma}$· ὁμοίως καὶ $\overline{\delta}$ (καὶ) ἐπὶ τῶν δύο καὶ τῶν τριῶν· τὰ δὲ ἐν αὐτῷ τῷ λόγῳ ὄντα, καὶ μέσα ἂν εἴη· οἷον ἓν, $\overline{\beta}$, $\overline{\delta}$· ἀναλογία τε γάρ ἐστιν ἡ τοῦ διπλασίου, καὶ τὰ $\overline{\beta}$ μετὰ τοῦ ἑνὸς καὶ τῶν τεσσάρων. Es scheint, als wenn Theon den Ausdruck μεσότης ganz allgemein von dem Dazwischenliegen gebraucht wissen will. — Pappus III, 5. (p. 12) sagt ganz kurz: Differt autem medietas (μεσότης) ab analogia, nam si quid est analogia, hoc et medietas est; sed non contra. Medietates enim tres sunt, arithmetica, geometrica et harmonica. etc. Demnach ist μεσότης der allgemeinere, ἀναλογία der speciellere Begriff, wie es auch aus den ersten Worten Theon's einleuchtet; und aus dem Zusatz des Pappus: medietates enim tres sunt, kommt man in Versuchung des Gegensatzes halber zu ergänzen: aber es giebt nur eine Analogie. Und das scheint wirklich das Richtige zu sein. Denn hören wir, was Jamblichus (ed. Tennul. p. 141) sagt: Προληπτέον δὲ, ὅτι κυρίως ἀναλογίαν ἐκάλουν οἱ παλαιοὶ τὴν γεωμετρικὴν, κοινότερον δὲ ἤδη καὶ τὰς λοιπὰς πάσας μὴν γενικῶς μεσότητας. Also Analogie heißt eigentlich nur die geometrische Proportion, alle insgesammt aber, auch die geometrische nicht ausgeschlossen, heißen Medietäten. Jedoch scheint der Sprachgebrauch darin nicht ganz fest gewesen zu sein; Nikomachus beginnt sein Kap. 22. mit den Worten: Εἰσὶν οὖν ἀναλογίαι αἱ μὲν πρῶται καὶ πᾶσι τοῖς παλαιοῖς ὁμολογούμεναι . . . . τρεῖς πρώτισται ἀριθμητικὴ, γεωμετρικὴ, ἁρμονικὴ etc., wo also ἀναλογίαι auch in dem allgemeinen Sinne gebraucht wird; und noch in demselben Kapitel braucht er ganz in demselben Sinne von allen dreien den Ausdruck μεσότητες. Aber von Kap. 23. bis zum Ende kommt fast ausschließlich der Name μεσότης vor, und im Kap. 24. heißt es: γεωμετρικὴ μεσότης, κυρίως ἀναλογία μόνη καλουμένη διὰ τὸ ἀνὰ

Digitized by Google

„Ein Verhältniß ist das gegenseitige Befinden (die gegenseitige Beziehung) zweier Ausdrücke zu einander, die Zusammensetzung derselben ist die Proportion (Λόγος μὲν οὖν ἐστὶ δύο ὅρων ἡ πρὸς ἀλλήλους σχέσις, σύνθεσις δὲ τῶν τοιούτων ἡ ἀναλογία)." Beide Definitionen sind nicht so genau wie diejenige, welche Euklides am Anfange seines fünften Buches giebt: Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Ἀναλογία δ' ἐστὶν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. Auch Jamblichus fügt den von Nikomachus vernachlässigten, aber nothwendigen Begriff der homogenen Größen hinzu (p. 138), und ebenso substituirt er für die bloße Zusammenstellung (σύνθεσις) bei Nikomachus den richtigeren Begriff der Gleichstellung: ἡ τοίνυν ἀναλογία λόγων ἐστὶ πλειόνων ὁμοιότης καὶ ταυτότης. —

τὸν αὐτὸν λόγον θεωρεῖσθαι πρὸς ἀλλήλους τοὺς ἐν αὐτῇ ὅρους. Und fast wörtlich ebenso Jamblichus p. 147: Ἡ δὲ δευτέρα μεσότης ἡ γεωμετρικὴ μόνως ἀναλογία κέκληται, διότι λόγον τὸν αὐτὸν οἱ ὅμοιοι περιέχουσιν, ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον διεστῶτες. Und so ist auch bei Euklides ἀναλογία immer nur von der geometrischen Proportion gebraucht. Aus allen diesen angeführten Stellen geht nun wohl unzweifelhaft folgendes Resultat hervor: Ursprünglich hieß die geometrische Proportion ἀναλογία, die übrigen, die arithmetische, die harmonische u. s. w. μεσότητες; aber der spätere Sprachgebrauch hat diesen Unterschied beider Termini verwischt. Die am Anfang erwähnte unrichtige Angabe des Unterschiedes beider Termini mag aus dem etymologischen Sinne des Wortes μεσότης, welches allerdings zunächst die Mitte bedeutet, und aus einem zu strieten Anklammern an solche Stellen hervorgegangen sein, wie etwa Jambl. p. 147, wo es heißt, Platon habe das Mittelglied der continuirlichen arithmetischen Proportion μεσότης genannt: Ταύτην δ' εἶπεν ὁ Πλάτων μεσότητα, ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερεχομένην, ἴσῳ δὲ ὑπερέχουσαν. Aus Boethius, der allerdings lange einzige Quelle für das mathematische Studium gewesen ist, können diese falschen Begriffe nicht hergeleitet sein, wie aus zwei Stellen erhellt, welche Tennulius p. 198. anführt; die erste II, 43. lautet so: Si igitur in tribus terminis consideratio sit, ***continua proportionalitas*** (d. i. ἀναλογία) dicitur. Sin vero hic alius dux et alius comes, illic vero utrique sint alii, vocabitur ***disjuncta medietas***. Und II, 44. heißt es: Geometrica medietas expediatur, quae sola vel maxime proportionalitas appellari potest, etc. Beide Stellen sind fast wörtlich aus Nikomachus übersetzt. Sichere Belege aber dafür, daß μεσότης nicht ausschließlich die stetige Proportion bedeute, finden wir bei Nikomachus z. B. noch Kap. 21, worüber weiter unten im Text, und Kap. 29, wo die immer aus vier Gliedern bestehende vollkommenste Proportion dennoch, ebenso wie bei Jamblichus stets μεσότης heißt.

Digitized by Google

Ferner heißt es: Wenn derselbe Terminus immer unverändert auf beide Seiten gestellt wird, als Hinterglied (ὑπόλογος, bei Boethius comes) zu dem größern, als Vorderglied (πρόλογος, bei Boethius dux) zu dem kleinern, so heißt eine solche Proportion eine stetige (συνημμένη). Wenn aber das zu dem kleinern gestellte Hinterglied verschieden ist von dem zu dem größern gestellten Vordergliede, so heißt eine solche Medietät oder Analogie eine getrennte (οὐκέτι συνημμένη, ἀλλὰ διεζευγμένη λέγεται ἡ τοιαύτη μεσότης τε καὶ ἀναλογία) [50]). Hier spricht doch wohl der Gebrauch des Worts μεσότης in dieser Verbindung ganz deutlich gegen die gewöhnliche Definition, derzufolge es ausschließlich die stetige Proportion bezeichnen soll.

Kap. 22. Die ursprünglichen und allen Alten, Pythagoras, Platon und Aristoteles bekannten Analogien sind die drei ersten, die arithmetische, die geometrische, die harmonische, und die drei diesen entgegengesetzten, welche keine eigenen Namen haben, sondern gewöhnlich die vierte, fünfte und sechste Medietät genannt werden. (Nach Jamblichus p. 141. 142. rühren nur die drei ersten von Pythagoras her, die drei letzteren dagegen von Eudorus). Zu diesen haben die Neueren (nach Jamblichus p. 163. die Pythagoräer Temnonides und Euphranor) noch vier andere erfunden, um die Zahl zehn voll zu machen, weil diese den Pythagoräern für die vollkommenste gilt.

Kap. 23. Arithmetische Proportion, $a - b = c - d$, oder $a - b = b - c$.

Unter den Eigenschaften dieser Proportion führt Nikomachus auch folgende sehr schöne und von den Meisten übersehene (γλαφυρώτατον καὶ τοὺς πολλοὺς λεληθός) an, daß in der steti-

---

50) Theon Mus. c. 31. pag. 129. und Psellus p. 10. nennen die stetige Proportion ἀναλογία συνεχής, Theon dagegen die getrennte διηρημένη, Psellus διεχής. Euklides braucht von stetig proportionirten Zahlen immer den Ausdruck ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον. Jamblichus p. 140. macht den aber ganz gewiß im Sprachgebrauch nicht gegründeten Unterschied zwischen ἀνάλογον und ἀναλογία, daß ersteres von der getrennten, letzteres von der stetigen Proportion gebraucht werde . . . δοκεῖ τὸ ἀνάλογον τῆς ἀναλογίας διαφέρειν· τὸ μὲν γὰρ ἀνάλογον καὶ ἐν διεζευγμένοις ὅροις γίνεται· ἡ δὲ ἀναλογία κυρίως ἐπὶ τῶν τὸν κοινὸν ἐχόντων ὅρον τάττεται.

Digitized by Google

gen Proportion das Quadrat des Mittelgliedes, wenn man das Product der äußern Glieder davon abzieht, gleich wird dem Quadrat der constanten Differenz, d. h. $b^2 - ac = (a - b)^2 = (b - c)^2$.

Kap. 24. Geometrische Proportion, $a : b = c : d$ oder $a : b = b : c$.

Eigenthümlichkeiten der stetigen Proportion sind folgende:

1) Die Differenzen der Glieder verhalten sich wie die Glieder selbst. Dieser im Griechischen nicht ganz deutlich ausgedrückte Satz (Ἴδιον δὲ ἔχει ἡ γεωμετρικὴ μεσότης, ὃ μηδεμία τῶν λοιπῶν, τὸ τὰς τῶν ὅρων διαφορὰς πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ τῷ αὐτῷ εἶναι, ἐν ᾧ καὶ οἱ ὅροι πρὸς τοὺς συνεχεῖς, οἱ μείζονες πρὸς τοὺς ἐλάττονας, καὶ ἀνάπαλιν) soll so viel heißen: Wenn $a : b = b : c$, so verhält sich $a - b : b - c = a : b = b : c$. Der Satz läßt sich aber, ohne Rücksicht auf die Stetigkeit der Proportion, allgemeiner so ausdrücken: Wenn $a : b = c : d$, so verhält sich $a - b : c - d = a : c = b : d$.

2) Wenn der Exponent der stetigen Proportion n ist, so ist die Differenz der größern Glieder das $(n - 1)$fache des Mittelgliedes, und der Überschuß der Differenz der größern Glieder über die Differenz der kleinern das $(n - 1)$fache des kleinsten Gliedes.

3) Πλατωνικὸν θεώρημα. Zwischen zwei Quadratzahlen giebt es nur ein, zwischen zwei Kubikzahlen nur zwei geometrische Mittel. (Eukl. VIII, 11. 12.)

Kap. 25. Harmonische Proportion[51]), $a : c = a - b : b - c$.

Wenn die drei Größen a, b, c in dieser Reihenfolge von dem größern zum kleinern fortschreiten, so ist in der arithmetischen Proportion $a : b < b : c$, in der harmonischen $a : b > b : c$, in der Mitte zwischen beiden steht die geometrische, in welcher $a : b =$

---

51) Nach Jamblichus p. 141. hieß diese Proportion früher ἡ ὑπεναντία, die entgegengesetzte, und erhielt erst von Archytas und Hippasus ihren jetzigen Namen. (Μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητική τε καὶ γεωμετρικὴ, καὶ ἡ ποτε μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ τὸν Ἀρχύταν αὖθις καὶ Ἵππασον ἁρμονικὴ μετακληθεῖσα, ὅτι τοὺς

$b : c$ iſt. Außerdem wird als eine beſondere Eigenſchaft der harmoniſchen Proportion angeführt, daß $(a+c)\,b = 2ac$ iſt.

Kap. 26. Anwendung der harmoniſchen Proportion auf die Muſik. Es findet ſich hier die Bemerkung, daß an dem geometriſchen Kubus dieſe Medietät ſich zeigt; der Kubus hat zwölf Seiten, acht Ecken und ſechs Flächen, und die Zahlen 12, 8, 6 ſtehen in harmoniſcher Medietät.

Kap. 27. Zwiſchen zwei gegebenen Zahlen, die beide gerade oder beide ungerade ſind, laſſen ſich immer drei Mittelglieder finden, ſo daß jedes derſelben mit den beiden genannten eine der drei Proportionen bildet. Nikomachus ſetzt aber nicht die Bedingung hinzu, daß das Product der gegebenen Zahlen eine Quadratzahl ſein muß, damit das geometriſche Mittel rational werde; er giebt für beide Fälle, wenn die angenommenen Zahlen gerade und wenn ſie ungerade ſind, ein Beiſpiel:

	für gerade Zahlen			für ungerade Zahlen		
arithm.	40	25	10	45	25	5
geom.	40	20	10	45	15	5
harm.	40	16	10	45	9	5

Auch hat er nicht bemerkt, daß die drei Mittelglieder eine ſtetige geometriſche Proportion bilden, was ſogleich einleuchtet, wenn man dieſelben in allgemeinen Formeln darſtellt; dann wird für die äußern Glieder a, b das arithmetiſche Mittel $\frac{a+b}{2}$, das geometriſche $\sqrt{ab}$, das harmoniſche $\frac{2ab}{a+b}$.

Kap. 28. Die übrigen ſieben Analogien, deren Formeln ich hier nur kurz andeuten will:

die vierte $a : c = b - c : a - b$, z. B. 6, 5, 3
die fünfte $b : c = b - c : a - b$ = 5, 4, 2
die ſechſte $a : b = b - c : a - b$ = 6, 4, 1

κατὰ τὸ ἁρμοσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα. Ὑπεναντία δὲ πρότερον ἐκαλεῖτο, διότι ὑπεναντίον τι ἔπασχε τῇ ἀριθμητικῇ, ὡς δειχθήσεται. Ἀλλαγέντες δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα οἱ περὶ Εὔδοξον μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας, τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπεναντίαν ἐκάλεσαν, διὰ τὸ καὶ αὐτὴν ὑπεναντίον τι πάσχειν τῇ ἁρμονικῇ, ὡς δειχθήσεται.

Digitized by Google

die siebente $a : c = a - c : b - c$, z. B. 9, 8, 6
die achte $a : c = a - c : a - b$ = 9, 7, 6
die neunte $b : c = a - c : b - c$ = 7, 6, 4
die zehnte $b : c = a - c : a - b$ = 8, 5, 3

Kap. 29. „Es ist noch übrig auch die vollkommenste, drei Dimensionen begreifende, und alle übrigen umfassende Medietät kurz zu erklären, da sie sehr viele Anwendung in der Musik und Naturkunde findet."

Diese Medietät, welche Nikomachus die vollkommenste (τελειοτάτη), Jamblichus die musikalische (μουσική) nennt, ist nach der Erzählung des Letzteren von den Babyloniern erfunden und von Pythagoras zuerst nach Griechenland gebracht worden [52]).

Die Sache ist folgende: Wenn man zu zwei Terminis zwei mittlere sucht, so daß der eine von ihnen mit den beiden äußeren eine arithmetische, der andere mit denselben eine harmonische stetige Proportion bildet, so bilden alle vier Zahlen eine geometrische Proportion. Z. B. zwischen 12 und 6 ist das arithmetische Mittel 9, das harmonische 8, demnach bilden die vier Zahlen 12, 9, 8, 6 eine geometrische Proportion. Noch allgemeiner läßt der Satz sich so fassen, daß, wenn zwei der genannten Bedingungen stattfinden, allemal auch die dritte stattfindet. Seien die gegebenen äußern Glieder a und b, so ist ihr arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$, ihr harmonisches Mittel $\frac{2ab}{a+b}$, und es ist offenbar, daß die Zahlen

$$a, \quad \frac{a+b}{2}, \quad \frac{2ab}{a+b}, \quad b$$

eine geometrische Proportion bilden. Wenn man aber zwischen a und b zwei Zahlen x, y so sucht, daß a, x, y, b eine geometrische, a, x, b eine stetige arithmetische Proportion bilden, so wird $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{2ab}{a+b}$, folglich bilden dann a, y, b eine harmonische Proportion. Und eben so leuchtet der dritte Fall ein.

Ich beschließe diesen Gegenstand mit der Bemerkung, daß Pap-

---

52) Jambl. p. 168. Εὕρημα δ' αὐτήν φασιν εἶναι Βαβυλωνίων, καὶ διὰ Πυθαγόρου πρώτου εἰς Ἕλληνας ἐλθεῖν.

Digitized by

pus uns die in Euklidiſcher Manier wiſſenſchaftlich vorgetragene Lehre von den zehn Medietäten in ſeinem dritten Buche aufbehalten hat, wo ſie pag. 11 — 26 unter dem Generaltitel: In semicirculo tres medietates sumere als ſein zweites Problem erſcheint.

Der weſentlichſte Unterſchied nun zwiſchen dem Werke des Nikomachus und denen der alten Geometer beſteht darin, daß Nikomachus nicht, wie jene, aphoriſtiſch die einzelnen Sätze hinſtellt, ſondern ſeinen Gegenſtand in einem fließenden, fortlaufenden, zuweilen rhetoriſch ſchönen Vortrage abhandelt, und dabei meiſt analytiſch zu Werke geht, indem er ſeine Sätze zuerſt aus Induction herleitet und ſie dann allgemein ausſpricht. Dagegen vermißt man durchweg eigentliche Beweiſe; das darf uns aber nicht befremden, wenn wir bedenken, daß Nikomachus, wie er ſelbſt mehr als einmal ſagt, nicht die Abſicht hat, eine wiſſenſchaftliche Arithmetik vorzutragen; er will eine Einleitung in die Arithmetik geben [53]); er will dem Anfänger Geſchmack an Unterſuchungen über die Natur der Zahlen einflößen, darum giebt er in einem angenehmen Vortrage die intereſſanteſten Reſultate, welche dieſe Wiſſenſchaft bis dahin zu Tage gefördert hatte; er will den Unkundigen an arithmetiſche Vorſtellungen gewöhnen und ihn vorläufig mit einigen elementaren arithmetiſchen Wahr-

---

53) S. z. B. I, 17. 23. II, 6. 12. 29. Daß Nikomachus außer dieſer Einleitung noch ein ausführliches Lehrbuch der Arithmetik geſchrieben, ſchließt Fabricius wohl zu verwegen aus den Worten, deren ſich Boethius in der Einleitung zu ſeiner Arithmetik bedient. S. Bibl. Graeca T. IV. p. 4. 5. (Ed. Harles. T. V. p. 632.): Latine olim verterat *Apulejus*, cujus versio intercidit, et *Boethius*, quem laudat Cassiodorus lib. I. variar. epist. 45. Exstantque adhuc libri duo Arithmetices Boethii, quae pro liberiore versione Nicomachi haberi possunt, quem nominetenus laudat pag. 1323 et 1341, quamquam non hanc isagogen solum, sed et alterum majus Nicomachi opus Arithmeticum, quod temporum injuria amisimus, simul consuluisse et in compendium misisse videtur. *Ea*, inquit in praef., *quae de numeris a Nicomacho diffusius disputata sunt, moderata brevitate collegi, et quae transcursa velocius angustiorem intelligentiae praestabant aditum, mediocri adjectione reseravi, ut aliquando ad evidentiam rerum nostris etiam formulis ac descriptionibus uteremur.* Aus dieſen Worten folgt aber wohl weder, was Fabricius behauptet, die Exiſtenz eines ausführlicheren Werks von Nikomachus, noch auch die Verſchiedenheit der vorhandenen Arithmetik dieſes Kirchenvaters von ſeiner Bearbeitung des Werkes von Nikomachus, worauf Fabricius ebenfalls hinzudeuten ſcheint. — Daß Niko-

Digitized by

heiten bekannt machen, und zu diesem Zwecke ist es ihm hinreichend, an einem oder etlichen Zahlenbeispielen die Richtigkeit seiner Aussagen darzuthun, so daß der Mangel derselben in dieser Einleitung uns nicht zu dem Schlusse berechtigt, Nikomachus habe selbst keine gründliche wissenschaftliche Beweise gehabt; er hatte ja doch für eine große Anzahl seiner Lehren die Euklidischen Beweise und hätte, wenn Mittheilung derselben in seinem Plane gelegen hätte, ja doch diese gewiß geben können. Und macht es Diophant, wie wir später sehen werden, nicht ebenso? Wenn er am Schlusse seiner Auflösung, nachdem er irgend welche Zahlen gefunden, die der Aufgabe ein Genüge leisten, sagt: καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά, heißt das etwas Anderes, als: versuche, und du wirst finden, daß diese Zahlen das leisten, was verlangt wurde? Ebenso zeigt Nikomachus an Zahlenbeispielen, daß seine Sätze wahr sind.

Fragen wir endlich, welche Fortschritte die Arithmetik von Euklides bis auf Nikomachus gemacht hat, so dürften sich etwa folgende Resultate ergeben:

1) Bei Nikomachus erscheint die Arithmetik zum erstenmal frei von den Fesseln geometrischer Vorstellungen, mit denen sie bei Euklides noch behaftet ist. Nikomachus erläutert Zahlenlehren an Zahlen, nicht an Linien, ein Fortschritt, der bei der weitern Ausbildung

---

machus auch eine praktische Arithmetik, d. h. eine Rechenkunst, unter dem Titel τέχνη ἀριθμητική, wie Montucla I, 319, Reimer in Bossut's Geschichte d. Math. I, 43, Klügel math. Wörterb. I, 174 u. Andere behaupten, ist ein bloßes Mißverständniß. Denn erstens würde der Titel τέχνη ἀριθμητική das nicht bedeuten, was man hineinlegt, und zweitens beruht, wie es scheint, die Angabe bei Montucla, die Reimer und Klügel wahrscheinlich bloß nachgesprochen, wenn nicht vielmehr alle die genannten Auctoren aus Fabricius (s. unten) abgeschrieben haben, auf einer Stelle bei Jamblichus p. 3., wo er sagt: „Ich beabsichtige eine wissenschaftliche Arithmetik zu schreiben; da finde ich aber, daß Nikomachus alles dieses nach dem System des Pythagoras bereits in seiner τέχνη ἀριθμητικῇ abgehandelt hat. Weil nun dieses Buch so vorzüglich ist (dieser Gedanke ist etwas weit ausgeführt, dann heißt es am Ende der p. 4. weiter), so will ich, ohne etwas wegzunehmen oder hinzuzusetzen, die Nikomachische Arbeit selbst (αὐτὴν τὴν Νικομάχειον τέχνην) meiner Schrift zu Grunde legen." Demnach ist diese τέχνη nichts Anderes, als eben die εἰσαγωγὴ, die Jamblichus commentirt hat und die uns zu Händen ist. Danach ist auch die Angabe bei Fabricius (Ed. Harles. V, 638) zu berichtigen; denn die in den Theologumenis p. 33. 43 (bei Ast p. 32. 42) citirte Ἀριθμητική ist ganz sicher das dem Nikomachus zugeschriebene Werk Θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς.

Digitized by Google

der Arithmetik nicht ohne bedeutenden Einfluß geblieben ist, der vielmehr, wie die späteren Werke zeigen, der ganzen Griechischen Arithmetik eine andere Richtung gegeben hat.

2) Als neu ist bei Nikomachus hinzugekommen die ganze Theorie der Polygonalzahlen, selbst die allgemeine Regel ihrer Bildung, wonach sie als die Summenreihen arithmetischer Progressionen erscheinen.

3) Zum erstenmal schriftlich behandelt, wenn auch eingestandener Maaßen nicht von ihm herrührend, ist hier die Theorie der Medietäten, während Euklides nur die geometrische Proportion kennt.

4) Nikomachus giebt zuweilen strengere Definitionen und Unterschiede, die Euklides übersehen hat, z. B. die Eintheilung der geraden Zahlen in ἀρτιοπέρισσοι, περισσάρτιοι, und ἀρτιάκις ἄρτιοι I, 8. Die Eintheilung der Flächenzahlen in προμήκεις und ἑτερομήκεις II, 17, und die darauf gegründeten Sätze über die Beziehungen der letztgenannten zu den Quadratzahlen. Dagegen vernachlässigt Nikomachus die mathematische Präcision des Ausdrucks, wenn er Sachen anführt, die er aus Euklides als bekannt voraussetzt und annimmt. Vergl. II, 21 die Definitionen von λόγος und ἀναλογία.

5) Hin und wieder, und nicht eben selten giebt Nikomachus einzelne interessante, treffende Bemerkungen, in welcher Beziehung ich auf die oben gegebene Analyse verweise und die Kapitel 4. 12. 19. 20. 23. 24 des zweiten Buchs zu vergleichen bitte (z. B. die Zusammensetzung der Kubikzahlen durch die Summation einer Reihe ungerader Zahlen u. a.). Es ist indeß nicht zu leugnen, daß Nikomachus in dem Bestreben, Merkwürdigkeiten zu entdecken, nicht immer glücklich ist, und daß er manchmal als sehr wunderbar etwas hervorhebt, was sich ganz von selbst versteht.

Obgleich, wie ich oben erwähnt habe, zwischen Euklides und Nikomachus uns kein arithmetischer Schriftsteller bekannt ist, so rühren doch gewiß nicht alle Zuwüchse, welche die Arithmetik in diesem Zeitraume erfahren hat, von Nikomachus selbst her. Er selbst deutet zuweilen, aber freilich ohne Namen zu nennen, auf frühere Autoren hin, z. B. II, 14. ἵνα δὲ μὴ ἀνήκοοι ὦμεν κολούρων καὶ δικολούρων καὶ τρικολούρων, ὧν τοῖς ὀνόμασιν ἐντευξόμεθα ἐν τοῖς συγγράμμασι μάλιστα θεωρηματικοῖς etc. „Damit wir aber nicht die Koluren, Dikoluren und Trikoluren ungenannt lassen, deren Namen wir besonders in den theoretischen Schriften antreffen u. s. w.“ Ferner: Die Körperzahlen, welche er II, 16

Digitized by Google

σκαληνά nennt, nennen, sagt er, Einige σφηνίσκοι, Andere σφηκίσκοι, noch Andere βωμίσκοι. Ferner heißt es II, 22. „Zu den drei bekannten Proportionen und deren Umkehrungen haben die Neueren noch vier andere erfunden.“ — Da wir aber über diese Mittelglieder, wahrscheinlich außerhalb der Schule wenig bekannte Schriften der Pythagoräer, keine Nachrichten und noch weniger eigene Kenntniß von denselben haben, so läßt sich über den Antheil, den Nikomachus an dem Vorgetragenen selbst hat, mit Gewißheit nichts bestimmen, und es sei hinreichend, diese von ihm gegebenen Andeutungen hier bloß erwähnt zu haben. So viel steht fest, daß Nikomachus im Alterthum in sehr hohem Ansehen stand und als bedeutende Autorität galt, und daß seine Einleitung in die Arithmetik als die wichtigste und einzige Quelle dieser Wissenschaft betrachtet wurde. Ja sein Name war sogar sprichwörtlich geworden; ἀριθμέεις ὡς Νικόμαχος ὁ Γερασηνός, heißt es bei Lucian [54]), und Jamblichus braucht zwei volle Seiten, um die ausgezeichneten Eigenschaften seines Autors gebührend zu loben. Mehr aber als alle Citate beweisen das hohe Ansehen, welches dieser Mathematiker bei den Griechen, wie bei den Römern genossen hat, die vielen Commentare, Bearbeitungen und Übersetzungen, mit denen sein Werk von beiden Nationen beehrt worden ist, und welche ich, soweit sie mir bekannt geworden sind, hier der Reihe nach herzählen will.

Apulejus von Madaura hat in der zweiten Hälfte des zweiten Jahrhunderts das Werk ins Lateinische übersetzt, wovon aber bis jetzt noch keine Spur aufgefunden ist. S. Fabricius l. l. p. 630. 632. Tennulius ad Jambl. p. 66. Cassiodor. de Mathem. discipl. p. 555.

Ob Anatolius, Bischof von Laodicea, der um das Jahr 280 eine Arithmetik in zehn Büchern verfaßt haben soll, die Arithmetik des Nikomachus, oder nur in seinen Theologumenis das gleichnamige Werk dieses Auctors bearbeitet hat, habe ich nicht ausmachen können. In den edirten Theologumenis wird er öfters neben Nikomachus genannt. Vergl. auch Heilbronner Hist. math. p. 358.

Jamblichus, aus Chalcis in Cölesyrien, der berühmte Pythagoräer, hat im vierten Jahrhundert die Einleitung des Nikomachus bearbeitet; diese Bearbeitung bildet den vierten Theil seines umfang-

54) S. in Fabricii Bibl. graeca V, 635.

Digitized by

reichen Werkes über die Pythagoräiſche Philoſophie, und führt den Titel: Ἰαμβλίχου Χαλκιδέως τῆς κοιλῆς Συρίας, περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς, λόγος τέταρτος. Dieſer Commentar iſt nur einmal, und zwar Griechiſch und Lateiniſch herausgegeben von Sam. Tennulius. Arnheim 1667. 68. 2 Bde. in 4., iſt aber bei dieſer Gelegenheit nicht in die beſten Hände gerathen. Tennulius ſcheint weder als Philolog, noch als Mathematiker der Arbeit gewachſen geweſen zu ſein, und hat ſeinen Auctor ſehr häufig nicht verſtanden, was ſein Text, ſeine Überſetzung, und ſein Commentar mehr als hinlänglich beweiſen. Er geſteht ſelbſt p. 67. 68. offenherzig: ego illud (opus Jamblichi) illibatum profero, vix tres literas mutavi in codicibus, adeo periculosam ratus omnem mutationem nihil meo ingenio permisi. Wäre das nur wahr!

Nach Eutokius (ad Archim. de sphaera et cyl. l. II. p. 28. Ed. Bas.) hat ein gewiſſer Heronas, der nicht weiter bekannt iſt, ein ὑπόμνημα εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἰσαγωγὴν geſchrieben, der alſo ſpäteſtens im vierten oder fünften Jahrhundert gelebt haben kann. Heilbronner p. 393 nennt ihn fälſchlich Hero und ſetzt ihn ſonderbarer Weiſe, obgleich er des Citats bei Eutokius erwähnt, hundert Jahre nach Eutokius.

Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius, 455 — 524, hat eine Lateiniſche Bearbeitung des Nikomachus gegeben, die ich aber bis jetzt ebenſo wenig, wie ſeine Geometrie zu Geſichte bekommen habe, obgleich beide mehrmals gedruckt ſind. Übrigens ſchließt er ſich dem Original zuweilen ſo treu an, daß er von Aſt mehrmals als kritiſche Quelle zur Correctur des Griechiſchen Textes benutzt wird. Vergl. die Note 53. dieſes Kap.

Asklepius Trallianus, ein Schüler des berühmten Ammonius Hermiä im ſechſten Jahrhundert, iſt der Verfaſſer eines Commentars über unſern Autor, der handſchriftlich in mehren Bibliotheken vorhanden iſt. S. Fabricii bibl. Graeca V, 635. Bullialdus ad Theon. Smyrn. p. 193. 212. 205. 239., welcher Letztere öfters Stellen aus dieſem Commentar beibringt.

Johannes Grammaticus, gewöhnlich Philoponus genannt, ein Schüler des Vorhergehenden und Augenzeuge der Einnahme Alexandriens durch die Araber (640), hat ebenfalls einen handſchriftlich noch vorhandenen Commentar über Nikomachus geſchrieben. Fabricius l. l.

Endlich hat nach Suidas Proklus (Πρόκλος, ὁ Προκλήϊος

Digitized by

χρηματίσας, Θεμισίωνος, Λαοδικείας τῆς Συρίας ἱεροφάντης, über dieſe Arithmetik geſchrieben. Mir iſt aber weder das Zeitalter des Autors, noch ſonſt etwas außer der kurzen Anführung bei Suidas bekannt; auf jeden Fall aber iſt er wohl zu unterſcheiden von dem berühmten Proklus Lycius, Diadochus genannt, dem Scholiaſten Euklid's.

Auch den Arabern iſt Nikomachus nicht unbekannt geblieben. Einer ihrer berühmteſten Mathematiker aus der blühendſten Periode der Arabiſchen Gelehrſamkeit, Thâbet ben Korrah Abu 'l Haſſan, der von 836 bis 901 lebte, hat eine Bearbeitung der Arithmetik verfertigt, deren Titel ich wegen des in demſelben beibehaltenen Griechiſchen Worts ἀριθμητική oben S. 43 ſchon angeführt habe.

Nicht ſo reichhaltig iſt die neuere Literatur an Werken über Nikomachus. Wir haben von ſeiner Einleitung in die Arithmetik zwei Ausgaben

1) Νικομάχου Γερασινοῦ ἀριθμητικῆς βιβλία δύο. **Nicomachi Gerasini arithmeticae libri duo. Nunc primum typis excusi in lucem eduntur. Parisiis. 1538. 4.**
2) **Theologumena Arithmeticae etc. Accedit Nicomachi Gerasini institutio arithmetica ad fidem codicum Monacensium emendata. Edidit F. Astius. Lipsiae. 1817. 8.**

Beide Ausgaben enthalten nur den Griechiſchen Text, die letztere außerdem kritiſche und erklärende Anmerkungen.

Die erſten drei Kapitel ſind mit Scholien und Varianten von Nobbe unter dem Titel **Specimen Arithmeticae Nicomacheae. Lipsiae. 1828. 8.** herausgegeben.

Als Schriften über Nikomachus ſind nur zu nennen:

1) **Explicatiunculae Arithmetices doctrinae Nicomachi von Joachim Camerarius**, in deſſen Schrift **De Graecis latinisque numerorum notis et praeterea Saracenicis seu Indicis.** (Ohne Jahr und Ort. Unter der erſten Vorrede ſteht Lips. 1569, unter der zweiten 1556). Die Explicatiunculae ſind wieder abgedruckt in Tennulius Ausgabe des Jamblichus, unter dem Titel **Explicationes J. Camerarii Papeberg. in duos libros Nicomachi Geraseni Pythagorei deductionis (sic!) ad scientiam numerorum. Daventriae. 1667. 4.**
2) ***Th. Taylor* theoric arithmetic in three books, contai-**

Digitized by Google

ning the substance of all that has been written on this subject by Theo of Smyrna, Nicomachus, Jamblichus and Boetius. London. 1816. 8. Ein sehr seltenes Buch, von dem nur 250 Exemplare abgezogen sind. Ich habe es nicht gesehen.

Nachdem ich also ausführlich über Nikomachus und seine Arithmetik gehandelt habe, werde ich mich bei den Folgenden desto kürzer fassen können. Der nächste Mathematiker, mit dem wir hier zu thun haben, ist Theon von Smyrna. Unter der großen Menge Griechischer Gelehrten, welche den Namen Theon führen, sind uns nur zwei Mathematiker bekannt. Es ist dieser Theon von Smyrna, der sich in seinem Werke nicht näher zu erkennen giebt [55]), und der schon oft erwähnte Theon von Alexandrien, der Bearbeiter des Euklides und Ptolemäus, in der zweiten Hälfte des vierten Jahrhunderts. Aber der Erstere hat eine Eigenthümlichkeit, die uns die Bestimmung seines Zeitalters mit ziemlicher Zuverlässigkeit an die Hand giebt; er ist nämlich ein leidenschaftlicher Liebhaber von Citaten, was namentlich in dem zweiten Theile seines vorhandenen Werkes, der über die Musik handelt, auf eine auffallende Weise hervortritt. Er citirt der Reihe nach alle bekannten Schriftsteller über Musik von Pythagoras Zeiten ab bis auf Thrasyllus [56]), denselben, den wir schon bei Bestimmung des Zeitalters des Nikomachus zu Hilfe nahmen. Demnach hat Theon nach Tiberius gelebt. Dagegen nennt er eins der berühmtesten Griechischen Werke über diesen Gegenstand nicht, nämlich die Theorie der Musik (ἁρμονική) von Ptolemäus. Wenn nun gleich ein solches argumentum a silentio immer sein Mißliches hat, so läßt es sich doch mit etwas mehr Wahrscheinlichkeit, als im Allgemeinen zulässig ist, bei einem Autor anwenden, der es sich so geflissentlich wie Theon zum Geschäfte macht auf jeder Seite und bei jeder Gelegenheit die Schriften seiner Vorgänger zu recensiren, und es würde daher die auf dieses Schweigen gegründete Conjectur von Bullialdus [57]), daß Theon vor Ptolemäus gelebt habe, schon an und für Vieles für sich haben, wenn sie auch durch keine anderen Argumente unterstützt würde. Aber das Letztere

55) Auch Suidas faßt sich sehr kurz: Θέων, Σμυρναῖος, Φιλόσοφος.

56) Ed. Bullialdi p. 74. 137. 145.

57) In seiner Ausgabe Theon's, Ad lectorem p. 8.

Digitized by

iſt der Fall, wir haben poſitive Argumente für Bullialdus Anſicht; es wird nämlich umgekehrt Theon von Ptolemäus citirt, zwar nicht mit ſeinem Beinamen ὁ Σμυρναῖος, wohl aber als Mathematiker, und wir haben keinen Grund, durch die Annahme, daß unſer Theon Smyrnäus und Theon der Mathematiker bei Ptolemäus verſchiedene Perſonen geweſen, die Anzahl der Mathematiker dieſes Namens unnütz zu vergrößern. Identificiren wir alſo beide Mathematiker, ſo geben uns die Citate bei Ptolemäus überdies Theon's Zeitalter ſo genau an, wie wir es von wenigen Mathematikern zu beſtimmen im Stande ſind. Ptolemäus citirt nämlich vier Beobachtungen des Merkur und der Venus, welche Theon vom zwölften bis zum ſechszehnten Regierungsjahre Hadrian's, das heißt alſo von 128 bis 132 n. Chr. vorgenommen hat [58]). Demnach können wir mit einem

58) Die vier Stellen bei Ptolemäus in ſeiner Μεγάλη Σύνταξις ſind folgende l. IX. c. 9. (p. 234. Ed. Bas.) über Merkur: τῷ μὲν γὰρ ιδ ἔτει Ἀδριανοῦ, κατ' Αἰγυπτίους μεσορὶ ιη ἑσπέρας, ὡς ἐν ταῖς παρὰ Θέωνος εἰλημμέναις τηρήσεσιν εὕρομεν, τὸ πλεῖστον, φησὶν, ἀπέστη τοῦ ἡλίου ὑπολειπόμενος τοῦ ἐπὶ τῆς καρδίας τοῦ λέοντος μοιρὰς γ ς' γ''. — Die drei übrigen Beobachtungen betreffen die Venus, und zwar X, 1. (p. 239): ἐν μὲν γὰρ ταῖς παρὰ Θέωνος τοῦ μαθηματικοῦ δοθείσαις ἡμῖν, εὕρομεν ἀναγεγραμμένην τήρησιν τῷ ις ἔτει Ἀδριανοῦ etc. — Ebendaſ. weiter unten: ὁμοίως ἐν μὲν ταῖς παρὰ Θέωνος εὕρομεν, ὅτι τῷ ιβ ἔτει Ἀδριανοῦ etc. — Endlich X, 2. (p. 239): ἐν μὲν γὰρ ταῖς παρὰ Θέωνος ἡμῖν δοθείσαις εὑρίσκομεν, ὅτι τῷ ιγ ἔτει Ἀδριανοῦ etc. Wer Conjecturen liebt, dem bleibt es unbenommen, aus den Worten ἡμῖν δοθείσαις Schlüſſe auf das perſönliche Verhältniß zwiſchen Theon und Ptolemäus zu ziehen. — Theon von Alexandrien in ſeinem Commentar zu den angeführten Stellen nennt unſern Theon Θέων ὁ παλαιός, der Ältere; die entſprechenden Stellen ſind Ed. Bas. p. 390: παραλείπεται οὖν πρῶτον ἑσπερίαν μεγίστην ἀπόστασιν τετηρμένην ὑπὸ Θέωνος τοῦ παλαιοῦ etc.; p. 395. (παραλείπεται δύο τηρήσεις), μίαν μὲν ὑπὸ Θέωνος παλαιοῦ μαθηματικοῦ γεγενημένην, ὃς ἐπὶ Ἀδριανοῦ ἐποιεῖτο τὰς τηρήσεις, ἑτέραν δὲ δι' ἑαυτοῦ etc. und ebend. ὁμοίως δὲ ἐν ταῖς παρὰ Θέωνος εὗρεν, ὅτι τῷ δωδεκάτῳ ἔτει Ἀδριανοῦ etc.; endlich p. 396. ἐκλείπεται πάλιν δύο μεγίστας ἀποστάσεις . . . μίαν περὶ τοῦ παλαιοῦ Θέωνος ἀναγεγραμμένην ἐν ᾗ φησὶ τῷ τρισκαιδεκάτῳ ἔτει Ἀδριανοῦ etc. Aus dieſer Formel des Commentators, ὁ παλαιός, ſcheint denn doch deutlich hervorzugehen, daß derſelbe unter den älteren Mathematikern nur einen Namensvetter kannte, gleichwie der Zuſatz ὁ μαθηματικός bei Ptolemäus zu einem ähnlichen Schluſſe berechtigt.

Digitized by Google

einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit aussprechen, daß Theon von Smyrna in der ersten Hälfte des zweiten Jahrhunderts gelebt hat, und noch ein älterer Zeitgenosse von Ptolemäus [59]), gewiß aber ein Zeitgenosse und vielleicht gar ein Freund Plutarch's und auch mit dem von diesem Autor angeführten Astronomen Theon [60]) dieselbe Person gewesen ist.

Theon ist der Verfasser eines Werkes, welches den Titel führt: Τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν (expositio, ergänzen die Herausgeber), und den Zweck hatte, nicht etwa, wie die von Blancanus herausgegebenen loca mathematica Aristotelis, Platon's Werke von Anfang bis zu Ende zu durchblättern und jede mathematische Stelle zu notiren und zu erläutern, sondern dem Leser so viel Mathematik gleich von vorne herein und im Zusammenhange zu lehren, als er nöthig hat, um die in Platon's Schriften vorkommenden Anspielungen zu verstehen. Das Werk ist nicht vollständig erhalten; die beiden ersten Theile desselben, welche die Arithmetik und die Musik abhandeln, hat Ismael Bouillaud (Lateinisch Bullialdus, derselbe, der sich die unsägliche Mühe gab, Wallis Arithmetica Infinitorum Euklidisch zu beweisen) 1644 zu Paris Griechisch und Lateinisch nebst einem brauchbaren Commentare herausgegeben. Mehr hatte er nicht erhalten können; er hatte aber von Isaak Vossius gehört, daß der astronomische Theil des Werks auf der Ambrosischen Bibliothek zu Mailand handschriftlich vorhanden sei, und verspricht daher in der Vorrede, denselben künftig, wenn es ihm möglich werden sollte, auch einmal herauszugeben. Die Sache ist seitdem verschollen, und bis jetzt für diesen Autor weiter nichts geschehen, als daß ein gewisser Gelder, ohne der Sache gewachsen zu sein [61]), und daher mit kindischem Hochmuthe auf seinen

---

59) Ptolemäus hat nämlich bereits im 21sten Jahre Hadrians, also fünf Jahre nach der spätesten angeführten Beobachtung Theons, beobachtet. S. Μεγ. Σύντ. X, 1. 2. (p. 239. 240).

60) Plutarchus de EI Delphico c. 5. De maculis in facie lunae c. 7. 19. 20. 26. — Vergl. Bullialdus in der Vorr. ad Lect. p. 8. Gelder Praemon. p. VII—XIII.

61) Ich kann nicht umhin folgende Stelle aus seiner Vorrede pag. XLVII. Cap. III. De doctrina Theonis Smyrnaei, hier abzuschreiben: Nec alia fere ratio fuisse videtur disciplinarum Mathematicarum Platonis, quam Euclidis et Theonis Smyrnaei (?!) aetate. Haec autem ratio non prius mu-

viel gelehrteren Vorgänger herabblickend, die Arithmetik (ohne die Musik) noch einmal hat abdrucken lassen, Lugduni Batav. 1827. 8.

Theon ist in neuerer Zeit bekannter geworden und wird öfter citirt als Nikomachus, dem er doch in wissenschaftlicher Hinsicht weit nachsteht. Namentlich vermißt man bei ihm durchaus die strenge Ordnung und die systematische Behandlung des Gegenstandes, die in dem Werke des Nikomachus durchgehend herrscht, auch hat Theon den Stoff lange nicht so erschöpft, wie der letztgenannte Mathematiker. Als Belag für meine Behauptung in Betreff der Ordnung habe ich nur nöthig, die Überschriften der Kapitel in dem arithmetischen Theile anzuführen; es sind folgende:

1. Daß die Mathematik nöthig sei.
2. Über die Arithmetik.
3. Über Eins und die Einheit (περὶ ἑνὸς καὶ μονάδος).
4. Welches das Princip der Zahlen sei (τίς ἀρχὴ ἀριθμῶν).
5. Über Gerade und Ungerade. Nun wird eingeschoben
6. Über die Primzahl.
7. Über die zusammengesetzte Zahl. Und dann erst wird fortgefahren
8. Über die verschiedenen Arten von Geraden. Über gerademal Gerade.
9. Über gerademal Ungerade (ἀρτιοπέρισσοι).
10. Über ungeradem al Gerade (περισσάκις ἄρτιοι).
11. Περὶ ἰσάκις ἴσων, d. h. über Quadratzahlen, vergl. 15. 21. 25. 28.
12. Περὶ ἀνισάκις ἀνίσων.
13. Über ἑτερομήκεις, ein specieller Fall des folgenden.
14. Über Parallelogrammzahlen.

---

tata est quam saeculo p. Chr. decimo septimo (!!!), quo Albertus Girardus et Cartesius, invento Arithmetices universalis (Algebram vocant) auxilio, floruerunt, et hinc recentiores Mathematici aliam ratiocinandi viam ingressi sunt. Wenn die Gelehrten sich streiten, ob Rom im Jahre 752 oder 753 oder 754 erbaut sei, so hat das seinen guten Grund. Wenn aber ein Gelehrter (?) in der Geschichte der letzten Jahrhunderte einen Anachronismus von mehr als vierhundert Jahren macht, so ist das eine Unwissenheit, für die ein Schüler, wenn er sie an den Tag legte, offenbar wegen Faulheit bestraft werden würde. Warum nicht lieber erst lernen, und dann lehren? Auf diese Stelle ist nicht einmal anwendbar, was Schiller von jenem kurzen Gedärm sagt.

Digitized by Google

15. Über Quadratzahlen ſ. o.
16. Daß die Quadratzahlen die Heteromekes als geometriſche Mittel haben.
17. Über die προμήκεις, einerlei mit 14.
18. Über ebene Zahlen, der allgemeine Begriff, von welchem alle von 11 bis 28 genannten ſpecielle Fälle ſind.
19. Über dreieckige und die folgenden Polygonalzahlen; ihre Entſtehung.
20. Über die folgenden Polygonalzahlen.
21. Περὶ ἰσάκις ἴσων (ſ. 11. 15.) καὶ ἀνισάκις ἀνίσων (ſ. 12.).
22. Über ähnliche Zahlen.
23. Über dreieckige Zahlen, ſ. 19.
24. Über kreis- und kugelförmige, und wiederkehrende Zahlen.
25. Über Quadratzahlen (noch einmal).
26. Über fünfeckige Zahlen.
27. Über ſechseckige Zahlen.
28. Daß eine Quadratzahl aus zwei dreieckigen Zahlen beſteht.
29. Über Körperzahlen.
30. Über Pyramidalzahlen.
31. Über Seiten- und Diagonalzahlen.
32. Über vollſtändige, unvollſtändige und übervollſtändige Zahlen.

Das iſt ein wahres Labyrinth, und mit dem Inhalt ſteht es nicht beſſer. Der Satz z. B., daß die Quadratzahlen durch die Summation der ungeraden Zahlen entſtehen, kommt viermal vor, am Anfange des 15., in der Mitte des 19., am Anfange des 20. und in dem 25. Kapitel, welches letztere weiter nichts enthält, als dieſen zum viertenmal wiederholten Satz. Ich übergehe indeß alles Übrige und begnüge mich hier damit, zwei Stellen herauszuheben, welche Wahrheiten enthalten, die ich bei Nikomachus nicht gefunden habe.

Zunächſt Kap. 20 (p. 55) eine Bemerkung über die Quadratzahlen. Theon ſagt: Jede Quadratzahl iſt entweder durch 3 theilbar, oder ſie iſt, wenn man 1 ſubtrahirt, durch 3 theilbar (d. h. eine Quadratzahl kann nicht die Form $3n + 2$ haben); ferner iſt ſie entweder durch 4 theilbar, oder die um 1 verminderte Zahl iſt durch 4 theilbar (d. h. eine Quadratzahl kann weder die Form $4n + 2$ noch $4n + 3$ haben); und diejenige, welche nach Subtraction der Einheit durch 3 theilbar iſt, iſt immer auch durch 4 theilbar, oder wenn ſie nach Subtraction der Einheit durch 4 theil-

Digitized by Google

bar ist, ist sie selbst durch 3 theilbar, oder sie ist selbst durch 3 und durch 4, oder weder durch 3 noch durch 4 theilbar; dann ist sie aber nach Subtraction der Einheit durch 3 und durch 4 theilbar. Die vier letzten Bestimmungen sind sehr schlecht ausgedrückt, auch ist der Text an dieser Stelle fehlerhaft; diese Bestimmungen, welche übrigens unmittelbar aus den beiden ersten folgen, sagen so viel: es sind immer zugleich

entweder 1) $\frac{m^2}{3}$ und $\frac{m^2-1}{4}$

oder 2) $\frac{m^2}{4}$ und $\frac{m^2-1}{3}$

oder 3) $\frac{m^2}{3}$ und $\frac{m^2}{4}$

oder 4) $\frac{m^2-1}{3}$ und $\frac{m^2-1}{4}$ ganze Zahlen.

No. 1) begreift die Zahlen $bn+3$, No. 2) die Zahlen $bn \pm 2$, No. 3) die Zahlen $b\,n$ und No. 4) die Zahlen $bn \pm 1$, wodurch allerdings alle Zahlen erschöpft sind. Besser finden wir die ganze Sache bei Jamblichus p. 126 ausgedrückt: *πᾶς τετράγωνος ἤτοι αὐτόθεν τρίτον ἔχει, ἢ εἰ μὴ ἔχει, πάντως γε τέταρτον, ἢ εἰ μὴ καὶ τοῦτο, μονάδος ἀφαιρεθείσης ἐκ μὲν τρίτου ἔχοντος τέταρτον ἔχοντα ἀποτελέσεις, ἐκ δὲ τετάρτου ἔχοντος τρίτον ἔχοντα, ἐκ δὲ μηδ' ἑτέρου, ἀμφότερα. Εἰ δὲ ἔχοι ἀμφότερα, ἔστιν ὅτε ἡ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀμφοτέρων στερίσκει.* Die Ausdrücke *τρίτον, τέταρτον* sind von Tennulius, der an dieser Stelle gar nicht weiß, wovon die Rede ist, sonderbar falsch verstanden, indem er sie das dritte, das vierte Quadrat wiedergiebt [62]).

Eine zweite, aber auch die letzte Erweiterung der Lehre des Nikomachus enthält das Kap. 31. Es heißt Griechisch *περὶ πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν.* Der Inhalt ist folgender: „So wie die Zahlen die Eigenschaften der Dreiecke, Quadrate, Fünfecke u. s. w. in sich tragen, so finden wir auch das Verhältniß der Seite und Diagonale (des Quadrats) in ihnen ausgedrückt." Die folgende Darstellung ist nun bei Theon nicht sehr lichtvoll, wenigstens trägt sie nicht dazu bei, das Bild zu motiviren. Der Sinn ist der: in dem geometrischen Quadrate ist das Quadrat der Diagonale dop-

62) Notae in Jambl. p. 188.

Digitized by Google

pelt so groß, als das Quadrat der Seite. Das läßt sich allerdings in Zahlen nicht darstellen. Wohl aber kann man immer Paare von Zahlen finden, so daß das Quadrat der einen abwechselnd um 1 größer und um 1 kleiner ist als das doppelte Quadrat der andern. Solche Zahlen nun hat Theon im Sinne, indem er lehrt, man soll von zwei Einheiten ausgehen, eine als Seite, die andere als Diagonale betrachtend, und dann immer die Summe der Seite und Diagonale gleich einer neuen Seite, die Summe der doppelten Seite und der Diagonale gleich einer neuen Diagonale setzen. In der That erhält man auf dem Wege immer Zahlenpaare, welche die Eigenschaft haben, daß das einfache Quadrat der einen von dem doppelten Quadrate der andern um 1 verschieden ist, und zwar stets abwechselnd größer und kleiner. Von zwei Einheiten ist das klar, also sind sie die Anfangspuncte der Operation; und zwar ist das doppelte Quadrat der Seite um 1 größer als das Quadrat der Diagonale. Nun bilde man nach der vorgeschriebenen Regel die neue Seite $= 1 + 1 = 2$, die neue Diagonale $= 2 \cdot 1 + 1 = 3$, so ist $2 \cdot 2^2 = 8$ um 1 kleiner als $3^2 = 9$. Fährt man nun in der Anwendung der Regel fort, so wird die dritte Seite $= 2 + 3 = 5$, die dritte Diagonale $= 2 \cdot 2 + 3 = 7$, ferner $5 + 7 = 12$, $2 \cdot 5 + 7 = 17$ u. s. w. Fährt man so beliebig weit, aber in gerader Anzahl fort, so ist die Summe der Quadrate sämmtlicher Diagonalen genau doppelt so groß als die Summe der Quadrate sämmtlicher Seiten, und die Analogie mit der geometrischen Figur wird dadurch vollkommen hergestellt. Diese Spielerei mit Analogien wird aber wichtiger, wenn wir sie von ihrer wissenschaftlichen Seite ins Auge fassen, und sie wird dann eine Methode, alle Auflösungen in ganzen rationalen Zahlen zu finden, deren die beiden Gleichungen $2t^2 + 1 = u^2$ und $2x^2 - 1 = y^2$ fähig sind; und zwar sagt der Satz: wenn m und n respective für t und u gesetzt der ersten Gleichung genügen, so genügen $m + n$ und $2m + n$ respective für x und y gesetzt der zweiten Gleichung; und umgekehrt, genügen p und q für x und y gesetzt der Gleichung $2x^2 - 1 = y^2$, so genügen $p + q$ und $2p + q$ für t und u gesetzt der Gleichung $2t^2 + 1 = u^2$. Gesetzt nun, man hätte für eine der beiden Gleichungen versuchsweise die Wurzeln p und q gefunden, so hätte man daraus für die andere die Wurzeln $p + q$ und $2p + q$, und daraus wiederum für die erste die Wurzeln $3p + 2q$ und $4p + 3q$, und nun abermals für die zweite

die Wurzeln $7p + 6q$ und $10p + 7q$ und so fort. Nun ergeben sich aber für die Gleichung $2x^2 - 1 = y^2$ sofort die Werthe $x = 1$ und $y = 1$, daher erhalten wir nach Theon's Regel folgende Auflösungen beider Gleichungen

x	y	t	u
1	1	2	3
5	7	12	17
29	41	70	99
169	239	408	577
985	1393	2378	3363

u. s. w.

Die Wahrheit der Theonschen Regel läßt sich sehr leicht beweisen. Denn wenn der vorigen Annahme gemäß $p = t$ und $q = u$ die Gleichung $2t^2 + 1 = u^2$ lösen, d. h. wenn $2p^2 + 1 = q^2$ ist, und man setzt in der zweiten Gleichung, $2x^2 - 1 = y^2$, $x = p + q$, so erhält man

$$y^2 = 2p^2 + 4pq + 2q^2 - 1$$
$$\text{aber } q^2 - 1 = 2p^2,$$
$$\text{daher } y^2 = 4p^2 + 4pq + q^2$$
$$y = 2p + q.$$

Hat man dagegen gefunden $2m^2 - 1 = n^2$, und man setzt in der Gleichung $2t^2 + 1 = u^2$, $t = m + n$, so wird

$$u^2 = 2m^2 + 4mn + 2n^2 + 1$$
$$\text{aber } n^2 + 1 = 2m^2$$
$$\text{also } u^2 = 4m^2 + 4mn + n^2$$
$$u = 2m + n.$$

Theon hat also, wenn anders diese Sache seine Erfindung ist, ein nicht unbedeutendes Problem aus der unbestimmten Analytik des zweiten Grades gelöst, ohne es zu wissen. Ich habe diese Theorie der Seiten- und Diagonalzahlen außerdem nur noch bei Jamblichus (p. 129) gefunden, und eine Hindeutung darauf liegt in folgenden Worten des Proklus [63]): *διττῶν δὲ ὄντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν μὲν ἰσοσκελῶν, τῶν δὲ σκαληνῶν, ἐν μὲν τοῖς ἰσοσκελέσιν οὐκ ἄν ποτε εὕροιμεν ἀριθμοὺς ἐφαρμόσαι ταῖς πλευραῖς·*

63) Ὑπόμνημα εἰς Εὐκλ. IV. p. 111.

οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος, εἰ μὴ λέγοι τις τὸν σύνεγγυς· ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ $\overline{ξ}$ τοῦ ἀπὸ τοῦ $\overline{ε}$ διπλάσιός ἐστιν $\overline{α}$ δέοντος, d. h. „Es giebt zwei Arten rechtwinkliger Dreiecke, gleichschenklige und ungleichseitige; in dem gleichschenkligen ist es nicht möglich Zahlen zu finden, welche den Seiten entsprechen; denn es giebt keine Quadratzahl, welche das Doppelte einer Quadratzahl wäre, es sei denn daß Jemand um 1 verschiedene Zahlen (eigentlich: zunächstliegende) meinte; so ist z. B. das Quadrat von 7 das Doppelte des Quadrats von 5 weniger 1." Aber keiner der genannten Autoren giebt uns irgend einen Wink darüber, wie man auf diese Auflösung obiger Gleichungen gekommen ist, vielmehr steht dieselbe in ihrem Resultate als ganz nackte Wahrheit da.

Und nun noch einen kleinen Beitrag zur Geschichte der Geschichte. Theon [64]) sagt: κεφαλαιώδη καὶ σύντομον ποιησόμεθα τῶν ἀναγκαίων, καὶ ὧν δεῖ μάλιστα τοῖς ἐντευξομένοις Πλάτωνι μαθηματικῶν θεωρημάτων παράδοσιν, ἀριθμητικῶν τε καὶ μουσικῶν καὶ γεωμετρικῶν, τῶν τε κατὰ στερεομετρίαν καὶ ἀστρονομίαν. Zu den Worten ἀριθμητικῶν τε καὶ μουσικῶν macht Bouillaud p. 192 folgende Anmerkung: Quae sola restant theoremata a Theone conscripta; desiderantur enim Geometrica, Stereometrica et Astronomica. Ex hujus *fortasse* authoris scriptis integris corrasit ***Michaël Psellus*** illa, quae compendioso congessit sub hocce titulo εὐσύνοπτον σύνταγμα εἰς τὰς τέσσαρας μαθηματικὰς ἐπιστήμιας Ἀριθμητικὴν, Μουσικὴν, Γεωμετρίαν καὶ Ἀστρονομίαν anno a mundo condito juxta Graecam Ecclesiam 6516, id est anno Christi 1008. Dieselbe Vermuthung spricht er noch einmal in der Vorrede aus p. 7. Composuerat siquidem Theo in eundem finem tractatus alios de Geometria, Stereometria et Astronomia, quod ipse satis pluribus hujusce libelli locis significavit. Et *forsan* ex integro hoc opere compilavit ***Michael Psellus*** synopsim a se conscriptam quatuor Mathematicarum scientiarum. Wahrscheinlich auf Grund dieser Hypothese, die Bouillaud wenigstens vorsichtiger Weise mit fortasse und forsan einführt, und die in der That so sehr viel eben nicht für sich hat, schreibt Delambre [65]): Son

64) Cap. 1. p. 2. Ed. Bull.

65) Hist. de l'Astron. anc. T. II. p. 638.

Digitized by

(Theon's) ouvrage a beaucoup servi à *Psellus*, qui s'en est fait l'abbreviateur. Nun wird dieſe neue Wahrheit auf Delambre's Autorität hin wieder in manches Buch übergehen, deſſen Verfaſſer weder Theon's noch Pſellus Werk geleſen hat. Ich ſagte, Bouillaud's Hypotheſe habe wenig für ſich; denn ein ſo elendes mageres Werk, wie das von Pſellus (herausgegeben von Wilh. Xylander, Griech. u. Lat. Baſel 1554. kl. 8.) konnte eben ſo gut aus jedem andern Autor excerpirt werden, als gerade aus Theon; es iſt ſo ſchlecht, daß es die Autorität, auf die es ſich ſtützt, durchaus gar nicht verräth.

Vielleicht fällt in dieſe oder die nächſtfolgende Zeit das Alter eines gewiſſen Thymaridas, dem die Mathematik manchen Zuwachs zu verdanken ſcheint. Wir kennen den Mann aber nur aus einigen Citaten bei Jamblichus [66]). Um von dem Unbedeutenderen anzufangen, ſo erwähne ich, daß Jamblichus zwei Definitionen von Thymaridas mittheilt; die erſte iſt die: die Einheit iſt die terminirende Größe (περαίνουσα ποσότης) (p. 11); die zweite iſt die, daß Thymaridas die Primzahlen εὐθυγραμμικοὶ, geradlinige, genannt habe (p. 36), weil nur dieſe Zahlen allein ſich nicht als Flächen, d. h. als Producte darſtellen laſſen. Wichtiger aber iſt eine Regel des Thymaridas, welche in die Algebra einſchlägt, und die Jamblichus unter dem ſonderbaren Namen des ἐπάνθημα, das Daranblühen, das Anhaften (von Tennulius florida sententia überſetzt) einführt. Es war nämlich vorher p. 87 geſagt worden: „Bei der bildlichen Darſtellung der Polygonalzahlen bleiben immer zwei Seiten dieſelben, indem jede nach einer Seite hin verlängert wird (μηκυνόμεναι καθ' ἕκαστον); die aber um dieſe liegen, werden durch das Herumſetzen der Gnomones eingeſchloſſen, indem ſie ſich immer ändern, eine im Dreieck, zwei im Viereck, drei im Fünfeck und ſo bis ins Unendliche fort, indem die Benennung der Polygone von der Anzahl der veränderten Seiten immer um 2 differirt." Und da heißt es denn nun p. 88 weiter: „Daher iſt auch die Methode des Epanthema von Thymaridas entnommen. Wenn nämlich gegebene und unbekannte Größen ſich in eine gegebene theilen (d. h. zuſammengenommen dieſer gleich ſind), und eine von ihnen mit jeder

66) Comment. in Nicom. p. 11. 36. 88. 91. 95. Vita Pythag. c. 23. 28. Recens. Pythag. c. 33. 36.

Digitized by Google

andern zu einer Summe verbunden wird, so wird die Summe aller dieser Paare nach Subtraction der ursprünglichen Summe, bei drei Zahlen, der zu den übrigen addirten ganz zuerkannt (gleich gesetzt), bei vieren deren Hälfte, bei fünfen deren Drittel, bei sechsen deren Viertel, und so fort." — Tennulius hat, wie aus seiner völlig sinnlosen Übersetzung hervorgeht, den an dieser Stelle sehr verstümmelten Text nicht verstanden, und auch sein sonst ausführlicher Commentar ist nicht im Stande ihn an dieser Stelle gegen den gemachten Vorwurf zu vertheidigen [67]). Um meinen Lesern ein Exempel zu statuiren, wie dieser Herausgeber seinen Autor behandelt, schreibe ich die kurze Regel des Epanthema, die ich so eben deutsch gegeben habe, nach des Tennulius Text und Übersetzung hier ab:

Ἐνταῦθεν ἡ ἔφοδος τοῦ Θυμαριδίου ἐπανθήματος ἐλήφθη. Ὡρισμένων γὰρ ἢ ἀορίστων μεριθμένων ὡρισμένον τι, καὶ ἑνὸς οὑτινοσοῦν τοῖς λοιποῖς καθ' ἕκαστον συντεθέντος, τὸ ἐκ πάντων ἀθροισθὲν πλῆθος, ἐπὶ μὲν τριῶν μετὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὁρισθεῖσαν ποσότητα ὅλον τῷ συγκριθέντι προσνέμει, τ' ἀφ' οὗ τὸ λοιπὸν καθ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀφαιρεθήσεται, ἐπὶ δὲ τεσσάρων τὸ ἥμισυ, καὶ ἐπὶ πέντε τὸ τρίτον, καὶ ἐπὶ ἓξ τὸ τέταρτον, καὶ ἀεὶ ἀκολούθως.

Hinc etiam cognoscitur ratio floridae sententiae, quam tradidit Thymaridas. Cum enim, ait, finita vel indefinita dividunt aliquid definitum, et unum quodlibet singulis reliquis apponitur, cumulata ex omnibus multitudo, in tribus quidem post priorem definitam quantitatem, totum attribuit concreto, a quo reliquum secundum singula reliqua auferetur, in quatuor vero dimidiam, in quinque tertiam, in sex quartam partem, et ad eandem sequentiam in omnibus proceditur.

Hätte Tennulius zum Besten derer, welche nicht Griechisch ver-

67) Der ganze Commentar, den er zu dieser Stelle giebt, die manche Gelegenheit zu Erläuterungen darbot, ist folgender p. 171. Ὡρισμένων] auctor hic usque ad pag. 96. demonstrat proportionem cujusque polygoni et laterum mutandorum. — Ἐπὶ μὲν τριῶν] in tribus est aliquid definitum. — Ἐπὶ ἓξ τὸ τέταρτον] quia sexanguli gnomon continet quatuor latera. Diese drei Notizen sind ein wahres Muster von Commentar, besonders die zweite; Tennulius hat wieder nicht einmal von ferne gewittert, wovon die Rede ist.

Digitized by Google

ſtehen, die Griechiſchen Wörter mit Lateiniſchen Buchſtaben geſchrieben, ſo wären dieſelben eben ſo gut daran geweſen, wie jetzt mit ſeiner Lateiniſchen Überſetzung. Was nun den Text anlangt, ſo muß es zunächſt ἐντεῦθεν ſtatt ἐνταῦθεν heißen; die aber in der Mitte ausgezeichnete Stelle iſt nach einigen Änderungen und Umſtellungen ſo zu leſen: μετὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὁρισθεῖσαν ποσότητα ἀφαιρεθεῖσαν, ἐπὶ μὲν τριῶν ὅλον τῷ καθ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν συγκριθέντι προσνέμεται, ἐπὶ δὲ τεσσάρων etc.

Thymaridas hat wahrſcheinlich bei ſeiner Regel an die Gnomones der Polygonalzahlen nicht gedacht, mit denen ſie auch in gar keiner innern Verbindung ſteht, ſondern Jamblichus benutzt nur die zufällige Analogie des Fortſchreitens um $n - 2$, um einen fremdartigen Gegenſtand einzuführen, für deſſen Mittheilung wir ihm indeß allen Dank ſchuldig ſind. Das Epanthema enthält, in Zeichen ausgedrückt, folgende einfache Regel. Wenn eine Anzahl von n Unbekannten, x, y, y', y'', y''', y'''' u. ſ. w., in der Art beſtimmt iſt, daß die Summe aller gleich a, die Summe von x in jede folgende ſucceſſive gleich b, b', b'', b''', b'''' etc. iſt, ſo iſt $x = \frac{b + b' + b'' + b''' + b'''' + \ldots - a}{n - 2}$. Werden nun drei Größen geſucht, ſo daß $x + y + y' = a$, $x + y = b$, $x + y' = b'$, ſo iſt $x = b + b' - a$[68]); werden vier Größen geſucht, alſo $x + y + y' + y'' = a$, $x + y = b$, $x + y' = b'$, $x + y'' = b''$, ſo iſt $x = \frac{b + b' + b'' - a}{2}$, bei fünfen $x = \frac{b + b' + b'' + b''' - a}{3}$ und ſo fort. Daß dieſer Sinn, den ich dem Epanthema untergelegt habe, der einzig richtige iſt, beweiſt Jamblichus ſelbſt, indem er die Regel gleich hinterher an zwei Beiſpielen erläutert, von denen ich eines mittheilen will. „Daß aber dieſes Epanthema nicht müßig daſteht (παρέλκει), ſondern auch auf eine arithmetiſche Regel Bezug hat, und uns zu einer ſehr zierlichen Methode der Auffindung führt, wollen wir ſo darthun. Es ſei uns zum Beiſpiel aufgegeben, vier Zahlen zu finden, ſo daß die erſte ſammt der zweiten doppelt ſo groß ſei, als die dritte und vierte zuſammen,

68) Addirt man nämlich die beiden letzten Gleichungen, ſo wird $x + (x + y + y') = b + b'$, oder $x + y + y' = a$, alſo $x + a = b + b'$ und $x = b + b' - a$. Ähnlich bei den folgenden.

Digitized by Google

die erste und dritte dreimal so groß als die zweite und vierte, und auf ähnliche Weise, die erste und vierte viermal so groß als die beiden mittlern, nämlich die zweite und dritte zusammengenommen, alle zusammen aber fünfmal so groß, als eben diese beiden mittlern (was unmittelbar aus der vorigen Bedingung folgt)." Jamblichus wird bei der Ausführung dieser Aufgabe etwas weitläuftig; ich will kurz den Inhalt angeben, ohne an dem Wesentlichen seiner Methode etwas zu ändern. Da hier ein Doppeltes, ein Dreifaches, ein Vierfaches und ein Fünffaches gebraucht wird, so setze ich die Summe der vier Zahlen gleich $2 . 3 . 4 . 5 = 120$. Da nun die Summe der beiden ersten Zahlen gleich der doppelten Summe der beiden letzten ist, also die dreifache Summe der ersten beiden gleich der doppelten Summe aller vier Zahlen (wenn man nämlich zu beiden Seiten die doppelte Summe der ersten beiden addirt), so multiplicire ich die 120 mit 2, und dividire das Product durch 3, so habe ich den Quotienten 80 als Summe der ersten beiden Zahlen. Weil ferner die erste und dritte gleich dem der dreifachen Summe der zweiten und vierten, also die vierfache Summe der ersten und dritten gleich der dreifachen Summe aller vier Zahlen ist, so multiplicire ich 120 mit 3, und dividire das Product durch 4, so ist der Quotient 90 die Summe der ersten und dritten. Auf dieselbe Weise erhalte ich, wenn ich 120 mit 4 multiplicire und das Product durch 5 dividire, den Quotienten 96 gleich der Summe der ersten und vierten Zahl. „Da nun," fährt Jamblichus fort, „die vier Zahlen in ihrer Verbindung gefunden, aber noch nicht einzeln geschieden sind, so giebt uns den Weg zu ihrer Absonderung von einander das Epanthema des Thymaridas an die Hand. Wenn wir nämlich die drei Summen addiren, das heißt 80, 90, 96, und von dieser Gesammtsumme, 266, die anfangs gegebene („in die vier Zahlen getheilte") Summe 120 subtrahiren, so erhalten wir den Rest 146, und dieses Restes Hälfte, weil nämlich vier Zahlen gegeben waren, giebt die zu den übrigen addirte; diese Hälfte [69]) aber ist 73, und das ist die erste Zahl, ihr Rest von 80, nämlich 7, wird also die zweite, ihr Rest von 90, nämlich 17, die dritte, und ihr Rest von 96, nämlich 23, die vierte

69) Der Schluß von hier an ist im Griechischen Texte p. 92. wieder sehr verstümmelt; da die Hauptsache aber gelöst, und das Übrige nur als ein Anhang zu betrachten ist, so mag ich mich bei der Correctur nicht aufhalten.

Digitized by Google

Zahl sein. Dieses sind die kleinsten Werthe in ganzen Zahlen, welche die gegebenen Verhältnisse beobachten; wenn man sie durch eine beliebige Zahl dividirt oder mit einer solchen multiplicirt, so werden die dadurch entstandenen Zahlen ebenfalls der Aufgabe genügen."

Diese Auflösung ist so einfach und leicht, daß ich es nicht für nöthig halte, unsern modernen Augen zu Gefallen die gegebenen Worte in algebraische Zeichen zu übersetzen. Es ist hinreichend, wenn ich durch Mittheilung dieser Auflösung die Richtigkeit meiner Deutung des Epanthema nachgewiesen habe. Wichtiger aber noch als der Inhalt dieser Regel ist deren Form, weil darin bereits von bekannten und unbekannten Größen die Rede ist. Ἀόριστος ist nämlich, auch bei Diophant, der Kunstausdruck für eine in allgemeinen Zeichen ausgedrückte Zahl, im Gegensatz des ὡρισμένος, der begrenzten oder gegebenen Zahl. Also hat man vor Diophant reine algebraische Operationen gekannt, das heißt, man hat mit einem allgemeinen Ausdrucke für die Unbekannte umzugehen gewußt — wenigstens in Worten. Es folgt aber aus dem Epanthema nicht als durchaus nothwendig, daß man die Unbekannte auch durch ein allgemeines Zeichen ausgedrückt habe, wie Diophant es thut. Jedenfalls aber ist dieses Epanthema ein herrlicher Fund für die Geschichte der Algebra.

Außer dieser interessanten Mittheilung über Thymaridas enthält der Commentar des Jamblichus wenig Neues, einige einzelne Bemerkungen abgerechnet, die ich kurz erwähnen will.

Jede Zahl mit einer der beiden ihr zunächst liegenden gleichartigen (d. h. gerade mit geraden, ungerade mit ungeraden) multiplicirt, giebt, wenn man zu dem Produete 1 addirt, ein Quadrat, und zwar geben ungerade Zahlen gerade Quadrate und gerade Zahlen ungerade Quadrate [70]). Das heißt, $a\,(a \pm 2) + 1 = (a \pm 1)^2$.

---

70) Pag. 127. Diese Stelle sieht bei Tennulius ganz und gar wunderbar aus. Sie schließt sich nämlich unmittelbar an die oben bei Gelegenheit Theon's über die Theilbarkeit der Quadrate durch 3 und 4 mitgetheilte Stelle an, daher ich hier deren letzten Satz wiederhole. Εἰ δὲ ἔχοι ἀμφότερα, ἔστιν ὅτε ἡ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀμφοτέρων στερίσκει, καὶ ἅπας ἀριθμὸς τὸν διαφέροντα ἐφ' ἑκάτερα. Ὁπότερον οὖν ὁμογενῆ πολλαπλασιάσας καὶ προλαβὼν μονάδα τετράγωνον ποιεῖ, περισσοὶ μὲν ἀρτίους ποιοῦσι, ἄρτιοι δὲ περισσούς. Es ist erstens zwischen στερίσκει und καὶ ἅπας statt

Jede dreieckige Zahl, mit 8 multiplicirt und zum Producte 1 addirt, giebt eine Quadratzahl (p. 127).

Wenn man alle Zahlen von 1 bis a und von da wieder zurück von $a - 1$ bis 1 addirt, so ist die Summe gleich a^2. Dieser Satz ist bloß eine Auflösung des Satzes von Nikomachus, daß jede Quadratzahl die Summe von zwei dreieckigen Zahlen ist, deren eine mit dem Quadrat eine gleiche, die andere eine um 1 kleinere Seite hat. Denn

$$1 + 2 + 3 + \ldots (a-1) + a = \frac{a(a+1)}{2} = a^{\Delta}$$

$$(a-1) + (a-2) + \ldots 3 + 2 + 1 = \frac{(a-1)\,a}{2} = (a-1)^{\Delta},$$

nach Nikomachus aber ist $a^{\Delta} + (a-1)^{\Delta} = a^2$.

Bei Jamblichus (p. 107) lautet der Satz wörtlich so: „Die

---

des Komma ein Punct zu setzen, zweitens zwischen ἑκάτερα und ὁπότερον jede Interpunction wegzustreichen, drittens ὁποτερονοῦν statt ὁπότερον οὖν, und viertens προσλαβὼν statt προλαβὼν zu lesen. Tennulius übersetzt aber frisch darauf weg: .... et omnis numerus altrinsecus differentem. Utrumvis igitur (οὖν) homogeneum multiplicans et anticipans (προλ.) unitatem, facit quadratum. Es müßte vielmehr, wörtlich übersetzt, heißen: Et omnis numerus utrimque adjacentium homogeneorum utrumlibet multiplicans et assumens unitatem, facit quadratum. Sonderbar genug ist es indeß, daß Tennulius aus seinem falschen Texte und falscher Übersetzung den richtigen Satz herausbringt, nur in anderer Form. Er sagt nämlich p. 188. Si quadrati homogenei sese, hoc est par parem, impar imparem produxerint, latus productae summae erit quadratum, si unitatem anticipaverit, ut quadrati 4 et 16 pares in se ducti faciunt 64, cujus latus est 8; huic si addas unitatem, habes imparem quadratum 9 ortum ex paribus. 16 ducti in 36 faciunt quadratum 576 cujus latus 24, si unitate augeatur, orietur impar quadratus 25. Impares quadrati 9 et 25 producunt 225 cujus latus 15 unitate auctum 16 facit quadratum parem. 25 et 49 faciunt 1225 cujus latus 35 auctum unitate facit similiter quadratum parem 36. Der Verfasser scheint nicht zu wissen, daß, wenn man zwei Quadratzahlen mit einander multiplicirt, und aus dem Product die Wurzel zieht, man dasselbe Resultat viel einfacher gehabt hätte, wenn man gleich die beiden Wurzeln der Quadrate mit einander multiplicirt hätte, wie es Jamblichus auch vorschreibt, der an ein Multipliciren von Quadratzahlen und an ein Wurzelausziehen mit keiner Sylbe denkt. Außerdem hat Tennulius vergessen zu erwähnen, daß die beiden geraden oder ungeraden Zahlen nicht beliebig zu nehmen sind, sondern einander zunächstliegende sein müssen.

Digitized by Google

Einheit ist das Grundelement bei der Erzeugung der Quadratzahlen ... Von ihr, wie aus der Schranke (ὕσπληγξ), geht man ursprünglich aus Behufs der Erzeugung irgend einer Quadratzahl, gewissermaßen bis zu dem Wendepuncte der Bahn (καμπτήρ), der Seite des zu erzeugenden Quadrats, und wiederum geschieht die Rückkehr zu ihr, wie nach einem Ziele (νύσσα), indem man alle Zahlen und sie selbst (die Einheit) zertheilt (d. h. zweimal berührt), außer dem Wendepuncte, welcher die Seite des zu bildenden Quadrats ist."

Jamblichus hat sich also die Zahlen bildlich in Gestalt eines Circus hingestellt gedacht, den man durchlaufen muß, um die verlangte Quadratzahl zu erhalten, etwa, um ein Beispiel anzuführen, so:

(ὕσπληγξ) 1 ... 2 ... 3 ... 4 ... 5 ... 6 ..

7 (καμπτήρ)

(νύσσα) 1 ... 2 ... 3 ... 4 ... 5 ... 6 ..

p. 113. macht Jamblichus eine ähnliche aber nicht so glückliche Application dieser Rennbahn-Idee auf die Heteromekes. Diese unterscheiden sich von den Quadratzahlen aber in folgenden Puncten: 1) daß sie nicht zu demselben Ziele, der Einheit, zurückkehren, von dem sie ausgegangen sind, sondern bei der Zwei aufhören, und 2) daß bei ihnen der Wendepunct nicht auf einer Zahl, sondern auf zweien, nämlich ihren beiden Factoren beruht, daß also diese beiden nur einmal gesetzt werden dürfen; das heißt, wissenschaftlich ausgedrückt, $a\,(a+1)$ ist gleich der Summe der Zahlen von 1 bis $(a+1)$ plus der Summe der Zahlen von $(a-1)$ bis 2; und bildlich dargestellt giebt es eine Circusruine dergestalt

1 ... 2 ... 3 ... 4 ... 5 ..

6

7

2 ... 3 ... 4 ... 5 ..

Es ist dieses eine zu weite Ausspinnung des ganz angenehmen Witzes über die Quadratzahlen, um die sich allerdings schon Mancher müde gejagt und gerechnet hat, ohne gerade immer bis an die νύσσα zu gelangen.

Digitized by Google

Pag. 124 — 126 enthalten Bemerkungen, welche eine etwas tiefere Einsicht in das Decimalsystem verrathen, indem hier die Potenzen von 10 als ebenso viele Einheiten höherer Ordnungen erscheinen. Ich will die Stelle, obgleich sie nach Jamblichus Manier in ihrer Weitläuftigkeit manchen unnützen Zusatz enthält, wörtlich übersetzen: „Eine bedeutende Auszeichnung bringt der Dekas die nach dem eben beschriebenen Doppellauf (*δίαυλος* ist eben jener Circus) angestellte Bildung der Quadratzahlen, wenn man in der ersten Zahlenstufe, welche die Zahl begrenzt, von der Einheit bis zu dieser fortschreitet, und wiederum von ihr, als einer Zahl, welche die Einer von den Zehnern absondert, zurück, gleichsam von einer Einheit zu einer andern. Es entsteht nämlich aus der Dekas, gleichsam durch Zusammenreihung [71]), die Quadratzahl 100, die ebenfalls ein Grenzglied ist zwischen den Zehnern und Hunderten, und von den Pythagoräern die Einheit des dritten Ganges (*μονὰς τριωδουμένη*) genannt wird, gleich wie die Zehn die Einheit des zweiten Ganges (*δευτερωδουμένη*). Die Seite des Quadrats 100 wird eben die 10 sein, und ihr Quadrat die Summe, welche entsteht, wenn man zu ihr alle vorhergehenden Zahlen, doppelt genommen, addirt (*καὶ δύναμις αὐτῆς τὸ συγκεφαλαίωμα τῆς ἐπὶ ταύτῃ ἐπιφωρείας τῶν ἐντὸς αὐτῆς ἀριθμῶν δὶς λαμβανομένων*). So nämlich gleicht, wie ich gesagt habe, diese Aneinanderreihung der Zahlen dem Wettlauf auf der Rennbahn, sowohl hinsichts des Auslaufens von dem Anfange, gleichsam aus der Schranke, als auch hinsichts der Rückkehr von der Säule, gleichsam von dem Wendepfeiler. Wenn wir aber die Dekas nicht mehr als Wendepfeiler, sondern als Schranke gebrauchen, und der Anfang des Auslaufs von ihr bis zur Hekontas geschieht, von welcher wir wiederum bis zur Dekas zurückgehen, so geht aus der Addition als erste Zahl (? *ὁ πρῶτος ἀριθμὸς* ?) die Einheit des vierten Ganges (*τετρωδουμένη μονάς*) hervor, welche ebenfalls ein Grenzglied zwischen

---

71) Im Texte steht: *ἔσται γὰρ ἐκ τῆς, ὡς ἀποσυνθέσεως τετράγωνος ϙ ὁ ἀριθμός.* Vielleicht ist zu lesen: *ἔσται γὰρ ἐκ τῆς ι* (d. i. *δεκάδος*) *ὡς ἀπὸ συνθέσεως ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς ϙ.* Daß Tennulius auch so gelesen, die abgedruckten Worte also nur Druckfehler sind, scheint seine Übersetzung anzudeuten: Ex *denario* enim tanquam compositione orietur numerus quadratus 100. Es wäre demnach nur im Drucke das *ι* zu einem Komma geworden, und die Worte *ἀπὸ συνθέσεως* in eins zusammengelaufen.

Digitized by Google

den Hunderten und Tausenden ist (im Texte μυριάδων fehlerhaft für χιλιάδων), aber die Quadratwurzel der Zahl 1000 ist nicht 100; denn 1000 ist gar keine Quadratzahl, sondern ein Kubus von der Seite 10. Um sie aber in der Ebene als Parallelogramm (προμηκικῶς) darzustellen, werden ihre Seiten 100 und 10 sein, so daß es klar ist, daß die Hundert noch der Zehn bedarf, um eine Seite zu werden, (mystisch). Wenn wir wiederum von der Hundert als Schranke ausgehen und die nach ihr folgenden Hunderter addirend bis zu 1000 fortschreiten und von da als Wendepunct ebenso wieder bis zu 100 als Ziel zurückgehen, so ist die Summe 10000 eine Einheit des fünften Ganges (πεντωδουμένη μονάς), die als Quadrat die Seite 100, als Parallelogramm die Seiten 1000 und 10 hat. So bedarf die Zehn, um in dieser Nachahmung des Wettlaufs Seitenzahl zu werden, keiner der übrigen Grenzglieder, ich meine der Hundert oder der Tausend; diese dagegen, damit ihnen dasselbe zu Theil werde (damit sie Seitenzahlen werden), bedürfen durchaus der Zehn; daher ertheilen wir gerade ihr dieses Lob."

Es ist also bildlich dargestellt

1—2—3—4—5—6—7—8—9
10 = 100 = 10 · 10
1—2—3—4—5—6—7—8—9

10–20–30–40–50–60–70–80–90
100 = 1000 = 100 · 10
10–20–30–40–50–60–70–80–90

100-200-300-400-500-600-700-800-900
1000 = 10000 = 100·100
100-200-300-400-500-600-700-800-900 = 1000·10.

Jamblichus scheint nicht bemerkt zu haben, daß dieselbe Erscheinung sich bei jeder andern Zahl zeigt, und daß sie nur insofern ein eigenthümliches ἐγκώμιον der Zehn ist, als deren Potenzen die Grenzen in der Reihe der gewöhnlichen Zahlensysteme abgeben. Denn da die Summe der Zahlen von 1 bis a und von da zurück bis 1 gleich a^2 ist, so ist nothwendig dieselbe Summe, wenn man jedes Glied mit a multiplicirt, das heißt, wenn man von a die Vielfachen durchlaufend bis a^2 und von da bis a zurückgeht, gleich a^3 u. s. w.

u. ſ. w. So iſt z. B. der Kubus 125 aus der Summation folgender Rennbahn entſtanden:

5 . . . 10 . . . 15 . . . 20 . .
.
.
25
.
5 . . . 10 . . . 15 . . . 20 . .

was ganz daſſelbe iſt, als wenn ich die Summe der Rennbahn

1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . .
.
.
5
.
1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . .

welche gleich 25 iſt, mit 5 multiplicire.

Indeß wird Jamblichus durch dieſe Darſtellung der Zehn und ihrer Potenzen als Einheiten höherer Ordnungen auf folgenden hübſchen Satz geführt (p. 145. 146): Wenn man die drei Zahlen 1, 2, 3 zu einander addirt, ſo erhält man die Summe 6. Dieſelbe Summe erhält man durch die Addition jeder folgenden Copulation von drei Zahlen, ohne eine zu überſpringen oder doppelt zu nehmen, wenn man immer ſtatt der Zehner ihre entſprechenden Einer ſetzt, oder die Zehn als eine Einheit höherer Ordnung betrachtet, was Pythagoras, wie oben erwähnt, gethan hat. (Επεὶ δὲ ἑξάδος ἀποτελεστική ἐστιν ἡ πρώτη παρ' οὐδὲν ἀπὸ μονάδος συζυγία, ἡ πρώτη $\overline{\alpha}$. $\overline{\beta}$. $\overline{\gamma}$ εἰδοποιήσει τὰς ἑξῆς αὐτῇ, μηδενὸς ὅρου κοινοῦ λαμβανομένου, μηδὲ μὴν παραλλειπομένου, ἀλλὰ μετὰ τὴν $\overline{\alpha}$. $\overline{\beta}$. $\overline{\gamma}$ λαμβανομένης τῆς $\overline{\delta}$. $\overline{\varepsilon}$. $\overline{\varsigma}$, εἶτα $\overline{\zeta}$. $\overline{\eta}$. $\overline{\vartheta}$ καὶ ἑξῆς ἀκολούθως. Πᾶσαι γὰρ αὗται ἑξάδες γενήσονται, μεταλαμβανούσης τὸν μονάδος τόπον ἀεὶ τῆς δεκάδος, τουτέστιν, εἰς μονάδα ἀναγομένης). Wir würden den Satz ſo ausdrücken: Wenn man drei aufeinander folgende Zahlen, deren größte durch 3 theilbar iſt, zu einander addirt, von der Summe die Ziffernſumme, von dieſer Ziffernſumme abermals die Ziffernſumme nimmt, und ſo fort, ſo kommt man endlich immer einmal auf eine Ziffernſumme, welche 6 iſt. Z. B.

$$997 + 998 + 999 = 2994$$
$$2 + 9 + 9 + 4 = 24$$
$$2 + 4 = 6$$

Digitized by Google

Solche Vorstellungen waren für die Griechen umständlicher und schwieriger, als für uns, weil sie das Bild unserer Ziffern nicht vor dem Auge und im Sinne hatten, sondern wirklich erst eine Umgestaltung der Zehn zu einer Einheit vornehmen mußten, indem sie $\overline{\alpha}$ statt $\overline{\iota}$, $\overline{\beta}$ statt $\overline{\kappa}$ u. s. w. setzten.

Als Privatansicht des Jamblichus führe ich nur noch an, daß er die Zahl 2 für keine Primzahl hält. Er sagt nämlich p. 42: *Καὶ ταῦθα δὲ ὁ Ευκλείδης προδηλότατον ἁμάρτημα παρέχει, τὴν δυάδα τῶν πρώτων καὶ ἀσυνθέτων οἰόμενος εἶναι, ἐπεὶ μονάδι μόνῃ μέτρῳ χρῆται, ἐκλελησμένος, ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἀρτίου εἴδους ἐστίν.* „Auch hier legt Euklides einen ganz augenscheinlichen Irrthum an den Tag, indem er die Zwei für eine Primzahl hält, weil ihr einziges Maaß die Einheit ist, und übersehen hat, daß sie zu der Klasse der geraden Zahlen gehört." Nach Nikomachus I, 11 aber gehören, wie wir oben gesehen haben, die Primzahlen zu den ungeraden. Hier müssen wir denn aber doch den Vater Euklides gegen Jamblichus in Schutz nehmen.

Aber es ist Zeit, diesen Gegenstand zu verlassen. Wir sind nachgerade in eine Periode gerathen in welcher wichtigere Dinge unsrer warten, nämlich in das muthmaßliche Zeitalter Diophants, und ich will nicht länger säumen den Leser in die Darstellung zunächst der äußern Schicksale dieses in jeder Beziehung merkwürdigen Mathematikers und seines berühmten Werkes einzuführen. Aus einem doppelten Grunde dagegen lasse ich alle späteren Griechischen Arithmetiker alten Styls hier unberührt, einestheils, weil seit dem vierten Jahrhundert in Griechenland nichts mehr ist erfunden worden, und die späteren Werke immer mehr zu bloßen Compilationen schon bekannter Sachen aus älteren Werken herabsinken, andrerseits aber, weil ich überhaupt die Geschichte der Griechischen Arithmetik hier nur aus dem Gesichtspuncte aufgefaßt habe, insofern die Diophantische Algebra auf sie als Vorarbeit sich gründet. Darum jetzt genug davon.

Digitized by Google

Sechstes Kapitel.

Historisches über Diophantus und seine Schriften.

Trotz des allgemeinen Interesses, dessen das Werk Diophant's seit dem ersten Augenblicke seines Wiedererscheinens in Europa sich bei allen Mathematikern zu erfreuen hatte, ist es bis jetzt weder gelungen, das über dem Zeitalter und den äußern Lebensverhältnissen des Verfassers verbreitete Dunkel zu zerstreuen, noch hat man vermocht, den Inhalt seines Werks, welches von den übrigen mathematischen Schriften der Griechen so ganz abweichend ist, mit den frühern Erzeugnissen dieser Nation in einen innern wissenschaftlichen Zusammenhang zu bringen. So sehr wir indeß den erstgenannten Mangel bedauern, so wenig Grund haben wir uns über dieses Dunkel, in welches die Person des Verfassers gehüllt ist, zu wundern. Aus demselben Grunde nämlich, aus welchem es geschah, daß Diophant gerade der letzte der Griechischen Mathematiker ist, der den Europäern nach dem Wiederaufblühen der Wissenschaft bekannt wurde, aus demselben Grunde, sage ich, war er der erste, den seine Landsleute vergaßen, und ist ihnen eigentlich immer verborgen geblieben, so daß sie uns keine Notiz über ihn hinterlassen haben. Und dieser Grund ist bei den Einen wie bei den Andern kein anderer als der, daß man sein Werk nicht verstand. Euklid's Elemente haben sich in hundert und abermals hundert Abschriften erhalten, von Apollonius Kegelschnitten sind nicht zufällig gerade die letzten vier Bücher verloren gegangen, sondern darum, weil sie zu schwer waren; und indem wir bedauern, daß das Werk Diophant's in so wenigen noch überdies unvollständigen und uncorrecten Exemplaren auf unsere Zeit gekommen ist, können wir uns auf der andern Seite gratuliren, daß wir überhaupt irgend etwas von ihm dem allgemeinen Schiffbruche abgewonnen haben.

Digitized by Google

Die Zweifel über Diophant beginnen, wie Cossali [1]) geistreich bemerkt, bereits bei der letzten Sylbe seines Namens. Man weiß nicht recht, ob er Διόφαντος oder Διοφάντης geheißen. Die Manuscripte zeigen den Namen nur im Genitiv, Διοφάντου, der die Endung des Nominativs unbestimmt läßt. In den Ausgaben von Suidas Wörterbuch steht in dem Artikel Ὑπατία, auf den wir sogleich noch einmal zurückkommen werden, der Accusativ Διοφάντην, aber Bachet [2]) versichert, daß zwei vorzügliche Pariser Handschriften Διόφαντον lesen. Außerdem hat Suidas den Artikel Διόφαντος, ὄνομα κύριον, nicht aber Διοφάντης; in einem dritten Artikel dagegen, Λιβάνιος, wo der Name Diophant auch vorkommt, steht wieder der unglückliche Genitiv. Dazu kommt, daß uns mehre Männer im Alterthum mit Namen Diophantos bekannt sind, aber kein einziger Diophantes, wenn auch nicht, wie Bachet am angeführten Orte fälschlich behauptet, Διοφάντης eine ungriechische Form ist; man braucht gegen diese Behauptung nur an Συκοφάντης, Ἱεροφάντης etc. zu erinnern. Ich will hier noch folgendes erwähnen. Als Autorität für die Form auf της wird häufig Pococke in seiner Übersetzung der Geschichte der Dynastien von Abulfaraj angeführt, wo er allerdings zweimal **Diophantes** schreibt. Man hätte aber statt dessen besser gethan, das daneben gedruckte Original zu berücksichtigen. Abulfaraj erwähnt unsern Autor zweimal, einmal p. 141, wo er ديوفنطس (דיופנטס) schreibt, also die letzte Sylbe in dubio läßt, das zweitemal p. 388, wo er ganz unzweifelhaft ديوفنطوس (דיופנטוס) schreibt. Demnach ist Abulfaraj gerade umgekehrt eine Autorität für die Form Diophantos, und das um so mehr, als auch die Lesart ديوفنطس, obgleich sie den Vocal der letzten Sylbe nicht ausdrückt, doch immer mehr auf die Griechische Endung ος, als auf die Endung ης deutet, welche letztere die Araber gern durch يس (îs) wiedergeben [3]). Der Verfasser der **Biblio-**

---

1) Origine dell' Alg. T. 1. p. 61. Su la desinenza del nome comincia la diversità tra gli scrittori.

2) Dioph. Alex. Arithm. Paris. 1621. — Epist. ad Lect. p. 1.

3) So heißt z. B. Nikomachus نيقوماخس Abulf. p. 94. نيقومخس Casiri I. p. 390; ebenso Augustus اغسطس Paulus neues Repert. I. 152. Autolykus اوطولوقس Aristarchus ارسطرخس Garz de interprett. Eucl.

Digitized by Google

theca philosophorum bei Casiri [4]) schreibt, wie Abulfaraj an der ersten Stelle, ديوفنطس. Unter den älteren Autoritäten ist noch Bombelli zu nennen, der in der Vorrede seiner 1572 herausgegebenen Algebra Italienisch **Diofante** schreibt, also Griechisch Διοφάντης voraussetzt. Aber Xylander schreibt **Diophantus**, ebenso Bachet, und diese muthmaßlich richtige Form des Namens hat denn auch in neuern Zeiten den vollkommensten Sieg über ihre Nebenbuhlerin davongetragen.

Wichtiger sind die Untersuchungen über Diophant's Zeitalter. Ohne Angabe eines Motivs setzt ihn Abulfaraj in die Regierungszeit des Kaisers Julianus Apostata (361—363), eine Annahme über welche wir weiter unten mehr sagen werden. Ebenso willkührlich läßt Bombelli ihn unter Antoninus Pius (138—161) leben, und obgleich man auch das Fundament dieser Annahme nicht kennt, so haben sich doch Bombelli's Ansicht Jacob de Billy, Blancanus, Vossius, Dechales, Heilbronner und Andere angeschlossen. Bachet hält unsern Autor für identisch mit einem Astrologen dieses Namens unter Tiberius (14—37), den Lucillius in einigen Gedichten der Anthologie lächerlich macht; aber auch diese Annahme ist willkührlich, indem sie sich bloß auf die Gleichheit des bei den Griechen nichts weniger als ungewöhnlichen Namens stützt; dagegen ist die Annahme der Indentität unseres tiefen Mathematikers mit jenem elenden lächerlichen Astrologen des Ersteren unwürdig [5]). Stevin

---

Arab. p. 2. Hipparchus ابرخس Casiri I. 345. (woraus die sonderbare in ältern aus Arabischen Quellen geflossenen astronomischen Schriften sich findende Verstümmelung Abrachis entstanden ist). Dagegen heißt Archimedes ارشيميديس, Empedokles امبيذقليس, Aristoteles ارسطوطاليس Abulf. p. 50. 64. u. s. w. Eine große Consequenz muß man indeß hierin nicht suchen; Euklides heißt immer (ohne i) اقليدس oder اوقليدس, und so manche andere. Sonderbar entstellt findet man den Namen unsers Autors in Bauer's Übersetzung des Abulf. Th. 1. S. 129., nämlich in Diophantra, ohne daß diese Schreibart in dem zahlreichen Druckfehlerverzeichnisse als solcher aufgeführt wäre. Dagegen schreibt Bauer an der zweiten Stelle richtig, dem Arabischen Texte, nicht Pococke, folgend, Diophantus. II, 92.

4) T. 1. p. 371. 434.

5) Über alle diese erwähnten Angaben vergleiche *Abulfar.* hist. dyn. p. 94. — *R. Bombelli* Algebra praef. — *J. Blancanus*, chron. Math. p. 51. — *G. J. Vossius* de univers. Math. nat. et const. p. 432. — *Bachet* Dioph.

Digitized by Google

endlich ſetzt ihn gar nach Mohammed ben Muſa, dem bekannten Arabiſchen Algebriſten im Anfange des neunten Jahrhunderts [6]). Wollen wir es über uns nehmen, in dieſen bunten Wirrwarr einiges Licht zu bringen, ſo müſſen wir uns durchaus vorher nach neuen Elementen zur Beſtimmung des möglichen Zeitalters unſeres Autors umſehen, deren wir zum Glücke nicht ganz entblößt ſind. Zunächſt kommt uns für den Augenblick ſehr willkommen das einzige Citat eines früheren Mathematikers, welches in Diophant's Schriften ſich findet, nämlich des Hypſikles im achten Satze der Schrift über die Polygonalzahlen. Leider aber kennen wir auch das Alter des Hypſikles nicht genau. Er iſt jedenfalls jünger als Apollonius, den er in der Vorrede zu ſeiner Schrift über die regelmäßigen Körper, welche gewöhnlich fälſchlich als das vierzehnte und funfzehnte Buch der Euklidiſchen Elemente erſcheint, citirt. Ferner nennt Hypſikles im fünften Satze des zweiten (funfzehnten) Buchs ſeinen Lehrer Iſidorus, in Ausdrücken, die auf einen berühmten Mann dieſes Namens ſchließen laſſen [7]), und dieſer Umſtand macht es nicht unwahrſcheinlich, daß der hier genannte Iſidorus einerlei ſei mit demjenigen, von dem Suidas unter dieſem Artikel ſagt: Ἰσίδωρος φιλόσοφος ος ἐφιλοσόφησε μὲν ὑπὸ τοῖς ἀδιλφοῖς, εἴπερ τις ἄλλος, ἐν τοῖς μαθήμασιν. Was ſoll die Redensart heißen: ὑπὸ τοῖς ἀδιλφοῖς? Fabricius [8]) macht hier die zwar gewagte, aber nicht ganz verwerfliche Conjectur, Iſidorus habe unter den beiden gemeinſchaftlich

---

Arithmet. epist. ad Lectoram. — *Cossali* origine T. 1. p. 62—65. — O. Schulz Dioph. arithm. Aufg. Vorr. S. V—XV. — *Heilbronner* hist. math. p. 338—340. — *Montucla* hist. des Math. T. 1. p. 320. — *Dechales* curs. Math. T. 1. p. 30. — *Frobesii* introd. in math. p. 126. — Chr. Wolff kurzer Unterr. v. math. Schriften S. 34. u. ſ. w.

6) S. Les Oeuvres Mathem. de *Sim. Stevin*, augm. par Alb. Girard. Leyden. 1634. fol. T. 1. p. 62. Stevin nennt hier unter der Überſchrift: Des inventeurs de ces reigles de trois des quantitez Mohammed ben Muſa den Erfinder der quadratiſchen Gleichungen, und fügt dann hinzu: Quant à Diophant, il semble qu'en son temps les inventions de Mahomet ayent seulement esté cognues, comme se peult colliger de ses six premiers livres.

7) Er ſagt nämlich: ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον.

8) Bibl. graeca T. II. p. 91. — Ed. Harles. T. IV. p. 20.

Digitized by Google

die Kaiserwürde bekleidenden Brüdern Antoninus Philosophus und Lucius Verus, also etwa in den Jahren 161 bis 180 unserer Zeitrechnung gelehrt, so daß wir also seinen Schüler Hypsikles etwa gegen das Jahr 200 placiren könnten; eine Annahme, die zwar wegen der zweideutigen Ausdrucksweise bei Suidas und der nicht strenge erwiesenen Identität des von diesem genannten Isidorus mit dem Lehrer des Hypsikles keinesweges objectiv sicher, aber doch möglich ist, und die durch einen innern Grund unterstützt wird. Hypsikles ist nämlich, nach Diophant's Aussage, der Urheber eines Satzes, den wir in etwas unvollkommener Gestalt aber schon bei Nikomachus und bei Theon von Smyrna antreffen, des Satzes nämlich von der Bildung der Polygonalzahlen durch die Summirung arithmetischer Progressionen; die beiden Umstände nun, einerseits, daß Hypsikles den Satz des Nikomachus verbessert giebt, andrerseits, daß der so gewissenhaft citirende Theon (Nikomachus citirt selten) Hypsikles nicht nennt, lassen mit einiger Gewißheit schließen, daß Hypsikles jünger ist, als die beiden genannten Mathematiker; nun lebte Theon, wie wir oben gesehen haben, unter Hadrian, ums Jahr 130; demnach stimmt dieses Argument auf eine auffallende Weise mit der von Fabricius auf einem völlig abweichenden Wege gewonnenen Conjectur überein.

Noch schlimmer stand es bisher um die Feststellung der zweiten Grenze für die Bestimmung von Diophant's Zeitalter, für welchen Zweck man fast ausschließlich eine Stelle in dem oben erwähnten Artikel Ὑπατία aus dem Lexicon des Suidas verwandte. Es heißt hier nämlich: Ὑπατία ἡ Θέωνος τοῦ Γεωμέτρου συγάτηρ τοῦ Ἀλεξανδρέως φιλοσόφου καὶ αὐτὴ φιλόσοφος, καὶ πολλοῖς γνώριμος· γυνὴ Ἰσιδώρου τοῦ φιλοσόφου· ἤκμασεν ἐπὶ τῆς βασιλείας Ἀρκαδίου· ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διοφάντην τὸν ἀστρονομικόν. Κανόνα εἰς τὰ κωνικά· Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. Ganz augenscheinlich aber ist diese Stelle von ἔγραψεν an corrumpirt, obgleich alle Ausgaben, die ich verglichen habe, gleichförmig lesen. Erstens giebt Διοφάντην τὸν ἀστρονομικόν keinen Sinn; ein Astronom heißt nicht ἀστρονομικός sondern ἀστρόνομος. Was sollen ferner die Worte, κανόνα εἰς τὰ κωνικά· Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα, eine Tabelle (oder ein Verzeichniß) zu den Kegelschnitten und einen Commentar des Appollonius, sagen? Die unpassende Ausdrucksweise dieser Stelle hat man schon längst gefühlt, und daher haben einige Herausgeber, ohne daß sie den Text zu ändern wagten, so zu

Digitized by Google

interpungiren vorgeschlagen: ὑπόμνημα εἰς Διοφάντην· τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα· εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. „Einen Commentar über Diophant; die astronomischen Tafeln; einen Commentar über die Kegelschnitte des Apollonius." Dieser Sinn wäre allerdings schon viel besser, als der durch die Manuscripte dargebotene, und in dieser Form wird die Stelle des Suidas dann auch ziemlich allgemein als ein testimonium de Diophanto angeführt. Nun wurde Hypatia im Jahre 415 zerrissen, demnach hätte Diophant spätestens um das Jahr 400 gelebt; und so wird die Grenze fast in allen Geschichtsbüchern auf Autorität dieser Stelle hin angenommen, selbst von dem gründlichen und gelehrten Cossali [9]). Indeß ist auch an dieser Correctur des Textes noch mancherlei auszusetzen. Erstens ist der Ausdruck ὑπόμνημα εἰς Διοφάντην, „ein Commentar zum Diophant," ganz ungriechisch; der Grieche nennt nicht, wie wir in den Schulen von unserm Scheller, Passow, Zumpt u. s. w. zu sprechen gewohnt sind, das Buch schlechthin bei dem Namen seines Verfassers. Es würde jedenfalls, wenn unser Arithmetiker gemeint wäre, heißen ὑπόμνημα εἰς Διοφάντου ἀριθμητικά. Sodann deutet der Ausdruck τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα darauf hin, daß die astronomischen Tafeln der Hypatia allgemein bekannt und namentlich noch zu Suidas Zeit in Gebrauch gewesen seien. Wir haben aber keine einzige anderweitige Nachricht nur für das einstige Vorhandensein solcher Tafeln, geschweige denn, daß sich dieselben sechshundert Jahre im Gebrauche erhalten hätten. Gegentheils wissen wir mit Bestimmtheit, daß seit Ptolemäus Zeiten kein anderes astronomisches Werk mehr aufgekommen ist. Demnach ist es wohl keine Frage, daß die Küstersche Conjectur [10]) vor jener bedeutend den Vorzug verdient, welche so zu lesen vorschlägt: ὑπόμνημα εἰς Διοφάντου τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα· εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. Dadurch werden Hypatia's Schriften auf einen Commentar über Diophant's astronomische Tafeln, und auf einen Commentar über Apollonius Kegelschnitte reducirt. Auf diese Lesart hat, soweit dieselbe für die Bestimmung von Diophant's Zeitalter von negirender Wichtigkeit ist, meines Wissens erst ein einziger Schrift-

9) Origine T. I. p. 62.

10) Suidae Lexicon etc. ill. Ludolphus Kusterus. Cantabrigiae. 1705. III. Tomi. fol.

Digitized by Google

ſteller Rückſicht genommen, nämlich der verdiente Otto Schulz in ſeiner unten zu nennenden Überſetzung Diophants [11]). Indem wir nämlich mit Hilfe dieſer wahrſcheinlich richtigen Conjectur Küſter's über die Schriften der Hypatia ins Klare kommen, gerathen wir dadurch gleichzeitig in Betreff Diophant's wieder ganz ins Dunkle. Denn indem nun von einem aſtronomiſchen Werke Diophant's die Rede iſt, wird es wahrſcheinlich, daß nicht unſer Arithmetiker, ſondern ein ganz anderer Mann gleichen Namens hier gemeint ſei, und wir ſehen uns genöthigt dieſes lange mit Freuden ergriffene und feſtgehaltene Zeugniß über unſern Autor ganz fallen zu laſſen.

Aber wir können dieſes Pſeudozeugniß des Suidas auch ohne alle Beſorgniß und Gefahr aufgeben, da wir ein viel wichtigeres und vollgültigeres für unſern Auctor aufzuſtellen vermögen. Es war mir nämlich, als ich den Commentar des Theon von Alexandrien, des Vaters der eben erwähnten Hypatia, über die Μεγάλη σύνταξις las, nicht wenig überraſchend, dort bald am Anfange unſern Diophant citirt zu finden. Mein Befremden ſtieg aber noch, als ich wirklich in einigen mathematiſch-hiſtoriſchen Werken dieſes Citat erwähnt, und dennoch für die hiſtoriſche Kritik ganz unbenutzt gelaſſen fand. Schon der älteſte Hiſtoriker der Mathematik aus neuerer Zeit, Peter Ramus, ſchreibt im erſten Buche ſeiner Scholae Mathematicae p. 37. ſo: ***Diophantus,*** **cujus sex libros, cum tamen author ipse tredecim polliceatur, graecos habemus de arithmeticis admirandae subtilitatis artem complexis, quae vulgo Algebra arabico nomine appellatur: cum tamen ex authore hoc antiquo *(citatur enim a Theone)* antiquitas artis appareat. Scripserat et Diophantus harmonica.** Woher kommt es, daß man dieſes **citatur enim a Theone** gar nicht berückſichtigt hat? Wahrſcheinlich daher, wird man ſagen, weil Ramus nicht geleſen worden iſt. Aber wir gehen weiter. Montucla kennt das Citat bei Theon, freilich in mancher Beziehung falſch, indem er ſchreibt [12]): **Théon cite une autre ouvrage de cet analyste, où il étoit question de la pratique de l'arithmétique. Je soupçonnerois que c'étoit-là qu'il expliquoit plus au long les règles de sa nouvelle arithmétique, sur quoi il ne s'étoit pas**

11) Vorrede S. VII. VIII.

12) Hist. T. 1. p. 322. Unten als Note: Comm. in Alm. l. 5.

Digitized by Google

assez étendu au commencement de ses questions. Ehe wir von den Fehlern, die Montucla hier begeht, ſprechen, will ich noch erwähnen, daß dieſe Stelle, die nur beweiſt, daß dieſer Hiſtoriker mit gewohnter Flüchtigkeit ſich begnügt hat, den Namen Diophantus in Theons Texte zu leſen, wörtlich überſetzt wieder erſcheint in Roſenthals Encyclopädie der reinen Mathematik Bd. 3. S. 195: „Theon führt noch ein ander Werk von dieſem Analyſten an, wo die Frage von der arithmetiſchen Praktik war. Vermuthlich entwikkelte er da die Regeln ſeiner neuen Arithmetik weitläuftiger, über welche er ſich im Anfange ſeiner Quäſtionen nicht genug ausgelaſſen hatte.“ Und ſicher eine zweite Reproduction dieſes Montucla'ſchen Irrthums iſt die Notiz in Klügel's Wörterbuch [13]): „Diophantus hat außer ſeinem großen arithmetiſchen Werke auch ein Werk über die praktiſche Arithmetik geſchrieben, das aber verloren iſt.“ Wunderbar bleibt es mir immer, daß Coſſali von dieſem durch Montucla, um Ramus nicht zu gedenken, ihm dargebotenen Winke gar keine Notiz nimmt [14]). Unterſuchen wir nun den wahren Stand der Sache, ſo ſteht, um von dem Unweſentlichen zu beginnen, die hiehergehörige Stelle nicht im fünften, wie Montucla citirt, ſondern im erſten Buche des Theon'ſchen Commentars, Seite 40. der Baſeler Ausgabe von 1538 [15]). Weſentlicher aber iſt der Umſtand, daß Theon nicht irgend ein anderes Werk von Diophant über praktiſche Arithmetik, ſondern gerade das uns vorliegende citirt, ſo daß über die Identität des Auctors gar kein Zweifel obwalten kann. Allerdings ſteht das Citat in demjenigen Abſchnitte des Theon'ſchen Commentars, in welchem er die Regeln für die Praxis der Sexageſimalrechnung lehrt, aber Theon macht blos eine Analogie zwiſchen der μονάς bei Diophant und der μοῖρα in Ptolemäus Syſtem. Wie die μονάς, ſagt er, die Zahl, welche ſie multiplicirt, unverändert läßt,

13) Bd. I. S. 177. Artikel: Arithmetik.

14) Oder ſollte die fragliche Stelle vielleicht erſt in die zweite Auflage der Montucla'ſchen Geſchichte eingerückt ſein, die Coſſali noch nicht kannte. Ich habe die erſte Auflage nicht vergleichen können.

15) Dieſes falſche Citat iſt Schuld daran, daß Schulz die Stelle bei Theon nicht hat auffinden können, worüber er ſich Vorr. S. XX. (Note) beklagt. Der gelehrte Überſetzer unſers Auctors macht daher die unrichtige Hypotheſe, daß unter dem von Theon citirten Werke vielleicht die Porismen zu verſtehen ſeien.

Digitized by Google

ſo läßt die μοιρά das εἶδος, in welches ſie multiplicirt wird, unverändert. Die Stelle lautet wörtlich ſo: ἡ μὲν οὖν μοιρά ἐν τοῖς κατ' εἶδος πολλαπλασιασμοῖς μονάδος τάξιν ἐπέχουσα, ἀμεταθέτός ἐστιν, ὅνπερ γὰρ τρόπον ἡ μονὰς ἐπὶ τὸν τρία ἀριθμὸν, λόγου χάριν, πολλαπλασιασθεῖσα, αὐτὸν τὸν τρίτον ἀριθμὸν φυλάττει, καὶ ἐπὶ τὸν τέταρτον αὐτὸν τὸν $\overline{\delta}$, καὶ ἐπὶ τὸν $\overline{\eta}$ αὐτὸν τὸν $\overline{\eta}$, καθὰ καὶ Διόφαντός φησιν ὅτι τῆς μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης καὶ ἑστώσης πάντοτε, τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται, τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἡ μοιρὰ ἐφ' ὃ ἂν εἶδος πολλαπλασιασθῇ, αὐτὸ τὸ εἶδος φυλάττει. Dieſe hier ausgezeichneten Worte ſind nichts anderes als die wörtliche ſechſte Definition nach der Bachet'ſchen Ausgabe des Diophant, mit der einzigen kleinen Variante, daß wo hier πάντοτε bei Bachet das ſynonyme ἀεὶ ſteht. Einige Zeilen weiter kommt der Name Diophant's noch einmal vor, aber ohne Anführung einer beſtimmten Stelle, weshalb ich die Worte nicht abſchreibe.

Somit haben wir ein bisher unbeachtet gelaſſenes und unbenutztes ganz ſicheres und unumſtößliches Zeugniß für Diophant, welches als ſpäteſte Grenze ſeiner Lebenszeit die zweite Hälfte des vierten Jahrhunderts feſtſtellt. Theon lebte nämlich unter Theodoſius dem Großen (379—395) [16]), Diophant alſo jedenfalls etwas früher. Halten wir uns nun in Bezug auf Hypſikles an die Conjectur von Fabricius, ſo behalten wir als mögliches Zeitalter Diophant's nicht mehr als die anderthalb Jahrhunderte etwa zwiſchen den Jahren 200 bis 350 oder etwas weniges ſpäter, und es ſteht nun die Angabe bei Abulfaraj, daß Diophant unter dem Kaiſer Julianus Apoſtata gelebt habe, nicht ſo ganz unwahrſcheinlich da. Aber geſetzt auch, Hypſikles wäre um einige Jahrhunderte älter, da ſich mit vollkommener Sicherheit nur beſtimmen läßt, daß er nach Apollonius gelebt hat, ſo können wir doch darum das Zeitalter Diophant's nicht willkührlich weiter hinaufſchieben. Diophant muß in

16) Suidas ſagt: Θέων ὁ ἐκ Μουσείου, Λιγύπτιος, φιλόσοφος, σύγχρονος δὲ Πάππῳ τῷ φιλοσόφῳ καὶ αὐτῷ Ἀλεξανδρεῖ· ἐτύγχανον δὲ ἀμφότεροι ἐπὶ Θεοδοσίου βασιλέως τοῦ πρεσβυτέρου· ἔγραψε Μαθηματικά· Ἀριθμητικά etc. Und unter Pappus: Πάππος Ἀλεξανδρεύς, φιλόσοφος γεγονὼς κατὰ τὸν πρεσβύτερον βασιλέα Θεοδόσιον, ὅτε καὶ Θέων ὁ φιλόσοφος ἤκμαζεν, ὁ γράψας εἰς τὸν Πτολεμαίου κανόνα.

Digitized by Google

der Zeit gelebt haben, als die Mathematik der Griechen bereits ihren Grabesgang zu gehen anfing. Nur daraus läßt sich das für die Fortbildung der Griechen moralische Nichtvorhandensein seines Werks erklären. Hätte Diophant in einer frühern Periode gelebt, als der wissenschaftliche Geist des Volks noch regbarer und empfänglicher war, wie hätte da ein Werk, welches der Wissenschaft einen so ganz neuen Schwung zu geben geeignet war, so völlig unbeachtet und einflußlos bleiben können. Denken wir nur an den ungeheuern und fortdauernden Einfluß, den das viel weniger bedeutende Werk von Nikomachus auf die geistige Thätigkeit der Griechen ausgeübt hat. Setzen wir aber Diophant in die Mitte, oder gar gegen das Ende des vierten Jahrhunderts, so wird seine isolirte Stellung zur Griechischen Mathematik dadurch vollkommen erklärt [17]).

Nun ist er der letzte selbstständig schaffende Geist in der Reihe der Mathematiker seiner Nation. Er steht bereits in der Zeit der Commentatoren und Sammler, deren Auftreten auf die Bühne im-

---

17) Bossut würde sich wundern, wenn er diese Stelle meiner Geschichte läse; denn er kennt unzählige Griechische Commentare über Diophant. Er sagt nämlich I, 9: L'auteur a eu parmi les anciens *une foule* d'intreprètes, dont les ouvrages sont *la plupart* perdus. Nous regrettons, dans ce nombre, le commentaire de la célèbre *Hipathia* (sic!). Schade, daß ich Herrn Bossut nicht fragen kann, 1) woher er die Nachricht hat, und 2) welches denn die noch vorhandenen Commentare der Alten über Diophant sind, da doch, wie er sagt, nicht alle, sondern nur der größere Theil derselben verloren gegangen. Die einzige Nachricht, die wir vielleicht von einem alten Commentator über Diophant haben, ist die bereits gewürdigte Stelle bei Suidas. Außerdem ist nur eine Arbeit der Art bekannt, nämlich die Scholien des Maximus Planudes, die aber erst aus dem vierzehnten Jahrhundert herrühren. Das ist also die foule d'intreprètes parmi les anciens, nämlich ein einziger unter den Neuern. — Man verstehe mich übrigens nicht falsch, als wollte ich mit Diophant's Isolirung soviel sagen, daß er den Alten nicht bekannt gewesen sei. Ich habe nur seinen Einfluß auf die geistige Richtung des Volks und sein Einwirken auf die Fortbildung der Wissenschaft im Auge. Daß er den Griechen bekannt, und als großer Arithmetiker bekannt gewesen, beweist eine Stelle, die Vossius (de univ. math. nat. et const. p. 432) citirt, und die ich nicht habe nachschlagen können; Vossius sagt nämlich: Quanti jam olim habitus sit Diophantus, arguit, quod eum cum Pythagora conjungat *Joannes patriarcha Hierosolymitanus*, in vita Jo. Damesceni, ubi, cum Damasceni et Cosmae in Arithmeticis peritiam vellet extollere, hunc in modum ait (p. 683. ed Bas.) Ἀναλογίας δὲ Ἀριθμητικῆς οὕτως ἐξησκήσασιν εὐφοῶς, ὡς Πυθαγόρας καὶ Διόφαντος. Vergl. Schulz a. a. O. S. IX.

mer auf den wissenschaftlichen Ruin des Volks hindeutet. Die Mathematik wurde überhaupt nach seiner Zeit nicht mehr fortgebildet, darum konnte er auch keinen Einfluß auf die Fortbildung derselben mehr haben. Pappus und Theon sind die letzten großen Mathematiker der Griechen, und auch diese, für ihre Zeit zwar Heroen, treten weniger selbst schaffend als ordnend und erklärend auf. Dazu kommt noch, daß der falsche Christeneifer des Kaisers Theodosius ein Ereigniß herbeiführte, welches für die Mathematik, wie für die ganze Wissenschaft aller Zeiten von nie genug zu beklagendem Einflusse war, nämlich die Zerstörung der Bibliothek zu Alexandrien, wodurch dem bereits immer mehr und mehr zum Alltäglichen sich verflachenden Geiste der Gelehrten auch noch die äußeren Mittel zu ihrer wissenschaftlichen Ausbildung geraubt wurden. Dieser sonst energische und weise Regent nämlich, umgeben und verleitet durch orthodoxe Pfaffen, gab im Jahre 392 den unheilvollen Befehl zur Vernichtung aller heidnischen Tempel in dem ganzen Umfange seiner Herrschaft. Ein Opfer dieses Befehls ward auch der Serapistempel zu Alexandrien, in welchem sich seit der Einäscherung des Brucheions während der Belagerung Alexandriens durch Julius Cäsar, die große von den Ptolemäern gegründete und durch die Freigebigkeit der Römischen Kaiser vielfältig vermehrte Bibliothek befand; die der Wissenschaft unersetzlichen Schätze wurden ein Raub des fanatischen durch Priester angeführten christlichen Pöbels, desselben Pöbels, welcher drei und zwanzig Jahre später, im Jahre 415, von einem christlichen Bischofe, Cyrillus, angefeuert, die ebenso gelehrte als liebenswürdige, aber noch dem Heidenthum anhängende Hypatia auf öffentlicher Straße im eigentlichsten Sinne des Worts in Stücke zerriß und die Fetzen ihres Leichnams in allen Gassen der Stadt herumschleppte. Vergebens sind die Bemühungen gewesen, wenigstens eine dieser Gräuelthaten, die das Christenthum schänden, von demselben abzuwälzen, indem man die Zerstörung der Bibliothek dem Khalifen Omar, unter dessen Regierung am ersten Weihnachtstage des Jahres 640 Alexandria erobert ward, aufgebürdet hat. Denn schon Orosius, ein Schriftsteller des fünften Jahrhunderts, bezeugt, daß er die leeren Schränke der zerstörten Bibliothek gesehen habe [18]). Aber wir kehren zu Diophant zurück.

---

18) Orosii historii adv. paganos VI, 15: Extant quae et nos vidi-

Wenn ich aus innern wissenschaftlichen Gründen mich dafür entschieden habe, daß Diophant nicht vor der Mitte des vierten Jahrhunderts gelebt hat und daß dadurch die aus unbekannter Quelle geschöpfte Notiz des Abulfaraj Haltung gewinnt, so findet nun auch diese Angabe des Arabischen Historikers noch einen bedeutenden äußeren Stützpunct in einem Artikel bei Suidas. Wir lesen nämlich bei Letzterem: Λιβάνιος, Ἀντιοχεὺς, σοφιστὴς ἐπὶ τοῦ Ιουλιανοῦ τοῦ Παραβάτου χρόνων, καὶ μέχρι Θεοδοσίου τοῦ πρεσβυτέρου (Ed. Kusteri πρεσβύτου), Φασγανίου πατρὸς, μαθητὴς Διοφάντου. Was hindert uns, diesen Lehrer des Libanius, in völliger Übereinstimmung mit der Angabe bei Abulfaraj, für unsern Diophant zu halten? Etwa der Umstand, daß sich Libanius nicht auch als Mathematiker, sondern vorzüglich als Redner bekannt gemacht hat? Schwerlich wird Jemand einen solchen Einwurf, den Schulz mit Recht von seiner lächerlichen Seite auffaßt, im Ernste machen. Was für Schlüsse wollte man, mit diesem Grundsatze ausgerüstet, z. B. auf Aristoteles zu Wege bringen, der bekanntlich Lehrer Alexanders des Großen war? Aber ein anderer Einwurf ist dieser Zusammenstellung gemacht worden. Es haben nämlich Männer, wie Cossali und Colebrooke [19]) die Vermuthung ausgesprochen, daß Abulfaraj gerade auf Grund dieser Stelle bei Suidas, durch die Namengleichheit verleitet, dem Mathematiker Diophant seinen Platz unter den Zeitgenossen Julian's angewiesen habe. Aber mit Recht, wie es mir scheint, macht hier Schulz [20]) die gewiß treffende Gegenbemerkung, daß es nicht abzusehen ist, warum Suidas gerade die einzige Quelle sein soll, aus welcher Abulfaraj geschöpft hat, zumal dieser Geschicht-

---

mus armaria librorum, quibus direptis exinanita ea a nostris hominibus etc. Vergleiche über diesen ganzen Gegenstand Schöll Geschichte der Griechischen Litteratur, deutsch von Pinder. Berlin. 1828—30. am Anfang des dritten Bandes.

19) Cossali Origine T. I. p. 64. 65. Colebrooke Algebra of the Hindu's. Note M. p. LXIII. „The Armenian Abu'lfaraj places the Algebraist Diophantus under the Emperor Julian. But it may be questioned, whether he has any authority for that date, besides the mention by Greek authors of a learned person of the name, the instructor of Libanius, who was contemporary with that emperor. Indeß erklärt Colebrooke gleich hinterher Abulfaraj's Angabe für annehmbar.

20) A. a. O. S. XV.

Digitized by

ſchreiber uns noch eine Notiz über Diophant giebt, die ſicher aus anderer Quelle herrührt, die nämlich, daß das Werk des Griechiſchen Auctors von Mohammed Abulwafa ins Arabiſche überſetzt worden iſt. Wohl mochte dieſe Überſetzung oder Bearbeitung dem Hiſtoriker nicht unbekannt ſein, und vielleicht ſelbſt Notizen enthalten, die uns fehlen, zumal, wie wir unten ſehen werden, der Verfaſſer derſelben vor Suidas lebte. Es iſt alſo nicht nur kein Grund vorhanden, die Zeitbeſtimmung über Diophant's Alter, welche Abulfaraj darbietet, nicht anzunehmen, ſondern wir haben vielmehr im Gegentheil mehrfache Gründe, welche das Zeugniß des Arabiſchen Geſchichtſchreibers beſtätigen und bekräftigen.

Sonderbar benimmt ſich hier wieder Boſſut. T. 1. p. 7, wo er von Diophant handelt, ſetzt er ihn vermöge am Rande beigefügter Jahrzahl, mit unſerm Reſultat übereinſtimmend, auf das Jahr 350 n. Chr., welches Datum der Überſetzer Reimer S. 26 (Note) mit Unrecht verwirft. Dagegen in der dem zweiten Bande der Ausgabe von 1810 angehängten chronologiſchen Tafel finden wir Diophant in der Mitte des zweiten Jahrhunderts. Zwar iſt die Tafel nicht von Boſſut ſelbſt, ſondern von ſeinem Engliſchen Überſetzer, Bonnycaſtle, entworfen; aber ich denke, wenn Boſſut ſich veranlaßt ſah, ſie in ſeine zweite Auflage aufzunehmen, ſo mußte er ſie wenigſtens mit ſeinem Vortrage übereinſtimmend machen.

Diophantus wird Ἀλεξανδρεὺς, der Alexandriner, genannt; er war alſo entweder aus Alexandria gebürtig, oder was wahrſcheinlicher iſt, er lebte und lehrte daſelbſt. Alles, was wir ſonſt von ſeinen Schickſalen wiſſen, iſt in folgenden Räthſelverſen des Metrodorus enthalten, deren deutſche Übertragung man in Schulz's Überſetzung S. 276. 277 findet:

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ὦ μέγα θαῦμα,
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην,
Δωδεκάτῃ δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν.
Τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
Ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἰ αἰ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρός,
Τοῦ δὲ καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
Τῇδὲ πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Die Ausrechnung der Aufgabe lehrt nur, daß Diophant im ein und zwanzigſten Jahre ſeines Alters einen Bart, im drei und dreißigſten eine Frau, im acht und dreißigſten einen Sohn bekommen habe, daß dieſer in ſeinem zwei und vierzigſten, in des Vaters achtzigſten Jahre, und der Vater im vier und achtzigſten geſtorben ſei. Ohne aus dieſer poetiſch-mathematiſchen Spielerei Schlüſſe zu ziehen, gehen wir zu wichtigeren Dingen über, und zwar zunächſt zu den Schickſalen, welche Diophant's Schriften erlebt haben.

Wir kennen drei Schriften von Diophant, von denen aber nur zwei, und auch dieſe unvollſtändig, in unſern Händen ſind; das erſte führt den Titel Ἀριθμητικῶν βιβλία ιγ̄; das zweite iſt eine kleine Abhandlung unter dem Titel περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν; das dritte endlich, welches wir nur aus Citaten im erſten kennen, hieß πορίσματα [21]). Das erſtgenannte Werk, Ἀριθμητικά, Arithmetiſches, kündigt ſich nicht nur auf dem Titel, ſondern auch in ſeiner Einleitung [22]) als in dreizehn Bücher getheilt an; aber alle fünf oder ſechs bis jetzt aufgefundenen Codices [23]) enthalten nur ſechs Bü-

21) In Betreff des Werks, welches Ramus p. 37. Harmonica nennt (Scripserat et Diophantus harmonica), habe ich weiter nichts finden können, als was Fabricius (Bibl. Graeca T. IV. p. 15. — Ed. Harl. T. V. p. 645.) darüber ſagt: Harmonica Diophanti, quae Gesnerus et alii memorant, intellige de harmonicis numeris, non de scripto quodam musici argumenti. Was hier mit den harmoniſchen Zahlen gemeint iſt, iſt doch nicht klar.

22) Def. XI. am Ende: οὕτω γὰρ εὐόδευτα γενήσεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῆς πραγματείας αὐτῶν ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης.

23) Dieſe Codices ſind

I—III. Drei Vaticaniſche unter folgenden Nummern (ſ. Cossali Origine T. I. p. 61.)
No. 191. Saec. XIII. charta bombycina.
No. 200. Saec. XIV. charta pergamena.
No. 304. Saec. XV. charta.

IV. Einer auf der Königlichen Bibliothek zu Paris, den Bachet ſeiner Ausgabe zu Grunde gelegt hat. S. Ep. ad Lect.

V. Einer auf der Palatiniſchen Bibliothek, deſſen Collation für Bachet Claude Saumaiſe beſorgte. S. ib.

VI. Ein ſechſter iſt dann vielleicht derjenige, den Xylander bei ſeiner Bearbeitung in Händen hatte, und der vorher dem Kaiſerlichen Geſandten in Warſchau, Andreas Dudicius (ſ. u.) angehörte. Indeß hält Colebrooke (Note M. p. LXI) die beiden letztgenannten für wahrſcheinlich identiſch.

Digitized by Google

Bücher der Ἀριθμητικά und das in der Mitte abgebrochene Buch über die Polygonalzahlen, mit der einzigen Abweichung, daß der Vaticaniſche Codex No. 200. denſelben Text der Arithmetica, welchen die übrigen Manuſcripte in ſechs Büchern enthalten, auf ſieben vertheilt. Iſt ſchon die äußere Übereinſtimmung ſo vieler Handſchriften, die an ganz verſchiedenen Orten ſich befinden und aus verſchiedenen Jahrhunderten herrühren, wunderbar, ſo iſt's der Umſtand noch mehr, daß alle mit einander in den Lücken, Fehlern und einzelnen Verunſtaltungen ſo unglückſeliger Weiſe zuſammentreffen, daß Bachet, der Herausgeber der Diophantiſchen Überreſte, für die Kritik des Textes aus der Collation derſelben gar nichts gewinnen konnte, was wir mit ihm herzlich bedauern. Und nicht ohne große Wahrſcheinlichkeit ſtellt Bachet die Vermuthung auf, daß alle dieſe vorhandenen Handſchriften Copien von einem und demſelben älteren Hauptcodex ſeien [24]). Unter ſolchen ungünſtigen Umſtänden konnte es nicht fehlen, daß Bachet's Recenſion des Textes, die einzige, die wir bis jetzt haben, an vielen Stellen ſehr mangelhaft ausfallen mußte. Indeß iſt die Hoffnung, einen wenn nicht weſentlich vollſtändigeren, ſo doch vielleicht im Einzelnen reineren Text zu erhalten, uns nicht ganz benommen. Bachet hat nämlich, wie aus der vorigen Note hervorgeht, nur einen der drei Vaticaniſchen Codices, und auch den nicht vollſtändig vergleichen können, und ſomit wäre immer noch zu erwarten, daß, wenn einmal Jemand ſich der gewiß nicht unbelohnenden Mühe unterzöge, die drei Vaticaniſchen Codices gründlich mit der Bachet'ſchen Ausgabe zu vergleichen, dieſe Arbeit für den Text des Diophantiſchen Werkes ein erwünſchteres Reſultat herbeiführen könnte.

Alle Nachrichten von dem einſtmaligen Vorhandenſein der drei-

24) Epist. ad Lect.: „Etenim neque codex Regius, cujus ope hanc editionem adornavimus, neque is quem prae manibus habuit Xilander, neque Palatinus, ut doctissimo viro Claudio Salmasio referente accepimus, neque Vaticanus, quem vir summus Jacobus Sirmondus mihi ex parte transcribendum curavit, quicquam amplius continent, quam sex hosce Arithmeticorum libros, et tractatum de numeris multangulis imperfectum. Sed et tam infeliciter hi omnes codices inter se consentiunt, ut ab uno fonte manasse et ab eodem exemplari descriptos fuisse non dubitem. Itaque parum auxilii ab his subministratum nobis esse, verissime affirmare possum.

zehn Bücher sind unsicher und zum Theil erwiesen falsch. Ich schreibe hier zunächst folgende Stelle aus Bachet's Epistola ad Lectorem ab: *Joannes* tamen *Regiomontanus* tredecim Diophanti libros se alicubi vidisse asseverat, et Illustrissimus Cardinalis *Perronius*, quem nuper extinctum magno Christianae et literariae Reipublicae detrimento conquerimur, mihi saepe testatus est, se codicem manuscriptum habuisse, qui tredecim Diophanti libros integros contineret, quem cum *Guilielmo Gosselino* concivi suo, qui in Diophantum Commentaria meditabatur, perhumaniter more suo exhibuisset, paulo post accidit, ut Gosselinus peste correptus interiret, et Diophanti codex eodem fato nobis eriperetur. Cum enim precibus meis motus Cardinalis amplissimus, nullisque sumptibus parcens, apud haeredes Gosselini codicem illum diligenter exquiri mandasset et quovis pretio redimi, nusquam repertus est. Was zuerst die Nachricht in Betreff Regiomontan's anlangt, so beruht dieselbe, wie ich schon S. 35. vorläufig erwähnte, auf einem Mißverständnisse. Xylander sagt in der Epistola nuncupatoria von seiner Übersetzung Diophant's, er habe gehört, daß in der Vaticanischen Bibliothek die vollständigen dreizehn Bücher von Diophant's Arithmetik vorhanden seien, und wahrscheinlich habe Regiomontanus, welcher versichere auf Italienischen Bibliotheken Diophant's Werk gesehen zu haben, diese dreizehn Bücher in Händen gehabt [25]). Nach damals gebräuchlicher und leider auch später oft noch vorkom-

25) Leider habe ich die Xylandrische Übersetzung bis jetzt nicht können zu Gesichte bekommen; die beiden Stellen, auf welche ich obige Aussage gründe, theilt Cossali mit, auf dessen Citate man sich verlassen kann. Die erste steht Orig. T. I. p. 58, und lautet: Inveni tanquam exstantis in bibliothecis italicis sibi visi Diophanti operis mentionem a Regiomontano factam; die zweite ebend. p. 66: Sane tredecim libri arithmeticae Diophanti ab aliis perhibentur exstare in bibliotheca Vaticana, quos Regiomontanus viderit. Über die erste dieser Stellen ist zu vergleichen, was ich weiter im Texte sage. Hinsichtlich der zweiten aber ist einleuchtend, daß Xylander falsch war berichtet worden; denn, wie sich ergeben hat, enthalten die Vaticanischen Codices nicht die vollständigen dreizehn Bücher, sondern kündigen sie nur auf dem Titel an. Damit fällt denn aber auch die ganze Nachricht, daß Regiomontan die dreizehn Bücher gesehen habe, über den Haufen, zumal da es nur eine Combination von Xylander ist, daß Regiomontan gerade diese vorgeblich vollständigen Vaticanischen Codices gesehen habe.

Digitized by Google

mender übler Sitte glaubt Xylander genug gethan zu haben, wenn er den Namen Regiomontanus citirt. Es ist in diesem Falle aber, bei den fast unzähligen Werken, welche Regiomontan verfaßt hat, und die zum größten Theil sogar ungedruckt geblieben sind, ganz besonders schwierig zu ermitteln, auf welche Stelle in dieses fruchtbaren Schriftstellers Werken Xylander sich bezieht. Vossius, wie ich oben S. 35 schon erwähnte, giebt uns einen genaueren Fingerzeig, und ich habe auch bis jetzt in Regiomontan's Schriften keine andere Stelle gefunden, welche hier gemeint sein könnte, als eben seine erwähnte Oratio habita Patavii in praelectione Alfragani, abgedruckt vor dem Werke: Rudimenta astronomica *Alfragani.* Item *Albategnius* astronomus peritissimus de motu stellarum, ex observationibus tum propriis tum Ptolemaei, omnia cum demonstrationibus Geometricis et Additionibus *Joannis de Regiomonte.* Item Oratio introductoria in omnes scientias Mathematicas *Joannis de Regiomonte,* Patavii habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Ejusdem utilissima introductio in elementa Euclidis. Item Epistola *Philippi Melanthonis* nuncupatoria, ad Senatum Noribergensem. Omnia jam recens prelis publicata. Norimbergae anno 1537. 4. In der erwähnten Rede, welche auf die Vorrede von Ph. Melanthon folgt, heißt es (Blatt β. S. 2.), nachdem von der Arithmetik des Euklides und Jordanus (Nemorianus) die Rede gewesen, so: *Diofanti* autem tredecim libros subtilissimos nemo usquehac ex Graecis Latinos fecit, in quibus flos ipse totius Arithmeticae latet, ars videlicet rei et census, quam hodie vocant Algebram Arabico nomine. Hujus equidem artis pulcherimae multa fragmenta passim Latini contrectant, paucissimos autem egregie doctos offendo nostra tempestate post Joannem de Blanchinis virum optimum. Wenn also Regiomontanus, was übrigens aus dieser Stelle auf keine Weise hervorgeht, ein Manuscript von Diophant selbst gesehen hat, (noch weniger aber liegt in den Worten, daß er, wie Vossius p. 432 behauptet, Diophant für den Erfinder der Algebra ausgiebt), so folgt daraus noch nicht, daß dasselbe alle dreizehn Bücher anderswo als auf dem Titel gehabt habe. Gründlich studirt hat Regiomontan es sicher nicht, wie schon seine Inhaltsangabe beweist. Die ars rei et census ist, wie wir in unserm zweiten Kapitel gesehen haben, die Auflösung der bestimmten quadratischen Gleichungen, und gerade diese fehlen in unserm

Digitized by Google

Diophant; aber gesetzt, sie wäre in dem Codex, den Regiomontanus gesehen, vorhanden gewesen, so wäre doch gerade diese Auflösung der quadratischen Gleichungen nicht der Glanzpunct, der bei Diophant vorzugsweise einer besondern Erwähnung verdiente. Die meisten alten Codices sind aber so eingerichtet, daß Jemand, der einen solchen nicht gründlich durchstudirt, nicht so leicht übersehen kann, in wie viele Bücher oder Abschnitte das Werk getheilt ist, weil sie häufig ohne Absätze das ganze Werk in einem Zuge darstellen. Wer dieses mit dem in der vorigen Note Gesagten vergleichen will, wird mir gern die Unzuverlässigkeit dieser Nachrichten über Regiomontan's Verhältniß zu Diophant's dreizehn Büchern zugeben. Wenn indeß aus den angezogenen Worten weiter auch nichts folgte, als daß Regiomontanus von der Existenz Diophant's Kunde hatte, so ist diese Stelle doch schon immer historisch merkwürdig genug als die früheste Erwähnung Diophant's, die wir bis jetzt bei einem Europäischen Mathematiker gefunden haben. Noch viel unbestimmter ist eine andere Stelle in derselben Rede (Blatt β2, S. 2), welche Xylander mit der eben angeführten combinirt zu haben scheint. Regiomontanus erzählt, er sei nach dem Tode seines Lehrers Georg von Peurbach († 1461) in Begleitung des Cardinals Bessarion nach Rom gereist, um den Plan Peurbach's, die Griechischen Mathematiker im Original kennen zu lernen und bekannt zu machen, auszuführen. **Quid igitur, sagt er, reliquum erat nisi ut orbitam viri clarissimi sectarer? coeptum foelix tuum pro viribus exequerer? Duce itaque patrono communi Romam profectus more meo literis exerceor, ubi scripta plurima Graecorum clarissimorum *ad literas suas discendas* me invitant, quo Latinitas in studiis praesertim Mathematicis locupletior redderetur.** Wenn wir nun bedenken, daß Regiomontanus nach Italien ging, um vorläufig Griechisch zu lernen, daß er sich ferner nicht gar lange Zeit in Rom aufgehalten [26]) und sich da nicht einmal ausschließlich mit mathema-

---

26) Wegen Unzugänglichkeit der Quellen kann ich einige Jahrzahlen nicht genau angeben; aber aus der folgenden Zusammenstellung wird dennoch erhellen, daß Regiomontan's Aufenthalt in Rom von nicht langer Dauer gewesen sein kann. Am 8. April 1461 starb Peurbach, also nach diesem Datum begab Jener sich auf die Reise. Als nach einiger Zeit Bessarion nach Griechenland abreiste, ging Regiomontan aus Rom weg, hielt sich über ein Jahr lang in Ferrara auf, wo er Griechische Verse machte und den Ptolemäus verbesserte, darauf nahm er einen

Digitized by Google

thematiſchen Schriftſtellern, geſchweige denn mit Diophant beſchäftigt (vielmehr wiſſen wir, daß, als eines Aſtronomen von Profeſſion, ſein Hauptaugenmerk immer auf Ptolemäus gerichtet blieb, deſſen Bearbeitung nach dem Original er auch bald nach ſeiner Rückkehr aus Italien bekannt machte), bedenken wir ferner, daß Diophant nicht der Art iſt, daß ein Mathematiker des funfzehnten Jahrhunderts, dem der Gegenſtand ganz neu und für ſeinen mathematiſchen Geſichtskreis viel zu hoch und der noch dazu erſt Anfänger im Griechiſchen war, das Studium dieſes Werks in einigen Monaten zu vollenden im Stande iſt; bedenken wir das Alles, ſo wird man mir leicht beiſtimmen, wenn ich ſage, daß Regiomontanus von Diophant nicht viel mehr als den Titel kennen und allenfalls im Allgemeinen aus dem Durchblättern eines Codex wiſſen konnte, daß er über Algebra handele. Aber Regiomontanus erwähnt ja auch Diophant's in der beigebrachten Stelle mit keiner Sylbe, und es iſt eine bloße Conjectur von Xylander und Coſſali [27]), daß unter den Griechiſchen Mathematikern, deren in obiger Stelle gedacht wird, ſich auch Diophant befunden habe. Soviel aber, denke ich, ſteht feſt, daß das wirkliche Daſein der vollſtändigen dreizehn Bücher aus der Erwähnung Regiomontan's ebenſo wenig folgt, als wenn Blancanus in ſeiner Chronologia p. 52. von Diophant ſagt: **extant ejus 13 libri Graeci Arithmeticorum.**

Ruf nach Padua an, um daſelbſt Vorleſungen über Alfraganus zu halten, und hielt da die Antrittsrede, aus der ich obige Stelle citirt habe; darauf ging er, nachdem er hier eine Zeitlang geleſen, nach Venedig, um die Rückkehr des Cardinals abzuwarten, von Venedig begab er ſich noch einmal auf kurze Zeit nach Rom, ging dann nach Wien zurück, wo er eigentlich angeſtellt war, und wartete eine Zeitlang ſeiner Profeſſur, darauf nahm er einen Ruf des Königs Matthias von Ungarn an, bei dem er einige Jahre in hohen Gunſten ſtand, und dieſe Stellung endlich verließ er im Frühling des Jahres 1471, um ſeinen bleibenden Wohnſitz in Nürnberg zu nehmen. Welch' eine Menge von Begebenheiten auf kaum zehn Jahre vertheilt! Wieviel kann davon für den Aufenthalt in Rom, und namentlich für den erſten Aufenthalt, auf welchen ſeine in Padua erwähnte Bekanntſchaft mit Diophant ſich doch allein ſtützen kann, übrig geblieben ſein? Und von dieſem Wenigen wurde noch ein bedeutender Theil verbraucht, um erſt Griechiſch zu lernen, wozu er vorher in Wien keine Gelegenheit gehabt hatte.

27) Coſſali I. 59. Ja dieſer achtungswerthe Gelehrte will ſogar, daß Regiomontanus ſich eine Copie von einem Diophantiſchen Codex genommen. Er bringt nämlich eine Stelle aus Gaſſendo's Leben Regiomontan's bei, in der es

Digitized by Google

Ob nun das andere von Bachet erwähnte Manuſcript, welches alle dreizehn Bücher enthalten haben ſoll, wirklich dem Titel entſprochen — ein Bedenken, was man bei dergleichen Nachrichten immer bereit halten muß, — oder ob es, wie die übrigen vorhandenen, die dreizehn Bücher nur angekündigt habe, läßt ſich aus Mangel an Datis gar nicht ausmitteln. Iſt das erſtere der Fall geweſen, ſo ſcheint wirklich ein unheilvoller Fluch auf den Werken dieſes Auctors zu ruhen, indem alle möglichen Unglücksfälle, ſelbſt die Peſt nicht ausgenommen, ſich verbündet zu haben ſcheinen, um dieſelben der Nachwelt zu entziehen.

Eine ähnliche Nachricht von einem vollſtändigen Diophant ſcheint Fermat gehabt zu haben. Er ſchreibt am 15. Auguſt 1657 an Digby [28]): **Le nom de cet Autheur (Diophante) me donne l'occasion de vous faire souvenir de la promesse qu'il vous a pleu me faire de recouvrer quelque manuscrit de cet Autheur, qui contienne tous les treize livres, et de m'en faire part, s'il vous peut tomber en main.** Indeß geht aus dieſen Worten nicht mit Sicherheit hervor, daß Digby um ein ſolches Exemplar gewußt habe. Vielleicht hatte er dem modernen Diophant, Fermat, nur gelegentlich im Allgemeinen verſprochen, fall's ihm je einmal ein vollſtändiger Diophant in die Hände gerathen ſollte, Letzterem denſelben jedenfalls mitzutheilen. Freilich hätte Diophant in keine beſſern Hände als in Fermat's fallen können; denn dieſer bewundernswürdige Mann, Juriſt von Profeſſion und in ſeiner

---

heißt: per ejusmodi tempora graecos aliquot codices, tum comparavit, tum, quos rariores non potuit, commendato accepit, illosque aut ipse manu sua exscripsit, aut aliena manu sibi exscribi curavit. Darunter, meint Coſſali, ſei wahrſcheinlich auch Diophant geweſen. Das Opfer iſt denn doch für eine bloße Conjectur etwas zu groß, und ich kann dem ſonſt in meiner Achtung ſehr hoch ſtehenden Manne hierin nicht beiſtimmen. Regiomontan hat, nach dem von Heilbronner p. 501—504 gegebenen Verzeichniſſe ſeiner Schriften, die Werke von Euklides, Archimedes, Apollonius, Heron, Serenus, Menelaus, Ptolemäus (in mehren Ausgaben), Hypſikles, Theodoſius, Theon von Alexandria, Proklus, Jordanus Nemorianus, ja ſelbſt Ariſtoteles nach dem Original bearbeitet, ſo daß es zur Darſtellung ſeiner Verdienſte um die Verbreitung der Griechiſchen Mathematiker ganz überflüſſig iſt, wenn man ihm den Diophant noch dazu aufcomplementiren will, zumal wir durchaus keine Nachricht davon haben, daß dieſer Mathematiker jemals Gegenſtand ſeiner Arbeiten geweſen ſei.

28) Opera varia mathematica p. 192.

Digitized by Google

amtlichen Stellung geachtet, gehörte zugleich nicht nur zu den größten Mathematikern seiner Zeit, sondern hat sich auch als tüchtiger Philolog und Kritiker, wenn auch nicht durch die Herausgabe eines ganzen Auctors, bekannt gemacht, wie seine Correcturen einzelner Stellen Griechischer Auctoren beweisen, die in seinen gesammelten Werken sich zerstreut finden.

Noch ein Beispiel eines unwahren Citats muß ich hier anführen, welches den eben behandelten Berufungen auf Regiomontanus ganz ähnlich sieht. Moreri nämlich behauptet in seinem Dictionnaire historique, Bombelli erzähle, daß ihm die dreizehn Bücher von Diophant in der Vaticanischen Bibliothek seien gezeigt worden. Dem ist aber nicht so, vielmehr giebt Bombelli an der Stelle der Vorrede seiner Algebra, in welcher er Diophant's erwähnt, die Zahl der Bücher auf sieben an, woraus sich schließen läßt, daß er den Codex No. 200 in Händen gehabt habe. Da wir auf diese Stelle noch mehrmals uns werden beziehen müssen, so will ich sie hier ganz mittheilen: ***Questi anni passati*** essendosi ritrovato un' opera greca di questa disciplina nella librería di Nostro Signore in Vaticano, composta ***da un certo Diofante*** alessandrino autor greco, il quale fu ***a tempo di Antonino Pio,*** ed avendomela fatta vedere Messer Antonio Maria Pazzi reggiano, pubblico lettore delle matematiche in Roma, e giudicatolo con lui autore assai intelligente de' numeri (ancorche non tratti de' numeri irrationali, ma solo in lui si vede un perfetto ordine d' operare) egli ed io per arricchire il mondo di così fatta opera ci dessimo a tradurlo, ***e cinque libri (delle sette che sono) tradutti ne abbiamo;*** lo restante non avendo potuto finire per gli travagli avvenuti all' uno ed all' altro; ed in detta opera abbiamo ritrovato, ***ch' egli assai volte cita gli autori indiani,*** col che mi ha fatto conoscere, che questa disciplina appo gl' indiani prima fu che agli arabi [29]). Ich habe diejenigen Worte, welche ich entweder im Vorhergehenden schon berücksichtigt habe, oder in der Folge noch berücksichtigen werde, ausgezeichnet.

---

29) Da ich Bombelli's Algebra selbst noch nicht in Händen gehabt habe, so habe ich diese Stelle aus Cossali Origine T. I. p. 60, wo sie mitgetheilt ist abgeschrieben.

Digitized by Google

Da wir nun einmal Diophant's Werk unvollständig haben und uns vorläufig darüber beruhigen müssen, so ist die nächste und natürlichste Frage, die noch aufgeworfen werden kann, die: an welcher Stelle des Werks hat die Verstümmelung statt gefunden, am Anfange, am Ende, oder in der Mitte? Am Anfange sicherlich nicht. Diophant beginnt ganz ordentlich mit einer Zueignung, der dann eine plane Auseinandersetzung der Grundsätze seiner Methode folgt, und geht von da zu den einfachsten algebraischen Aufgaben des ersten Grades über. Dagegen sucht die große Mehrzahl der Beurtheiler und Verehrer Diophant's, von denen übrigens Viele ihn nicht gelesen, wenigstens nicht so gelesen haben, daß sie des Gesammteindrucks des Werks sich bewußt über eine Frage der Art urtheilen könnten, den Defect am Ende, und man erzählt sich von goldenen Bergen und Wunder was für Dingen, welche in den noch fehlenden sechs oder sieben Büchern sollen gesteckt haben. Dieser Ansicht muß ich mich aber durchaus widersetzen. Diophant's Kunst ist in seinem sechsten Buche am Ende. Wenn man die vier letzten Bücher, vom dritten bis zum sechsten, successive mit Aufmerksamkeit durcharbeitet, so findet man, daß sich der Verfasser in einem ganz bestimmten abgeschlossenen Cyclus von Vorstellungen und Methoden bewegt, den er vergebens durch immer neu angehäufte Schwierigkeiten zu überschreiten sich bemüht; er wird immer, so oft er sich den Anschein giebt, als wolle er den einmal um ihn gezogenen Zauberkreis überspringen, von einer unsichtbaren Hand auf den bereits bekannten alten Bezirk zurückgeworfen; man sieht gleichsam hinter den genialen Kunstgriffen, deren er sich zu seiner Befreiung bedienen will, im Halbdunkel die Fesseln, welche seinen Geist hemmen, man hört ihr Rasseln, wenn er bei gar zu freigebig sich selbst aufgelegten Schwierigkeiten sich nicht anders zu helfen weiß, als daß er den Knoten zerhaut, statt ihn zu lösen. Belege für diese dem Anscheine nach kecken Behauptungen kann ich erst in der Folge geben, wenn die Leser mir in das Wesen der Diophantischen Analysis werden gefolgt sein. Hier will ich nur noch das hinzufügen, daß das sechste Buch auch seiner Form nach einen ganz passenden Schluß des Ganzen bildet, indem der Verfasser hier, nachdem er in den vorigen Büchern immer nur rein arithmetische Aufgaben behandelt hat, den geometrischen Begriff des rechtwinkligen Dreiecks in seine Darstellung hineinzieht, und die vorhergelehrten Kunstgriffe und Regeln auf die Auf-

Digitized by

findung solcher Dreiecke in rationalen Zahlen, unter mannigfachen beschränkenden und erschwerenden Umständen anwendet.

Meine Ansicht über die aufgeworfene Frage concentrirt sich in folgenden Sätzen:

erstens, daß uns von Diophant viel weniger fehlt, als man gewöhnlich glaubt, wenn man sich an das Zahlenverhältniß von 6 : 13 hält,

zweitens, daß der Defect nicht am Ende, sondern in der Mitte des Werks, und zwar hauptsächlich zwischen dem ersten und zweiten Buche zu suchen ist; endlich

drittens, daß diese Verstümmelung des Werks ziemlich frühe, gewiß aber vor dem dreizehnten oder vierzehnten Jahrhundert, und bereits in Griechenland selbst stattgefunden hat.

Belege für den ersten Satz kann ich jetzt noch nicht beibringen, sondern ich muß dieselben mir versparen, bis ich über die übrigen Schriften Diophant's werde gesprochen haben. Darum wenden wir uns hier zunächst zu dem zweiten der ausgesprochenen Sätze. Um mit einigem Anschein von Wahrscheinlichkeit bestimmen zu können, wo in Diophant's Werk etwas fehlt, müssen wir uns zuvörderst klar zu machen suchen, was denn eigentlich fehlt. Das wird uns aber eine vorläufige Betrachtung des Inhalts der einzelnen Bücher sogleich zeigen. Das erste Buch enthält bestimmte Aufgaben des ersten Grades, das zweite bis zum sechsten Buche dagegen in successiver Steigerung von dem Einfachen zum Schwierigeren unbestimmte Aufgaben des zweiten Grades. Demnach zeigt sich sofort eine ungeheure Lücke zwischen dem ersten und zweiten Buche, indem hier die bestimmten Gleichungen des zweiten und die unbestimmten Aufgaben des ersten Grades fehlen. Daß Diophant Aufgaben der letztgenannten Art behandelt habe, bevor er sich an die unbestimmten Aufgaben des zweiten Grades gemacht, wird zwar nirgend ausdrücklich erwähnt, ist aber wahrscheinlich und ziemlich sicher anzunehmen. Ganz gewiß wissen wir aber, daß er die in dem Werke, wie es uns vorliegt, fehlende Auflösung der gemischten quadratischen Gleichungen gelehrt hat; denn eines Theils verspricht er die Auflösung derselben in der der Einleitung, andern Theils setzt er dieselbe in den folgenden Bü-

Digitized by Google

chern voraus, indem er theils, wenn er im Verlauf der Rechnung auf eine solche Gleichung gekommen ist, geradezu den Werth der Unbekannten hinschreibt, theils auch bei der unten näher zu erörternden Methode der Zurückrechnung auf die Form des irrationalen Theils der Wurzel einer quadratischen Gleichung als auf eine bekannte Sache sich bezieht, ohne daß er die Wurzel selbst hingeschrieben hat. Beispiele von reinen quadratischen Gleichungen freilich finden sich schon im ersten Buche, z. B. Aufgabe 30. 31. 33. Aber diese rechnet Diophant zu den einfachen Gleichungen, und thut meiner Meinung nach daran besser, als die meisten neuern Lehrbücher und Lehrmeister, welche über diesen Gegenstand lange Kapitel vortragen. Diophant braucht nämlich nicht die Potenz der Unbekannten als Eintheilungsgrund, sondern die Anzahl der in der Normalgleichung übrig bleibenden Glieder; er spricht sich darüber (Def. XI.) so aus: „Wenn man durch die Aufgabe auf eine Gleichung geführt wird, in welcher auf beiden Seiten dieselben Potenzen (εἴδη) der Unbekannten mit verschiedenen Coefficienten vorkommen, so muß man so lange Gleiches gegen Gleiches wegheben (Arab. almukábalah), und Negatives auf beiden Seiten addiren (aljebr), bis man auf jeder Seite nur einen Ausdruck übrig behält. περιλοτεχνήσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ· ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται. d. h. „Dieses wende man auf den Ansatz der Aufgaben, wenn es möglich ist, so lange an, bis ein Glied einem Gliede (also gleichviel von welcher Potenz) gleich bleibt (d. h. bis man auf eine Gleichung von der Form $x = a$ oder $x^2 = a$ gelangt). Späterhin aber will ich dir zeigen, wie man die Aufgabe löst, wenn zuletzt zwei Glieder einem Gliede gleich sind (d. h. wenn das Resultat des Weghebens die Gleichung $x^2 \pm ax = \pm b$ ist)." Diese Auflösung der quadratischen Gleichungen nun, welche Diophant hier verspricht und auf welche er sich in den zweiten und den folgenden Büchern mehrfach bezieht, und die ihrer Natur und diesen Beziehungen zufolge nicht füglich anderswo als zwischen dem ersten und zweiten Buche gestanden haben kann, ist in der gegenwärtigen Gestalt seines Werks nirgend zu finden.

Aber außerdem, daß ein wesentlicher Theil des Werks, der dem folgenden zur Stütze dient, ausgefallen ist, hat auch das noch Vorhandene mancherlei Verstümmelungen erlitten. So gehören z. B.

Digitized by Google

die Aufgaben 6. 7. 18. 19. des zweiten Buchs, welche bestimmte Aufgaben des ersten Grades behandeln, sichtbar in das erste. Bei den beiden letztgenannten Aufgaben tritt ferner die sonderbare Erscheinung hervor, daß die neunzehnte gar nicht aufgelöst ist, sondern die ihr angehängte Auflösung bloß eine zweite Auflösung der vorhergehenden Aufgabe ist, ohne auf die bis zum Ansatze durchgeführte neunzehnte Aufgabe irgend wie Bezug zu nehmen. Die Aufgaben 1 bis 5 des zweiten Buchs sind, so wie sie gelöst werden, bloß Wiederholungen der Aufgaben 34. 37. 35. 36. des ersten Buchs. Demnach beginnt das eigentliche Sujet des zweiten Buchs erst mit der achten Aufgabe desselben, und reicht bis zur siebzehnten. Die Aufgaben 18. und 19. müssen, wie erwähnt, in das erste Buch geschoben werden, und zwar hinter die Aufg. 25. dieses Buchs, der sie sich genau anschließen. Mit **II**, 20 beginnt dann eine ganz neue Gattung von Aufgaben, welche dergestalt im dritten Buche fortläuft, daß der Anfang des dritten Buchs gar keinen natürlichen Abschnitt bildet. Die beiden letzten Aufgaben des zweiten Buchs sind nämlich:

35. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit finden, daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der drei Zahlen dazu addirt. Man hat also die drei Gleichungen

$$x^2 + (x + y + z) = a^2$$
$$y^2 + (x + y + z) = b^2$$
$$z^2 + (x + y + z) = c^2$$

36. Dem ganz analog wird die Auflösung der drei Gleichungen gesucht

$$x^2 - (x + y + z) = a^2$$
$$y^2 - (x + y + z) = b^2$$
$$z^2 - (x + y + z) = c^2$$

Daran nun schließt sich ganz natürlich die erste Aufgabe des dritten Buchs an, in welcher die drei Gleichungen sich so gestalten

$$(x + y + z) - x^2 = a^2$$
$$(x + y + z) - y^2 = b^2$$
$$(x + y + z) - z^2 = c^2$$

und ebenso die folgende. Es ist also mit Sicherheit anzunehmen,

Digitized by Google

daß hier die natürliche und ursprüngliche Eintheilung verschoben ist. Da ähnliche Erscheinungen sich auch in den folgenden Büchern zeigen, daß nämlich häufig in der Mitte eines Buchs ein viel merklicherer Abschnitt ist, als am Ende desselben, so ist es keineswegs befremdend, daß eines der Vaticanischen Manuscripte denselben Stoff, den wir haben, anders eintheilt und so aus unsern sechs Büchern sieben macht; und mit derselben Ungezwungenheit könnte ein anderer Codex acht und mehr Bücher zählen. Es kommt dazu, daß viele Aufgaben ganz verstümmelt erscheinen, andere dagegen, auf welche eine spätere sich bezieht, ausgefallen sind; namentlich ist in dieser Hinsicht das fünfte Buch stiefmütterlich von der Mutter Zeit behandelt worden. So sind augenscheinlich zwischen 21. und 22. drei Aufgaben, analog denen in 21. 22. 23. ausgefallen, auf deren eine der Verfasser in 22. verweist; bei 24. 25. ist die Auflösung verstümmelt, bei sehr vielen Aufgaben in sämmtlichen Büchern ist die Auflösung nicht zu Ende geführt, und so weiter fort.

Schwerlich aber sind wohl alle diese Entstellungen des ursprünglichen Textes bloß der Unachtsamkeit eines Abschreibers zuzuschreiben, sondern wohl, wenigstens zum Theil, der Unwissenheit und Ungeschicklichkeit eines vermeintlichen Verbesserers zur Last zu legen, wenn ich auch keineswegs der Ansicht Bachet's beitreten mag, welcher annimmt, unsere sechs Bücher seien ein von einem späteren Bearbeiter angefertigter Auszug aus den vollständigen dreizehn Büchern. Doch dem sei wie ihm wolle; für uns stellt sich das historisch nicht unwichtige Resultat heraus, daß diese Corrumpirung des Textes und die Bildung der großen Lücke zwischen dem ersten und zweiten Buche vor Maximus Planudes, das heißt, vor dem vierzehnten, und wenn das Datum des Codex 191 auf der Vaticanischen Bibliothek seine Richtigkeit hat, vor dem dreizehnten Jahrhundert statt gefunden haben muß. Maximus Planudes, unter der Regierung der Byzantinischen Kaiser Andronicus des Zweiten und des Dritten, in der ersten Hälfte des vierzehnten Jahrhunderts, hat außer andern mathematischen Schriften, auf welche wir in einem spätern Theile dieser Geschichte zurückkommen werden, auch Scholien zu den beiden ersten Büchern von Diophant geschrieben, welche Xylander seiner Übersetzung einverleibt hat; und wir ersehen aus denselben, daß Planudes Diophant's Werk schon in derselben Form, mit denselben Auslassungen, Umstellungen und Corrumpirungen, wenigstens soweit dieselben diese

Digitized by Google

beiden ersten Bücher betreffen, vor Augen hatte wie wir. Desgleichen enthält der erwähnte Vaticanische Codex keinen bessern vollständigern Text. Diese traurigen Erscheinungen benehmen uns denn so ziemlich alle Hoffnung, das so frühzeitig und schon in seinem Vaterlande corrumpirte Werk unsers Autors jemals wieder in seiner Vollständigkeit und Reinheit zu besitzen, wenn nicht etwa einmal ein glücklicher Zufall einem Gelehrten die im zehnten Jahrhundert verfaßte Arabische Bearbeitung von Mohammed Abulwafa in die Hände spielt.

Dem Stoffe nach verwandt, aber ganz und gar abweichend in der Form der Behandlung, ist Diophant's Abhandlung über die Polygonalzahlen. Sie ist nicht, wie das Hauptwerk, analytisch, sondern synthetisch gearbeitet; der Verfasser stellt einzelne Lehrsätze auf und giebt hinter jedem den Beweis; und zwar sind diese Beweise ganz in der Euklidischen Manier des siebenten bis zehnten Buchs der Elemente gehalten, welche man mit Cossali (s. o.) die lineäre Arithmetik nennen könnte, weil sie Zahlenproportionen und Zahleneigenschaften an Linien anschaulich macht. In den Aufgaben bedient sich Diophant nur einmal dieses Hülfsmittels, nämlich V, 13, um zu veranschaulichen, daß wenn $x + y = 1$ und $x + 2$ und $y + 6$ Quadrate sein sollen, die Aufgabe darauf hinauskommt, die Zahl 9 in zwei Quadratzahlen zu zerlegen, deren eine größer als 2 und kleiner als 3 wird. Man ersieht sowohl aus dieser einzelnen Anwendung, als aus der Behandlung der Sätze von den figurirten Zahlen, daß die lineäre, der Geometrie verwandte Vorstellungsweise noch zu Diophant's Zeit für die Griechen den Vorzug der größern Deutlichkeit hatte.

Wir nannten aber noch unter Diophant's Werken seine Porismata. Wir kennen diesen Titel nur aus drei Citaten, in welchen der Verfasser sich selbst auf dieselben bezieht, nämlich in den Aufgaben 3. 5. und 19. des fünften Buchs. An allen drei Stellen führt der Verfasser mit der feststehenden Redensart ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν Sätze aus der Zahlentheorie als bekannt an. Es ist also nicht zu zweifeln, daß die Porismen eine Sammlung solcher Sätze über die Natur und die Zusammensetzung der Zahlen aus Quadraten und dergleichen mehr enthielten, und daß eben daraus auch alle die übrigen Sätze der Art entlehnt sind, welche Diophant gelegentlich entweder ausdrücklich ausspricht, oder deren Bekanntschaft seine De-

Digitized by Google

terminationen voraussetzen [30]). Wie wäre es nun, wenn wir diese Porismensammlung als einen einleitenden Theil in die unbestimmte Analysis des zweiten Grades, als einen bei der spätern Verstümmelung herausgefallenen Theil des ganzen Werks betrachteten? Natürlich müßte diese Sammlung dann auch vor der Behandlung der unbestimmten Aufgaben des zweiten Grades, das heißt, zwischen dem ersten und zweiten Buche gestanden haben. Wahrscheinlich war die Behandlungsart dieses Buchs, eben weil die Citate aus demselben uns lauter Lehrsätze vorführen, auch synthetisch. Das hindert uns aber nicht, dasselbe sammt der Abhandlung über die Polygonalzahlen, die dem Wesen nach ebenfalls dem Hauptgegenstande so sehr nahe verwandt ist, für integrirende Theile des ganzen Werks zu halten. Wenigstens ist diese Annahme immer noch viel wahrscheinlicher, als wenn man zur Ergänzung der dreizehn Bücher voraussetzt, daß Diophant in den verlornen Büchern noch ganz neue Methoden zur Auflösung von unbestimmten Aufgaben entwickelt habe, wie Schulz thut, oder gar mit Bombelli anzunehmen, Diophant habe in den verlornen Büchern sich bis zu den Gleichungen des dritten und vierten Grades verstiegen, was Bombelli dadurch motivirt, daß Diophant so viele Aufgaben vorlegt, deren Zweck ist, die Summe eines Quadrats und irgend eines Accidens zu einem Quadrat zu machen, was dieser, wie er glaubt, thut, um mit Hilfe dieser Methoden die Gleichung $x^4 + px = q$ zu lösen [31]). Bombelli hat sich sehr viel, ja fast sein ganzes Leben hindurch, mit der Verbesserung und Vervollständigung der zu seiner Zeit ganz neuen Auflösungen der Gleichungen des dritten und vierten Grades beschäftigt, bei deren letztern es nach der damals üblichen Auflösung allerdings darauf ankam, einen Ausdruck in der Form $Ax^2 + Bx + C$, dessen Coefficienten eine zweite in die Gleichung eingeführte Unbekannte in sich schlossen, zu einem Quadrate zu machen. Wir dürfen uns also nicht wundern, wenn er in Diophant's davon ganz unabhängige Untersuchungen seine eigene Lieblingsidee hineintrug. Diophant erklärt ja aber, (**Def. XI.**) ausdrücklich, daß er bei dem Vortrage und der Ausarbeitung dieser Aufgaben keinen andern Zweck gehabt habe, als eben den Schüler in der Methode zu üben, daß also diese Aufgaben

30) Z. B. III, 22. V, 12. 14. VI, 15. Siehe unten Kap. X.

31) Schulz Vorr. S. XXI. Cossali Origine I, 76.

Digitized by Google

ſich ſelbſt Zweck ſeien; und in der That hätte der ſo ſcharfſinnige und ſinnreiche Diophant, wenn er mit ſeinen Aufgaben den von Bombelli ihm ſubſtituirten Zweck zu verfolgen beabſichtigt hätte, eben nicht den kürzeſten Weg gewählt, der zum Ziele führte. Aber auch in Betreff der Schulz'ſchen Hypotheſe gilt, was ich oben ſchon ſagte. Wir finden in dem Vorhandenen durchaus nicht die geringſte Andeutung, daß noch etwas Anderes, Höheres folgen ſolle. Diophant's Syſtem und Ideenkreis erſcheint ſo ganz in ſich ſelbſt abgeſchloſſen und ſeine Methoden kehren ſo regelmäßig in einen und denſelben Kreis mathematiſcher Vorſtellungen zurück, daß ſowohl die Schulz'ſche, als noch vielmehr die Bombelli'ſche Annahme ganz ohne Haltung erſcheint [32]). Was aber vielmehr, wenn auch nur als äußeres Zeugniß, für meine Hypotheſe zu ſprechen ſcheint, für die nämlich, daß die drei uns bekannten Werke Diophant's nur ein Ganzes bildeten, iſt auf der einen Seite der Umſtand, daß wir nirgend eine Erwähnung von mehr als einem Werke Diophant's finden [33]), auf der andern Seite aber der ganz unbeſtimmte Titel Ἀριθμητικά,

---

32) Man hat noch einen Grund für die verloren gegangene Behandlung der höheren Gleichungen bei Diophant davon hergenommen, daß er Def. II. die Potenzen der Unbekannten und deren Zeichen bis zum ſechſten Grade erklärt. Warum das, ſagt man, wenn er ſie nicht brauchen, und warum nicht noch mehr, wenn er ſie bloß nennen wollte? Aber er braucht ſie wirklich und zwar gerade bis zur ſechſten Potenz. Nur folgt daraus, daß man in einem Buche den Ausdruck x^6 findet, noch nicht, daß dieſes Buch die Gleichungen des ſechſten Grades löſen lehrt. Diophant kommt zuweilen durch ſeine Annahme auf eine Gleichung, welche höhere Potenzen der Unbekannten, jedoch nie über die ſechſte hinaus, enthalten, die ſich dann aber allemal im Laufe der Rechnung auf irgend eine Weiſe reduciren läßt. Man vergleiche zu dieſem Ende IV, 19. V, 21. 24. 25. VI, 23.

33) Da die beiden einzigen Stellen in Griechiſchen Autoren, welche mit völliger Evidenz von unſerm Diophantus reden, nämlich die oben beigebrachten Stellen von Theon Alexandrinus und Johannes von Jeruſalem bloß den Namen ohne das Werk nennen, ſo können hier nur die Arabiſchen Auctoren in Betracht kommen; und da iſt wirklich an beiden Stellen in Abulfaraj's Geſchichte der Dynaſtien p. 141 und p. 338, und ebenſo in den beiden Stellen in Caſiri's Biblioth. Arab. Hisp. Escur. T. I. p. 371 und p. 434 immer nur von dem Buche Diophant's die Rede. Woher anders iſt das zu erklären (da doch, wie ſämmtliche jetzt vorhandene Handſchriften beweiſen, wenigſtens das Buch über die Polygonalzahlen mit der Arithmetik verbunden zu ſein pflegte), als daraus, daß man nur ein Werk Diophant's, Ἀριθμητικά, kannte, welches Alles enthielt, was der Autor geſchrieben hat.

Digitized by Google

Arithmetiſches. Dieſes Pluralneutrum ſcheint mir geradezu auf ein Conglomerat arithmetiſcher Abhandlungen verſchiedenen Inhalts hinzudeuten, und ich halte es nicht für unmöglich, daß daſſelbe noch einen oder den andern Aufſatz, ähnlich dem über die Polygonalzahlen, der überdies mitten in einem Satze abgebrochen iſt, mit in ſich begriff. Im Allgemeinen iſt dieſe Hypotheſe nicht ganz neu; ſchon Colebrooke hat ſie als möglich ausgeſprochen, und daraus und aus der vielleicht früher abweichenden Abtheilung der einzelnen Bücher, wofür der Vaticaniſche Codex No. 200. ſpricht, den ſehr probablen von mir oben ausgeſprochenen Schluß gezogen, daß uns nämlich von Diophant viel weniger verloren gegangen ſein mag, als man in der Regel zu glauben geneigt iſt [34]). Unter dem Verlorenen dürften die Porismen am Meiſten zu bedauern ſein, da Diophant in dieſen Sätzen, ſoviel ſich aus den wenigen Citaten ſchließen läßt, ſeiner Zeit bedeutend vorausgeeilt zu ſein ſcheint, und da viele derſelben erſt ſpät wieder bewieſen worden ſind.

Obgleich ich nun im Vorigen meine feſte ſubjective Überzeugung, hervorgegangen aus dem anhaltenden und gewiſſenhaften Studium des intereſſanten Mathematikers, ausgeſprochen und mit den mir zu Gebote ſtehenden Mitteln und Gründen derſelben Objectivität zu geben verſucht habe, ſo bin ich doch weit davon entfernt, dieſe meine Anſicht als allein und feſt daſtehende Wahrheit geltend machen zu wollen; vielmehr geſtehe ich gern ein, daß es bei der Dürftigkeit aller

34) Algebra of the Hindu's Note M. p. LXI: In truth the division of manuscript books is very uncertain: and it is by no means improbable, that the remains of Diophantus, as we possess them, may be less incomplete and constitute a larger portion of the thirteen books announced by him (Def. 11), than is commonly reckoned. His treatise on polygon numbers, which is surmised to be one (and that the last of the thirteen), follows, as it seems, the six (or seven) books in the exemplars of the work, as if the preceeding portion were complete. It is itself imperfect: but the manner is essentially different from that of the foregoing books: and the solution of problems by equations is no longer the object, but rather the demonstration of propositions. There appears no ground, beyond bare surmise, to presume, that the author, in the rest of the tracts relative to numbres which fulfilled his promise of thirteen books, resumed the Algebraic manner: or in short, that the Algebraic part of his performance is at all mutilated in the copies extant, which are considered to be all transcripts of single imperfect exemplar.

Digitized by Google

aller äußern Zeugniſſe völlig unmöglich iſt, in Bezug auf Diophant's Werk zu einem ganz ſichern Reſultat zu gelangen. Aber wie ich ſelbſt Tadel verdiente (und ſelbſt der Erſte ſein würde, der ihn ausſpräche), wenn ich mir in Betreff dieſes dunkeln und ſchwierigen Gegenſtandes irgend eine kategoriſche Behauptung erlaubt hätte, eben ſo ſehe ich mich genöthigt, meinerſeits jeder abſprechenden Äußerung mit rückſichtloſer Strenge entgegenzutreten. Ich ſehe zum Beiſpiel nicht ein, wie Reimer in ſeiner Überſetzung der Boſſut'ſchen Geſchichte der Mathematik [35]) bei den Worten ſeines Auctors: „Il avoit écrit treize livres d'arithmétique: les six premiers (?) sont arrivés jusqu'à nous; tous les autres sont perdus, si, néanmoins, un septième, qu'on trouve dans quelques (!) éditions de Diophante, n'est pas de lui," ich ſehe nicht ein, ſage ich, wie Reimer hier zu der apodiktiſch ausgeſprochenen Anmerkung kommt: Dieſes Buch de numeris multangulis iſt eine für ſich beſtehende Schrift und gehört keinesweges in die Sammlung der Arithmeticorum Diophant's." Solcher Gnoſticismen muß ſich jeder Hiſtoriker bei noch ſo wenig aufgeklärten Sujets, wie das vorliegende, enthalten. Ich habe abſichtlich Boſſut's Worte hieher geſetzt, weil auch an ihnen manches zu erinnern iſt. Über die six *premiers* livres will ich nicht weiter ſprechen; zweitens befindet ſich die Schrift über die Polygonalzahlen nicht bei einigen, ſondern bei allen Ausgaben und Überſetzungen Diophant's, von Xylander bis Schulz; drittens aber iſt bis jetzt Boſſut der Einzige, der die Echtheit dieſer Schrift als einer Diophantiſchen in Zweifel zieht, wozu doch wohl gar kein Grund vorhanden iſt.

Wenn wir aus den oben auseinandergeſetzten Gründen den oft angeführten Commentar der Hypatia über Diophant müſſen fallen laſſen, ſo bleibt uns nur ein Grieche übrig, der über dieſen Auctor geſchrieben hat, nämlich der ſchon erwähnte Mönch Maximus Planudes, deſſen Scholien zu dem erſten und zweiten Buche der Ἀριθμητικά ſich bei einigen Handſchriften, und Lateiniſch in Xylander's Überſetzung des Diophant befinden. Wenn wir bedenken, wie mannigfach das in wiſſenſchaftlicher Hinſicht viel weniger bedeutende Werk von Nikomachus paraphraſirt und erläutert worden iſt, ſo zeigt dieſe Armuth an einer Diophantiſchen Literatur bei den

35) Th. 1. S. 28. Die Stelle des Originals ſteht T. I. p. 9.

Digitized by Google

Griechen, verbunden mit dem völligen Aussterben der Diophantischen Methode, recht deutlich, wie wenig dieser Schriftsteller von seinen Landsleuten beachtet und verstanden worden, wie wenig er auf das geistige Leben der spätern Mathematiker eingewirkt hat. Erst tausend Jahre nach dem Erscheinen seines Werkes wagte sich ein für seine Zeit allerdings sehr gelehrter, namentlich als Kenner der Arabischen Mathematiker rühmlichst bekannter Mönch an eine Bearbeitung des Werks seines großen Landsmannes, aber auch er blieb bei den beiden Elementarabschnitten des Auctors stehen.

Aber bedeutend früher hat Diophant das glückliche Loos gehabt, den Arabern in die Hände zu fallen. Unter den Schriften des Mohammed Abulwafa [36]), der zu Buzjan (spr. Bûz-dschân) bei Nischapur in Persien im Jahre 940 (328 H.) geboren, 959 (348 H.) nach Bagdad ging, um sich in der Arithmetik und Geometrie auszubilden, späterhin daselbst als Lehrer auftrat und im Jahre 998 (388 H.) zu Bagdad starb, findet sich nach Abulfaraj und dem Tarikh-al-Hokma (Biblioth. philosophorum bei Casiri, wörtlich: Chronik der Gelehrten) ein Commentar über das Werk Diophant's [37]), der also etwa um das Jahr 970 verfaßt sein mag.

---

36) Sein vollständiger Name ist Mohammed ibn Mohammed ibn Yahyâ ibn Ismaîl ibn Al-abbâs Abu'lwafâ Al-Bûzjâni, محمد بن محمد بن يحيي بن اسمعيل بن العباس ابوالوفا البوزجاني und bei Casiri (I. 346) führt er den Beinamen Al-hâsib (الحاسب) der Rechner oder der Arithmetiker. Vergl. auch Casiri I. 433. 434 und Abulf. p. 338.

37) Abulfaraj a. a. O. sagt فسر كتاب ديوفنطوس في الجبر والمقابلة „er commentirte das Werk Diophant's über Algebra," und im Thârîkh-al-Hokmâ (Casiri p. 434) heißt es تفسير كتاب ديوفنطس في الجبر „ein Commentar (eine Erklärung) über das Werk Diophant's über Algebra." Von beiden Autoren ist das Wort فسر gebraucht, welches zweideutig ist; ein Commentar heißt sonst gewöhnlich شرح, eine Übersetzung نقل. Da es nun nicht wahrscheinlich ist, daß Abulwafa einen Commentar über ein unübersetztes Griechisches Buch geschrieben hat, so ist der gebrauchte Ausdruck wahrscheinlich von einer unwörtlichen, paraphrasirenden Übersetzung zu verstehen. Vergl. Colebr. l. l. p. LXXI. Cossali I. 175. 176. Ich will hier noch etwas über die Stelle bei Abulfaraj p. 141 sprechen; es heißt daselbst, nachdem mehre Gelehrte aus der Zeit Julians genannt worden sind: ومنهم ديوفنطس وكتابه اب قسمة في الجبر والمقابلة مشهور „unter ihnen war Diophantus, und sein Buch ..... über Algebra ist berühmt."

Digitized by Google

Es ist dieses die erste und einzige Arabische Bearbeitung Diophant's, von der wir Nachricht haben, und es ist daher grundfalsch, wenn Bossut [38]) sagt, Diophant sei einer der ersten Griechischen Mathematiker gewesen, welchen die Araber übersetzt haben, da er im Gegentheil einer der letzten ist und namentlich Euklides, Apollonius und Ptolemäus fast zweihundert Jahre früher in Arabischen Bearbeitungen erschienen sind. Die Auffindung und Bekanntmachung dieser Bearbeitung von Abulwafa würde von dem größten historischen In-

---

Die Worte اب قسمة geben nämlich gar keinen Sinn. Für قسمة notirt Pococke eine andere Lesart يسميه „welches er nennt," wodurch aber nur ein Theil der Schwierigkeit gehoben ist. Pococke begnügt sich damit und übersetzt: cujus liber A, B (d. i. اب) quem Algebram vocat etc. Ebenso übersetzt Bauer I. S. 129 „dessen Buch A B, die Algebra genannt, sehr berühmt ist." Es kommt aber durch diese zweite Lesart der Unsinn hinein, daß Diophant sein Buch aljebr w' almukâbalah genannt haben soll. Am Besten kommt man aus der Schwierigkeit, wenn man die corrumpirten Worte اب قسمة ganz wegläßt. Abulfaraj hat oft das Tharikh-al-Hokma fast wörtlich excerpirt. Wie stände es daher um folgende Conjectur. Bei Casiri I. p. 346 wird ein Werk von Abulwafa genannt, welches den Titel führt كتاب قسمة الاعداد „ein Werk über die Eintheilung der Zahlen." Offenbar kannte Abulfaraj Diophantus nur aus Abulwafa's Bearbeitung, er hatte also das im Tharik-al-Hokma gegebene Verzeichniß der Werke dieses Letzteren vor sich liegen, und aus Versehen kroch ihm der Titel des zuletzt angeführten Werks in seinen Text, und er vergaß, nachdem er den Irrthum eingesehen, die Worte vollständig auszuradiren, so daß die anderthalb Worte اب قسمة stehen geblieben sind. Indeß will ich auf diese Conjectur keinen Werth legen, sondern ich gestehe gern ein, daß die Idelersche Vermuthung, اب قسمة sei vielleicht eine Verstümmelung für ارثماطيقي (ob vielleicht auch ارثميتيقة oder ähnlich geschrieben?) Arithmetik, vor der meinigen den Vorzug der weniger complicirten hat. Dann würde der vollständige Sinn der Worte sein: „Dessen Buch, Arithmetika (als Angabe des Titels), über Algebra (handelnd) berühmt ist." Vergl. Schulz a. a. O. S. XIV. die Note.

38) T. I. p. 196. 197. Il paraît certain que les Grecs n'ont commencé à connaître l'algèbre qu'au temps de Diophante. Reste à savoir si les Arabes l'ont puisée dans cet auteur *qu'ils traduisirent un des premiers*, ou dans quelqu'autre source, ou s'ils n'en sont pas eux-mêmes les inventeurs. Les savans sont partagés sur ces trois questions. In Reimer's Übersetzung finde ich diese Stelle nicht; also ist sie wahrscheinlich ein verschlimmernder Zusatz in der zweiten Auflage. Zwar nennt das Tharikh-al-Hokma (Casiri I. 371) eine Übersetzung Diophant's ohne den Namen des Übersetzers

Digitized by Google

tereſſe ſein, indem ſie darthun würde, ob der Überſetzer das Werk Diophant's bereits in der verſtümmelten, oder noch in ſeiner vollſtändigen und reinen Urgeſtalt vor Augen gehabt hat; in dem letzteren Falle wären wir dann im Stande, dieſes unſchätzbare Werk des Alterthums wieder herzuſtellen, wie es mit ſo vielen Schriften der Griechen, von Archimedes, Apollonius und Andern, geſchehen iſt; der erſte Fall dagegen würde die Verſtümmelung des Werks noch bedeutend früher hinaufrücken, als wir es ſchon aus andern Gründen gethan haben. Aus dem bloßen Titel eines zweiten Werks deſſelben Arabiſchen Mathematikers, welcher lautet: „Beweiſe für die von Diophant in ſeinem Buche aufgeſtellten Sätze“ [39]) läßt ſich auf deſſen Inhalt nicht mit Sicherheit ſchließen. Sollten es etwa Beweiſe für die in den Porismen enthaltenen Sätze aus der Zahlentheorie ſein? Die hat aber doch Diophant wohl ſelbſt bewieſen. Daher iſt es wahrſcheinlicher, daß Abulwafa die in den Aufgaben zerſtreut vorkommenden, unbewieſenen Sätze mit Beweiſen verſehen hat. Iſt das der Fall, ſo folgt daraus mit ziemlicher Gewißheit, daß auch ſchon damals, im zehnten Jahrhundert, die Porismen nicht mehr vorhanden geweſen ſind. Indeß traue ich mir, wie geſagt, aus der bloßen Titelangabe hierüber kein Urtheil zu.

Verhältnißmäßig eben ſo ſpät iſt Diophant nach dem Wiederaufleben der Wiſſenſchaften in Europa bekannt geworden. Die oben angeführte Stelle aus Regiomontan's Antrittsrede zu Padua iſt die älteſte Erwähnung Diophant's im Occident, die bis jetzt bekannt geworden iſt. Indeß blieben noch lange Zeit alle Nachrichten über

---

(ديوفنطس اليوناني الاسكندراني فاضل كامل مشهور في وقته له في صناعة الجبر كتاب مشهور خرج الى العربية „Diophantus, der Grieche, aus Alexandria, ausgezeichnet, vollkommen, berühmt zu ſeiner Zeit; er hat über die Kunſtgriffe der Algebra ein berühmtes Buch geſchrieben, welches ins Arabiſche übergegangen iſt“); da aber derſelbe Verfaſſer an einer andern Stelle (p. 434) ausdrücklich Mohammed Abulwafa als Überſetzer nennt, ohne einer früheren Bearbeitung zu gedenken, ſo iſt, in Übereinſtimmung dieſer Nachricht mit Abulfaraj, der auch an keine andere Arbeit über Diophant denkt, nicht zu zweifeln, daß der Verfaſſer des Tharikh-al-Hokma auch an der beigebrachten Stelle die Überſetzung von Abulwafa im Sinne hat.

39) Casiri I. p. 434: كتاب البراهين على القضايا في ما استعمله ديوفنطس في كتابه

dieſen Auctor ganz unbeſtimmt. Beinahe hundert Jahre nach Regiomontan erwähnt Joachim Camerarius des Diophantiſchen Werks als in der Vaticaniſchen Bibliothek vorhanden, und iſt ſehr begierig es zu ſehen, hat aber, wie es ſcheint, darüber die verkehrte Anſicht, daß es die Logiſtik, das heißt, die praktiſche Rechenkunſt lehre [40]). Um dieſelbe Zeit ſpricht Jacob Peletarius von einem gewiſſen Griechen Diophant [41]). Wunderbar bleibt es indeß, daß nachdem deutſche Mathematiker ſeit 1470 und vielleicht früher von dem Daſein des Diophantiſchen Codex in Rom geſprochen hatten, dieſe Entdeckung den Italienern ſelbſt ganz entgangen zu ſein ſcheint. In der Reihe ihrer großen Mathematiker, Luca Pacioli (de Burgo), Tartaglia, Cardan, findet ſich keiner, der nur Diophant's Namen nennte. Der erſte Italiener, dem Diophant bekannt geworden zu ſein ſcheint, und der zugleich ernſtlich an eine Bearbeitung deſſelben gedacht hat, war Raphael Bombelli. Er hatte, wie aus ſeinen oben S. 263. mitgetheilten Worten hervorgeht, bisher von Diophant nichts gewußt. „Es hat ſich," ſo ſagt er im Jahre 1572, „in den jüngſt verfloſſenen Jahren ein Griechiſches Werk über Algebra in der Vaticaniſchen

---

40) De Graecis Latinisque numerorum notis et praeterea Saracenicis seu Indicis etc. etc. studio Joachimi Camerarii Papeberg. 1556. (ſ. oben Kap. V. S. 222. in der Literatur des Nikomachus). Hier heißt es in der Epistola ad Zasium ſo: Venit mihi in mentem eorum quae et de hac et aliis liberalibus artibus dicta fuere, in eo convivio cujus in tuis aedibus me et Peucerum nostrum participes esse, suavissima tua invitatio voluit. Cum autem de autoribus Logistices verba fierent, et a me *Diophantus* Graecus nominaretur, qui extaret in Bibliotheca Vaticana, ostendebatur tum spes quaedam, posse nobis copiam libri illius. Ibi ego cupiditate videndi incensus, fortasse audacius non tamen infeliciter, te quasi procuratorem constitui negotii gerendi, mandato voluntario, cum quidem et tu libenter susciperes quod imponebatur, et fides solenni festivitate firmaretur, de illo tuo et poculo elegante et vino optimo. Neque tu igitur oblivisceris ejus rei, cujus explicationem tua benignitas tibi commisit, neque ego non neminisse potero, non modo excellentis virtutis et sapientiae, sed singularis comitatis et incredibilis suavitatis tuae.

41) Arithmeticae practicae methodus facilis, per *Gemmam Frisium* etc. Huc acc. *Jacobi Peletarii* annotationes. Coloniae. 1571. (Die Vorrede von Peletarius hat aber das Datum Lutetiae. 1558.) S. p. 72. *Nota Peletarii:* Algebra autem dicta videtur a Gebro Arabe ut vox ipsa sonat; hujus artis si non inventore, saltem excultore. Alii tribuunt Diophanto cuidam Graeco.

Digitized by Google

Bibliothek vorgefunden, deſſen Verfaſſer ein gewiſſer Diophantes (sic) von Alexandrien iſt, der zur Zeit des Antoninus Pius lebte.“ Dieſes Manuſcript wurde ihm von einem gewiſſen Pazzi, einem damaligen Lehrer der Mathematik zu Rom, gezeigt, und nachdem ſie Beide gefunden, daß der Verfaſſer in der Arithmetik ſehr einſichtsvoll ſei (assai intelligente de' numeri), ſo beſchloſſen ſie das Werk zu überſetzen, um die Welt damit zu bereichern; wirklich hatten ſie bereits fünf von den vorhandenen ſieben Büchern überſetzt, da wurden ſie Beide durch anderweitige Arbeiten an der Vollendung verhindert. Dieſes Ereigniß fällt demnach einige Jahre vor 1572, dem Datum von Bombelli's Algebra, deren Vorrede jene Worte entlehnt ſind. Unterblieb nun gleich die beabſichtigte Bekanntmachung Diophant's, ſo nahm doch nichts deſto weniger Bombelli alle Aufgaben der vier erſten Bücher und einzelne aus dem fünften Buch in ſeine Algebra auf, und warf dadurch das erſte Licht auf dieſen bis dahin unbekannten Schriftſteller. Auch geſteht Bachet, daß Bombelli's Arbeit, obgleich er die Diophantiſchen Aufgaben mit ſeinen eigenen vermengt und den Auctor ganz frei behandelt habe, doch in manchen Stücken vor der Xylandriſchen Überſetzung den Vorzug verdiene und ihm oft behilflich geweſen ſei, um dieſe zu verbeſſern. Nur begeht Bachet hier einen Anachronismus, wenn er ſagt, Bombelli habe ſich erſt nach dem Erſcheinen der Xylandriſchen Interpretation an Diophant's Bearbeitung gemacht [42]). Xylander erhielt das Manuſcript, nach welchem er arbeitete, erſt 1571, nachdem alſo ſicher Bombelli, da ſchon im folgenden Jahre ſeine Algebra im

42) Epist. ad Lect.: Primus Guilielmus Xilander Augustanus, vir omnibus disciplinis excultus, Diophantum Latinum edidit etc. Und auf der folgenden Seite: Non longo post Xilandrum intervallo Raphael Bombellius Bononiensis, Graecum e Vaticana Bibliotheca Diophanti codicem nactus, omnes priorum quatuor librorum quaestiones, et e libro quinto nonnullas, problematibus suis inseruit, in Algebra sua quam Italico sermone conscripsit. Sed suas Diophanteis quaestionibus ita immiscuit, ut has ab illis distinguere non sit in promptu, neque vero se fidum satis intepretem praebuit, cum passim verba Diophanti immutet, hisque pleraque addat, pleraque pro arbitrio detrahat. In multis nihilominus interpretationem Bombellii, Xilandriana praestare, et ad hanc emendandam me adjuvisse ingenue fateor. Es iſt übrigens zu bemerken, daß der gelehrte Bachet den Namen ſeines Vorarbeiters immer unrichtig ſchreibt.

Digitized by Google

Druck erschienen ist, seine Arbeit über Diophant schon beendigt oder vielmehr aufgegeben hatte. Xylander's Übersetzung aber erschien gar erst 1575.

Wilhelm Xylander oder Holzmann, von armen Eltern aus Augsburg gebürtig, seit 1558 Professor in Heidelberg, machte im Jahre 1571 eine Reise nach Wittenberg, wo ihm von den dortigen Professoren Sebastian Theodorich und Wolfgang Schuler (oder Schüler, Lat. Schulerus) ein Bruchstück von einer Abschrift des Diophantischen Werks gezeigt wurde; zugleich wurde ihm Andreas Dudicius [43]) als Besitzer des vollständigen Codex genannt. Xylander schrieb sich eine Aufgabe ab, und nachdem er sie dem Arzte Simon Simonius aus Lucca mitgetheilt, schrieben beide gemeinschaftlich an Dudicius und baten ihn um Mittheilung des Codex. Dieser schickte ihnen die Handschrift ohne Verzug zu und ermunterte und bestärkte Xylander in seinem Vorhaben, dieselbe zu übersetzen. So erschien denn nach Verlauf von vier Jahren Diophant zum erstenmal vor dem Publicum unter dem Titel: ***Diophanti Alexandrini*** Rerum Arithmeticarum libri sex, quorum primi duo adjecta habent scholia Maximi (ut conjectura est) Planudis. Item liber de numeris polygonis seu multangulis. Opus incomparabile, verae Arithmeticae Logisticae perfectionem continens, paucis adhuc visum. A ***Guil. Xylandro*** Augustano incredibili labore latine redditum et Commentariis explanatum, inque lucem editum ad Illustriss. Principem ***Ludovicum Wuirtembergensem.*** Basileae per Eusebium Episcopium et Nicolai Fr. haeredes. 1571. (fol.). Xylander's Arbeit bleibt immer, trotz der mancherlei Mängel, welche bei der ersten Bearbeitung eines so schwierigen Auctors, überdies nach einem einzigen fehlerhaften Manuscripte unvermeidlich waren, höchst verdienstvoll, und verdient nicht den harten Tadel, den sie hie und da erfahren hat. Zwar hat Xylander manchmal seinen Auctor nicht verstanden, Man-

43) Xylander schreibt: Andreas Dudicius Sbardellatus, hoc tempore Imperatoris Romanorum apud Polonos orator. (Schulz a. a. O. S. XXXIII). Ich weiß nicht, was der Zusatz Sbardellatus zu bedeuten hat; nach den folgenden Worten scheint der Mann kaiserlicher Gesandter am Polnischen Hofe gewesen zu sein, und nicht Polnischer Starost, wie Cossali I, 67 sich ausdrückt: Polacco starosta Sbardellato; und ebend. p. 50 kehrt Cossali das ganze Verhältniß um, und nennt ihn nobile polacco presso l'imperial corte oratore.

Digitized by Google

ches entſtellt (z. B. Def. 7. 8.), zwar iſt ſeine Überſetzung rauh und unlateiniſch, indem er ſich aus Furcht zu fehlen gar zu ängſtlich an den Buchſtaben des Originals hält; aber das Reſultat war darum nicht weniger glänzend. Das mathematiſche Publicum hatte Diophant's Werk, und wie einflußreich ſofort das Erſcheinen dieſer Überſetzung auf die Entwickelung und Geſtaltung der Algebra einwirkte, werden wir zu beobachten Gelegenheit haben, wenn wir an dieſem Puncte unſerer Geſchichte werden angelangt ſein.

Man findet zuweilen [44]) die falſche Angabe, daß Xylander auch das Griechiſche Original herausgegeben habe. Es ſcheint das aber auf einem Mißverſtändniſſe zu beruhen, indem Xylander an manchen Stellen des Commentars auf das Original hindeutet, welches er wahrſcheinlich herauszugeben beabſichtigte. Übrigens war ſchon Bachet über dieſen Punct in Zweifel, er ſchreibt in ſeiner oft von mir citirten *Epistola ad Lectorem:* **An vero et Graece a Xilandro editus sit Diophantus, nondum certo comperire potui. Videtur sane in multis suorum Commentariorum locis, de Graeco Diophanto tanquam a se edito, vel mox edendo, verba facere. Sed hanc editionem, neque mihi vidisse, neque aliquem qui viderit hactenus audivisse contigit.** Vielleicht wurde Xylander an der Edition des Textes durch ſeinen frühen Tod, der ſchon am 10. Februar des folgenden Jahres, 1576, erfolgte, verhindert.

Vielleicht gleichzeitig, oder etwas ſpäter, aber noch im ſechszehnten Jahrhundert, ſcheint der Neapolitaniſche Mathematiker Joſeph Auria Diophant's Schriften ins Lateiniſche überſetzt, aber nicht durch den Druck bekannt gemacht zu haben. Nach Schulz [45]) iſt der Titel der Schrift: **Diophanti libri sex, cum scholiis graecis Maximi Planudae, atque liber de numeris polygonis, collati**

---

44) Z. B. Mönnich II. 472. „Xylander hat ihn, nach einer ihm von Dudilius (sic), Kaiſerlichen Geſandten am Polniſchen Hofe, mitgetheilten Handſchrift, nebſt einer Überſetzung davon, mit Kommentarien 1575 herausgegeben. Aber dieſe Ausgabe iſt von denen, welche Bachet de Megiriac (sic) 1611 (sic) und Fermat 1670 veranſtalteten, weit übertroffen worden.

45) Vorr. S. XLIII. „Noch erwähnen die Litteratoren, daß ſich in der Bibliothek eines Carl von Montchall eine Bearbeitung des Diophantus von dem berühmten Mathematiker Joſeph Auria von Neapel (vermuthlich doch nur handſchriftlich) befunden habe, welche den Titel führt u. ſ. w." ſ. o.

Digitized by

cum Vaticanis codicibus, et latine versi a *Josepho Auria.* Bei Heilbronner finde ich unter den Handschriften der Ambrosischen Bibliothek zu Mailand [46]): Diophanti arithmet. libri et de num. polygonis, Josepho Auria interprete. Nach Jöcher [47]) hat er, was unwahrscheinlich ist, nur die Schrift über die Polygonalzahlen übersetzt. Sonst habe ich über diese Arbeit keine Nachrichten finden können; selbst Cossali erwähnt ihrer nicht.

Ich übergehe hier solche Arbeiten über Diophant, welche nicht ihn als Auctor, sondern nur die von ihm behandelten Sachen als Gegenstand mathematischer Untersuchungen angehen. Der Art sind die Arbeiten von Vieta in seinen Zeteticis, ferner von Stevin, Oughtred, Billy, Ozanam und Andern, von denen in der Geschichte ihrer Zeit die Rede sein wird. Demnach haben wir hier nur noch folgende Ausgaben und Übersetzungen zu nennen.

Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum Graece et Latine editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati. Auctore *Claudio Gaspare Bacheto Mexiriaco* Sebusiano. Lutetiae Parisiorum, sumptibus Sebastiani Cramoisy. 1621. fol. Es ist dieses die erste, oder eigentlich einzige Ausgabe des Griechischen Originals, die ihrem Bearbeiter alle Ehre macht. Mit unermüdlichem Fleiße, inmitten eines langwierigen Fiebers [48]), hat Bachet die mannigfachen Hindernisse, welche die Schwierigkeit des Auctors auf einer, die Verderbtheit und Uncorrectheit der Manu-

46) Hist. math. univ. p. 563. §. 90.

47) Gelehrten-Lexicon: „AURIA (Joseph), ein berühmter Mathematikus von Neapolis, war um das Jahr 1590 bekannt, ... übersetzte *Diophantis* (sic) Alexandrini Werck de numeris polygonis und Heronis Alexandrini Bücher aus dem Griechischen ins Lateinische, gab auch *Autolycum* de sphaera quae movetur etc. etc. mit neuen Übersetzungen heraus. To. Ol." Also ist doch Diophant's und Heron's Werk nicht herausgegeben. Die Citate bedeuten: Toppi bibliotheca napoletana und Oldoin Athenaeum romanum (oder Ath. ligusticum).

48) *Montucla* I. 323: L'historien de l'Académie Françoise nous apprend que M. Bachet y travailla durant le cours d'une fièvre quarte, et qu'il disoit lui-même que, rebuté de la difficulté de ce travail, il ne l'auroit jamais achevé sans l'opiniâtreté melancolique que sa maladie lui inspiroit.

ſcripte auf der andern Seite ihm in den Weg legten, überwunden; und ſein gelehrter, nur manchmal zu weitläuftiger Commentar beweiſt nicht nur, wie tief er ſich in ſeinen Auctor hineingearbeitet, ſondern hat auch nicht wenig zu dem allgemeinen Verſtändniſſe und zur nähern Bekanntſchaft der Mathematiker mit den Eigenthümlichkeiten Diophant's beigetragen. Zumal gilt dieſes auch von den drei Büchern **Porismatum**, welche er dem Texte vorausgeſchickt hat, und die Manches enthalten, was zu jener Zeit neu war, ebenſo wie die am Ende angehängten **Appendicis ad librum de numeris polygonis libri duo**, in welchen er die Diophantiſche Theorie weiter fortführt. Bachet hat, wie oben (Note 24) erwähnt iſt, die Ausgabe nach einem Codex der Königlichen Bibliothek zu Paris veranſtaltet, den er mit dem Palatiniſchen und einem Vaticaniſchen, ſowie mit der Xylanderſchen Überſetzung verglichen hat, welche alle aber wunderbar in allen Lücken und Fehlern übereinſtimmten, ſo daß er oft zu Conjecturen hat ſeine Zuflucht nehmen müſſen. Indeß iſt er dabei ſehr gewiſſenhaft zu Werke gegangen, und hat jede Einſchaltung, zu der er ſich, um einen Sinn in den Text zu bringen, genöthigt ſah, durch Klammern, [ ], und ſolche Worte, die ihm corrumpirt oder überflüſſig ſchienen, durch Sternchen eingeſchloſſen, ſo daß man ſeine Conjecturen von dem Texte immer genau unterſcheiden kann. Wo es nöthig war, hat er ſich über dieſe Verbeſſerungen oder über Vorſchläge zu ſolchen, auch in den Anmerkungen ausgeſprochen. Die Mängel, welche dieſe Ausgabe noch behalten hat, ſind nicht Schuld des Herausgebers, ſondern leider bedingt durch die ſchlechte Beſchaffenheit der Hilfsmittel, und ſo haben wir denn auch vorläufig noch keine genügendere Ausgabe dieſes Mathematikers zu erwarten.

Die Bachet'ſche Ausgabe iſt die einzige, welche ſich auf die Autorität von Handſchriften ſtützt. Ein bloßer Abdruck derſelben iſt folgender:

Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Cum Commentariis *C. G. Bacheti* et observationibus D. *P. de Fermat* Senatoris Tolosani. Accessit doctrinae Analyticae inventum novum, collectum ex variis ejusdem D. de Fermat Epistolis. Tolosae. 1670. fol. Unter der Vorrede nennt ſich **S. Fermat** (Samuel), der Sohn des auf dem Titel genannten berühmten Mathematikers,

Digitized by Google

als Herausgeber. Was dieser Abdruck an äußerer Eleganz gewonnen hat (denn die Bachet'sche Ausgabe ist mit äußerst unangenehmen, namentlich Griechischen Lettern gedruckt), das hat sie an innerm Werthe in Bezug auf den Text verloren. Sie ist nicht bloß voller Druckfehler in einzelnen Worten und Zeichen (z. B. durchgehends π statt $\mathfrak{H}$, 900) sondern auch ganze Zeilen sind ausgelassen oder doppelt gedruckt, (z. B. **III**, 12 eine Zeile doppelt, **IV**, 25 eine doppelt und gleich hinterher eine ausgelassen, **IV**, 52 eine doppelt, **V**, 11 eine ausgelassen, desgleichen **V**, 14. 25. 33, **VI**, 8. 13 u. s. w.), die Zahlen verstümmelt, was aber das Ärgste ist, die Bachet'schen kritischen Zeichen sind fast überall, die Klammern durchgängig weggefallen, so daß diese Ausgabe als Text des Diophant völlig unbrauchbar geworden ist. Dagegen erhält sie mathematischen Werth durch die sehr geschätzten **Observationes** von Fermat, von denen zu ihrer Zeit die Rede sein wird.

In dem Zeitraum von 1670 bis 1810 ist direct für Diophant nichts gethan worden. In dem letzgenannten Jahre erschien

Diophantus von Alexandrien über die Polygon-Zahlen. Übersetzt mit Zusätzen von F. Th. Poselger. Leipzig. 1810. 8. mit sehr schätzbaren Anmerkungen und Mittheilungen über den vom Auctor behandelten Gegenstand.

Noch mehr Anerkennung aber verdient die Bemühung des rühmlichst bekannten Professor Otto Schulz in Berlin, welcher uns in einer sehr vorzüglichen Übersetzung endlich den ganzen Diophant deutsch gegeben hat unter dem Titel:

Diophantus von Alexandria arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon-Zahlen. Aus dem Griechischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von Otto Schulz. Berlin. 1822. 8.

Das eben erwähnte Werk von Poselger ist mit Genehmigung des Letztern in diese Gesammtübersetzung aufgenommen, wofür jeder Liebhaber des Diophant beiden Männern Dank wissen wird. Die Übersetzung des Ganzen ist treu, ohne durch zu ängstliche Nachahmung des Originals in unwesentlichen Dingen ungenießbar zu werden. Die erläuternden Anmerkungen, welche einen bedeutenden Theil des ziemlich starken Octavbandes einnehmen, beziehen sich der großen Mehrzahl nach auf den Inhalt, und geben nur selten Andeutungen über etwanige Verbesserungen im Texte. Der Übersetzer ist nicht

Digitized by

Mathematiker von Profession, deßungeachtet werden seine Anmerkungen Manchem das Verständniß des Schriftstellers erleichtern, und ihn auf den richtigen Standpunct zur Beurtheilung desselben stellen [49]). Es wäre in der That wünschenswerth, daß wir erst von allen Griechischen Mathematikern, wenigstens von den wichtigern, solche Übersetzungen hätten, wie von Diophant, Archimedes und Euklid's Elementen.

Ich will hier noch eine Frage vorausnehmen, welche eigentlich erst aufgeworfen und beantwortet werden sollte, nachdem wir uns in einer übersichtlichen Darstellung mit dem Inhalte der Diophantischen Schriften bekannt gemacht haben, die ich aber theils darum hier anticipire, weil sie ihrer Natur nach in diesem rein historischen Abschnitte einen Platz sucht, theils, weil ich fürchte, daß sie am Ende des Ganzen sich zu sehr vereinzeln könnte. Es ist nämlich die Frage, ob Diophant der Erfinder der algebraischen Methode bei den Griechen sei. Es ist kaum mehr der Mühe werth einen oft widerlegten Ausspruch Bombelli's noch einmal zu widerlegen, den nämlich, daß Diophant im Verlaufe seines Werks Indische Auctoren citire. Bombelli hat den Text des Diophantus nicht hinlänglich sorgsam von den Scholien des Planudes gesondert; in letzteren werden allerdings die Inder genannt, und zwar ihre Multiplicationsmethode [50]); diese Erwähnung darf uns auch bei einem Schriftsteller nicht Wunder nehmen, welcher selbst ein leider noch nicht edirtes Werk geschrieben unter dem Titel: ψηφοφορία κατ' Ἰνδους ἡ με-

---

49) Ich weiß nur ein Beispiel anzuführen, in welchem der gelehrte Verfasser, durch eine Übereilung selbst verleitet, den Leser irre führt, was er gewiß längst schon selbst bemerkt hat; es ist eine Anmerkung zu V, 14. S. 524. 525. Diophant's Determination ist da in der That nicht ausreichend, und einem Manne wie Schulz sieht man's gerne nach, wenn er aus Versehen in der Formel $3n+2$ die Bedingung einer ungeraden Zahl sieht.

50) S. die Übers. v. Xylander, Def. IX: Ut ostendatur, quo pacto penuria in penuriam ducta, copiam; in copiam ducta penuriam procreet,

γάλη λεγομένη. Kein Citat der Art aber findet ſich in irgend einer Stelle des Diophantiſchen Textes, da dieſer Auctor im Allgemeinen das Citiren nicht liebt. Überhaupt iſt jedenfalls die Annahme irgend eines von auswärts ausgegangenen Einfluſſes auf Diophant's Werk unſtatthaft, und die Frage kann hier nur ſein, ob Diophant unter den Griechen directe Vorgänger gehabt habe, welche durch ſein hervorragendes Genie verdunkelt und verdrängt worden ſind [51]). Diejenigen, welche Diophant für den erſten und alleinigen Erfinder der Algebra zu halten geneigt ſind, ſtützen ſich beſonders auf eine Stelle ſeiner Vorrede, welche die in dem folgenden Werke vorgetragenen Sachen als neu bezeichnet. Um dieſe Stelle in ihrem vollſtändigen Zuſammenhange beurtheilen zu können, gebe ich hier die ganze Vorrede: Τὴν εὕρεσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, τιμιώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων, ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν οἶν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαὶ, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται διὰ τὴν σὴν προθυμίαν καὶ τὴν

---

non *Indicam* hic multiplicandi rationem, quae inversum Graecanici moris ordinem sequitur, sed nostram tenebimus. S. Schulz Vorrede S. XXIX.

51) Solche ſpurloſe Verdrängungen früherer Werke durch ſpätere, welche dieſelben ſehr überragen, liegen ganz in der Ordnung der Dinge, ſo lange Bücher nur noch als Manuſcripte exiſtiren. Wir haben Ariſtäus und Anderer Werke über die Kegelſchnitte nicht erhalten, weil ſie von Apollonius übertroffen wurden, und man nachgehends nur dieſes vollſtändigere, vorzüglichere Werk abzuſchreiben ſich die Mühe nahm. Eben darum ſind die aſtronomiſchen Arbeiten von Hipparchus durch die vollſtändigeren des Ptolemäus verdrängt worden, und es heißt allen natürlichen Zuſammenhang hiſtoriſcher Thatſachen umkehren, wenn Schöll (Geſchichte der griechiſchen Literatur, deutſch von Pinder. Bd. II. S. 702) ſagt: „Überhaupt verdankt Ptolemäus einen Theil der übertriebenen Verehrung, welche ihm gezollt worden iſt, der Seltenheit der hipparchiſchen Schriften, welche unmittelbar nach ſeinen Lebzeiten verloren gegangen ſind." — Die Hipparchiſchen Schriften ſind vielmehr umgekehrt darum verloren gegangen, weil man dem Ptolemäus eine ſo große und allgemeine, und wenn man will, übertriebene Verehrung zollte.

Digitized by Google

ἐμὴν ἀπόδειξιν· ταχεῖα γὰς εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν. d. h. „Da ich sehe, daß Du, mein geehrtester Dionysius, eifrig bemüht bist, die Auflösung der arithmetischen Probleme zu erlernen, so habe ich die Methode systematisch darzustellen (ὀργανῶσαι) versucht, indem ich mit den Grundlagen beginne, auf welchen die Operationen beruhen, nämlich mit der Entwickelung der den Zahlen eigenthümlichen Natur und Eigenschaft (δύναμις). Vielleicht nun erscheint die Sache etwas schwierig, da sie noch nicht bekannt ist, denn die Gemüther der Anfänger haben auf das Gelingen wenig Hoffnung. Aber es wird Dir doch leicht faßlich werden durch deinen Eifer und durch meine Darstellung; denn Eifer, der die Unterweisung zu Hilfe nimmt, führt schnell zur Wissenschaft." — Nun fragt sich, giebt Diophant hier seine vorzutragende Lehre so geradezu und unzweifelhaft für etwas ganz Neues, noch gar nicht vorhanden Gewesenes aus? Ich denke vielmehr, die Worte ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι stehen ganz subjectiv da, nur in Bezug auf den Schüler, den der Verfasser vor sich hat. Es wird, sagt Diophant, dem Schüler immer schwer etwas zu lernen, das seinem Wesen nach ihm noch neu ist. Dieser Sinn der in Rede stehenden Worte wird meiner Meinung nach ganz unzweideutig bestätigt durch den Zusatz: δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαί. Dem Anfänger, sollte ich meinen, wird die Erlernung einer Sache nicht dadurch erschwert, daß diese wirklich noch objectiv neu ist, sondern die Schwierigkeit für ihn entsteht nur aus der Neuheit, welche die Sache für ihn hat. Ja, der Anfang der Vorrede sagt ja ganz deutlich, daß Dionysius schon von Aufgaben der Art gehört hatte; Diophant führt ihn ja nicht aus eigenem Lehrertriebe, sondern von Jenem dazu aufgefordert in das Gebiet der arithmetischen Aufgaben ein. Und was hat denn nun, als die Aufforderung an ihn ergangen war, Diophant gethan? Ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην „ich habe versucht die Methode systematisch darzustellen, zu ordnen." Darin liegt doch ganz klar, daß der Stoff wenigstens zum Theil, daß einzelne Methoden zur Auflösung solcher Probleme bereits vorhanden waren; er hat ja nur organisirt, systematisch angeordnet, was factisch hie und da zerstreut vorhanden war; er hat, wie es weiterhin heißt, die Sache so geordnet, wie er glaubt, daß sie für Anfänger am faßlichsten sei. Dieses schließt indeß keineswegs die Möglichkeit aus, daß Diophant

Digitized by Google

auch an dem Inhalt ſeines Werks, an den vorgetragenen Sachen und Methoden, einen bedeutenden eigenen Antheil habe, und ein groſser Theil des Gegebenen von ihm ſelbſt herrühre. So folgt denn wohl ſchon aus dieſer Stelle, auf welche gewöhnlich die Hypotheſe baſirt wird, daß Diophant der Erfinder der Algebra geweſen, gerade das Gegentheil. Und dieſe auf die Deutung der Vorrede in obigem Sinne geſtützte Anſicht, in der ich übrigens von ſehr achtbaren Autoritäten unterſtützt werde [52]), erhält noch mehr Wahrſcheinlichkeit durch die Art und Weiſe, wie Diophant die Fundamente ſeiner Rechnungen auseinanderſetzt. Das Werk beginnt näm-

---

52) Ganz die von mir entwickelte Anſicht hat Schulz, Vorr. XXII — XXIV ausgeſprochen („Es iſt aber nichts als Mißverſtändniß eines flüchtigen Leſers, wenn man hinzuſetzt, Diophantus eigne ſich ſelbſt die Erfindung der Analyſis zu u. ſ. w."). Coſſali iſt auch der Meinung, daß Diophant nicht der Erfinder der Algebra ſei; was aber ſo eigentlich ſeine Meinung iſt, geht aus ſeinem Räſonnement T. 1. p. 82. 83 nicht ſo recht hervor. Erſt ſagt er: La parola *fabricari* (Bachet's Überſetzung von ὀργανῶσαι), l' asserzion *ignotum adhuc* dimostrano a tanto luce, che Diofanto va a fare qualche cosa di nuova, che bisognerebbe non aver occhi per non vederlo; wo er alſo das μήπω γνώριμον in dem Sinne von etwas abſolut Neuem nimmt. Nachdem er nun eine Weile mit Montucla gezankt, fährt er ſo fort: A me par troppo il dire, che da quelle espressioni non ne esca alcun lume; mi pare troppo il restingere la novità, che annunziano, al metodo, che nell' opera di Diofanto regnar si mira; ma parmi anche troppo il dedurne essere stato Diofanto in assoluto senso inventor dell' analisi. Es kommt am Ende weiterhin darauf hinaus, daß er die Algebra der beſtimmten, ſelbſt der quadratiſchen Gleichungen als vor Diophant vorhanden annimmt. Und ungefähr in demſelben Sinne ſpricht ſich Colebrooke (Note M. p. LXII) aus: It is rather to be inferred, as Cossali does, from the compendious way in which the principles of Algebra are delivered, or alluded to, by him, that the determinate analysis was previously not unknown to the Greeks, wheresoever they got it; and that Diophantus, treating of it cursorily as a matter already understood, gives all his attention to cases of indeterminate analysis in which perhaps he had no Greek precursor (Coss. Orig. dell' Alg. I. 4. §. 10). He certainly intimates, that some part of what he proposes to teach is new: ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι. while in other places (Def. 10) he expects the student to be previously exercised in the algorithm of Algebra. The seeming contradiction is reconciled by conceyving the principles to have been known, but the application of them to a certain class of problems concerning numbers to have been new.

Digitized by Google

lich mit elf Sätzen, die zum Theil Erklärungen, zum Theil die einfachen Lehrsätze für die algebraischen Operationen, den Algorithmus enthalten (wiewohl sie in den Ausgaben sämmtlich **Definitiones** überschrieben sind), und die Kürze und Beiläufigkeit, welche aus diesen Erklärungen und Erläuterungen der Elemente spricht, deutet jedem Unbefangenen ganz klar an, daß Diophant hier nichts Neues lehre, sondern nur Bekanntes ins Gedächtniß rufe. Nachdem er in **Def. I.** über die Potenzen gesprochen, fährt er **Def. II.** fort: *Καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῇ σημεῖον τὸ Δ ἐπίσημον ἔχον υ, Δ^υ*, und ebenso bei den folgenden. Das war also doch ganz gewiß schon zu seiner Zeit gebräuchlich. Ja selbst die Bezeichnuug der Unbekannten führt er nicht anders ein: *ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογον* (bei Bachet unrichtig *ἄλογος*) *ἀριθμὸς καλεῖται, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ς'*, wo *πλῆθος μονάδων ἄλογον* nicht, wie Bachet im Euklidischen Sinne des *ἄλογος* übersetzt, multitudo unitatum *rationis expers*, sondern eine unbekannte Menge von Einheiten bedeutet. In **Def. IX.** hält Diophant es nicht für nöthig, einen Satz, der selbst spätern Mathematikern so viel Kopfbrechen verursachte, den nämlich, daß Negatives mit Negativem multiplicirt Positives gebe, auch nur mit einer Sylbe zu erläutern, sondern er sagt, als spräche er von einer Sache, die sich längst von selbst versteht: *Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν· λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.* Die Divisionsregeln in allgemeinen Ausdrücken giebt er gar nicht, weil sie, wie er meint, dem Schüler schon aus den **Def. IV.** bis **IX.** vorgetragenen Multiplicationsregeln klar sein müssen. Nachdem er nun in der zehnten Definition ermahnt hat, in den Rechnungen mit algebraischen Ausdrücken sich fleißig zu üben, namentlich in Operationen mit mehrgliedrigen Größen, von denen er vorher gar nichts gesagt hat (*καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας, συνθέσει καὶ ἀφαιρέσει καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γεγυμνάσθαι· καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα καὶ λείποντα, μὴ ὁμοπληθῆ, προσθήσεις ἑτέροις εἴδεσιν ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι· καὶ πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν καὶ ἑτέρων λειπόντων ἀφαιρήσεις ἕτερα ἤτοι ὑπάρχοντα ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα*), und sich dann erst an die Auflösung von Aufgaben zu machen, so lehrt er eben so kurz und gleichfalls nur

wie

wie eine Nebensache in der elften Definition, wie man eine gegebene Gleichung auf die einfachste Form bringen könne. Man ersieht aus dem Allen, daß Diophant die Elemente der Algebra nicht lehrt, sondern voraussetzt und nur im Vorbeigehen daran erinnert um den Schüler zu veranlassen, daß er sich in denselben recht festsetze, weil er in seinem Werke sich derselben als Hilfsmittel der Untersuchung bediene. Nicht ebenso setzt er die Bekanntschaft mit den quadratischen Gleichungen voraus; die Auflösung dieser verspricht er, am Ende der **Def. XI.**, zu lehren, wie wir oben gesehen haben.

Demnach stellt sich in Bezug auf die aufgeworfene Frage ungefähr folgendes Resultat heraus. Die algebraische Methode war vor Diophant erfunden, und er durfte, als er davon Gebrauch machen wollte, an die Hauptregeln derselben, so wie an die Auflösung der Gleichungen des ersten und der reinen Gleichungen des zweiten Grades nur kurz erinnern. Ob die Auflösung der gemischten quadratischen Gleichungen seine Erfindung war, können wir nicht bestimmen, wenigstens glaubt er sie nicht ebenso unerläutert voraussetzen zu dürfen. Die Behandlung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades sind der Hauptzweck seines Werks; es fehlen uns aber auch hier die historischen Elemente und Mittelglieder, um entscheiden zu können, wieviel davon ihm selbst angehört, und was er etwa schon als Stoff vorgefunden hat.

Zu diesen aus der Betrachtung des Diophantischen Werks hervorgegangenen Resultaten nun noch einige Zusätze von außen her. Was zunächst den ersten von mir ausgesprochenen Satz anbelangt, so ist wohl an dessen Wahrheit auch aus äußeren Gründen nicht zu zweifeln. Algebra ist, wie ich oben schon einmal berührte, weiter nichts, als die Anwendung der den Griechen seit Platon's Zeit bereits bekannten Methode der geometrischen Analysis auf die Rechnung [53]). Das Princip der Algebra war also in seiner Anwendung

53) Ganz richtig faßt diese Beziehung Dechales (Cursus Math. T. I. p. 8. 29.) auf, dessen Theorie überhaupt viel besser ist, als seine Geschichte. An der ersten Stelle heißt es von Plato: Modumque demonstrandi analyticum invenit, nempe supponendo quod quaeritur factum esse et duri, quae methodus dici potest Algebra quaedam naturalis, et Algebrae artificialis seminarium fuit. Und p. 29. Plato Socratis auditor modum demonstrandi analyticum invenit, nempe prima Algebrae fundamenta jecit. Und ebend.

Digitized by Google

auf die Geometrie den Griechen längſt gegeben. Die Schwierigkeit, daſſelbe auf Zahlenoperationen anzuwenden, lag nur darin, daß man nicht ſo leicht, wie in der Geometrie, auf ein Mittel verfiel, eine von allen unweſentlichen Accidentien befreite Zahl darzuſtellen, wie man es in der Geometrie durch Hinzeichnung einer willkührlichen von allen beſchränkenden Vorausſetzungen befreiten Figur vermochte. Man zeichnete z. B. willkührlich ein Dreieck, und ſagte: geſetzt dieſes ſei das geſuchte Dreieck; an dem ſo beliebig angenommenen Dreiecke operirte man alsdann rückwärts, indem man von dem als bereits vorliegend gedachten Geſuchten, vermöge der gegebenen Bedingungen der Aufgabe, auf das Verhältniß der Abhängigkeit des Geſuchten von dem Gegebenen durch fortgeſetzte Schlüſſe zu gelangen ſich bemühte. Wie ſollte man dagegen ebenſo allgemein eine Zahl darſtellen, ohne ihr gleich bei der Annahme einen beſtimmten Werth beizulegen? Die Buchſtaben des Alphabets, als geläufige Schriftzüge, lagen hier am nächſten; aber an jeden Buchſtaben knüpfte die Einbildungskraft aus Gewohnheit einen beſtimmten Zahlbegriff. Es blieb nichts Anderes übrig, als entweder ein willkührlich gewähltes Zeichen ſich zu ſchaffen, oder den einzigen Buchſtaben des Griechiſchen Alphabets, deſſen Zug keinen conventionellen Zahlenwerth in ſich begriff, zu dieſem Zwecke zu verwenden, nämlich das Finalſigma,

---

vorher: Algebra quae analytica dici potest, eo quod per Analysin procedat, nempe id quod quaeritur jam quasi cognitum et datum supponat etc. etc. — Unnöthig, wie es ſcheint, iſt der Unterſchied, den Bezout (Cours de Math. T. III. 1768. Préf. p. III. IV.) zwiſchen Analyſis und Algebra macht: La méthode qu'on appelle *Analyse*, est celle qui enseigne à trouver ces regles, et l'instrument qu'elle emploie pour y parvenir, s'appelle *l'Algèbre*. — Ganz falſch dagegen iſt die Definition von Analyſis in Klügel's Mathem. Wörterbuch Th. 1. S. 77. „Analyſis, als wiſſenſchaftliches Syſtem, iſt die allgemeine Darſtellung und Entwickelung der Zuſammenſetzungsarten der Größen durch Rechnung. Sie behandelt alle Größen wie Zahlen, aber als unbeſtimmte in Abſicht auf die Einheit und die Menge der Einheiten. Dadurch unterſcheidet ſie ſich von der Geometrie, welche die ausgedehnten Größen u. ſ. w. mit einander vergleicht, ohne ſie als Vielheit von irgend einer Einheit und Theilen der Einheit zu betrachten." — Die Analyſis gehört weder ausſchließlich der Rechnung, noch ausſchließlich der Geometrie an, ſondern ſie iſt eine Methode, die in allen mathematiſchen, ja ſelbſt in den philoſophiſchen Disciplinen ihre Anwendung findet.

Digitized by Google

c. Und man hat das Letztere wirklich gethan. Wann aber dieser Schritt geschehen ist, und von Wem, das läßt sich jetzt aus gänzlichem Mangel an vorhandenen Quellen nicht mehr bestimmen. Nur soviel läßt sich mit ziemlicher Gewißheit behaupten, daß diese so nahe liegende Anwendung so weit hinausgeschoben wurde wegen des erwähnten für diesen Zweck ungünstigen Verhältnisses des Griechischen Alphabets zu den Zahlen. Eine Spur von Unterscheidung unbekannter und gegebener Zahlen finden wir in dem aus Jamblichus oben mitgetheilten Epanthema des Thymaridas, welches gleich so anfängt: ὡρισμένων γὰρ ἢ ἀορίστων μεμερισμένων ὡρισμένον τι etc. „Wenn gegebene oder unbekannte Zahlen zusammen einer gegebenen gleich sind [54])." Ja, die ganze Regel des sogenannten Epanthema beruht auf der Anschauung algebraischer Zahlenausdrücke, zu welchem Ende ich zu vergleichen bitte, was ich im vorigen Kapitel über dasselbe gesagt habe. Jamblichus giebt uns ferner, wie wir gleichfalls gesehen haben, die Auflösung zweier Aufgaben, deren jede auf drei Gleichungen des ersten Grades mit vier Unbekannten führt, aber freilich ohne algebraische Bezeichnung, bloß in Worten, jedoch ganz im Sinne der Diophantischen Algebra. Somit ist denn, wenn wir diese Thatsachen mit dem zusammenstellen, was wir eben über Diophant's Definitionen gesagt haben, nicht daran zu zweifeln, daß die Anwendung der analytischen Methode auf die Rechnung vor Diophant in Gebrauch gewesen, mit andern Worten, daß Diophant nicht der Erfinder der Algebra ist. Woher es nun gekommen, daß die vor ihm vielleicht vorhandenen Werke selbst bis auf den Namen untergegangen sind, als das vollständigere und glänzendere Diophant's sich erhob, und warum deshalb auch die Araber keines der Art nennen, habe ich oben angedeutet. Daß aber Diophant keinen seiner etwanigen Vorgänger

54) S. S. 233. Ἀόριστος ist auch bei Diophant der Ausdruck für eine durch das Zeichen der Unbekannten ausgedrückte Zahl; z. B. IV. 20. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μο̄ ᾱ ποιῇ τετράγωνον, d. h. Drei Zahlen in unbestimmten Ausdrücken zu finden, so daß das Product von je zweien zu der Einheit addirt ein Quadrat macht; und Diophant findet, in unsern Zeichen ausgedrückt, als Resultat die drei Zahlen x, $x + 2$, $4x + 4$. Ähnliche Beispiele s. IV. 37. 39. 41. V. 21. VI. 12.

nennt, darf uns bei ſeiner Vortragsweiſe und bei dem Zwecke, den er verfolgt, nicht wundern [55]). Er will Anfänger unterrichten, nicht in der Zahl der Gelehrten glänzen.

Aber auch ſeine unbeſtimmten Aufgaben des zweiten Grades ſind nicht alle von ihm, vielmehr hat er auch hier ſeine Vorarbeiter gehabt. Seine Aufgabe **II. 8. 9.** iſt, nur beſſer dargeſtellt, identiſch mit Euklid's Lemma zu **X. 29.**, einer Theorie, durch welche, wie wir oben geſehen haben, Pythagoras bereits den erſten Grund zur unbeſtimmten Analytik des zweiten Grades gelegt hat. Ein anderes Beiſpiel von der Auflöſung unbeſtimmter Probleme des zweiten Grades gab uns Theon von Smyrna, indem er ganze rationale Werthe für x und y in der Gleichung $2x^2 \pm 1 = y^2$ finden lehrte. Es folgt aus dieſen, wenngleich immerhin ſpärlichen Datis, zum Mindeſten ſoviel, daß die Sache bereits angeregt war, und daß es nur eines Genie's wie Diophantus bedurfte, um aus den einzelnen zerſtreuten Brocken ein großes ſyſtematiſches Ganze zuſammenzufügen. Nicht unbedeutenden Stoff gab ihm endlich die ſeit lange ſchon behandelte, in ſeinem ganzen Werke eine ſo wichtige Rolle ſpielende Theorie der Polygonzahlen zu ſeinen Unterſuchungen in Menge her. Indeß füge ich, um allen Mißverſtändniſſen vorzubeugen, hinzu, daß ich weit entfernt bin durch die angeführten Thatſachen Diophant's Ruhm ſchmälern zu wollen, oder ſelbſt zu glauben, daß dieſer große Mathematiker nur bereits Gegebenes verarbeitet habe. Gegentheils bin ich der feſten Überzeugung, daß bei weitem der größte Theil ſeiner Sätze, namentlich aber ſeine ſo ſehr ſcharfſinnigen Methoden ihm ſelbſt angehören. Es ſpricht dafür theils der ganz ſubjective Scharfſinn, der ſeine Auflöſungen durchdringt, und der durchaus einem einzigen Individuum anzugehören ſcheint, theils aber auch

---

55) Darnach iſt zu beurtheilen, was Andres in ſeiner Geſchichte der Italieniſchen Literatur ſagt: **Osservo in oltre, che ni Diofanto nei moltissimi problemi, che si propone e scioglie non cita mai verun altro matematico, chi n'abbia cercata la soluzione; né vedesi da' greci posteriori citato altro scrittore di tale scienza anteriore a Diofanto; nè gli Arabi, chi in questa parte possono aver tanto peso di autorità, quanto gli stessi greci, chi ci sono rimasti, parlano di altro greco algebrista che di Diofanto.** (Cossali Orig. I. p. 86).

Digitized by

das völlige Schweigen der Alten über irgend eine andere Arbeit der Art, woraus, wenn auch nicht zu viel, doch ſo viel gefolgert werden kann, daß die vorhandenen Bruchſtücke, von denen Diophant ausgegangen iſt, nicht von großer Bedeutung geweſen ſein können.

Siebentes Kapitel.

Form der Diophantiſchen Algebra.

Das Erſte, worauf wir bei der Darſtellung der Diophantiſchen Analyſis zu rückſichtigen haben, iſt ſeine Bezeichnungsmethode, welche gewiſſermaßen als das Gewand angeſehen werden muß, in welches er ſeine Kunſt gekleidet hat. Ich will von derſelben, weil von dieſer Form ſo unendlich Vieles im Weſen abhängt, ein möglichſt vollſtändiges und treues Bild geben, und werde ich dadurch auch gezwungen Manches zu wiederholen, was ſchon oft geſagt worden iſt, ſo kann ich doch eine ausführliche Auseinanderſetzung des hieher Gehörigen um ſo weniger übergehen, als man gerade auch im Betreff dieſes Punctes in früheren Werken ſo viel Mangelhaftes und ſelbſt Unwahres findet. Mögen alſo die Leſer nur noch in dieſem für Manchen unter ihnen vielleicht weniger anziehenden Kapitel mit mir Geduld haben und bedenken, daß der Gegenſtand deſſelben ein nothwendiger Übergang zu der Darſtellung der ſehr intereſſanten Methoden iſt, deren unſer Auctor ſich bedient.

Sind ſchon die algebraiſchen Werke des Occidents bis zur Mitte des ſiebzehnten Jahrhunderts in Vergleich mit den modernen arm an algebraiſchen Zeichen, ſo trifft das bei Diophant's Werk in noch viel höherem Grade zu. Diophant hat überhaupt nur drei Arten von Zeichen, erſtens für die Unbekannte und ihre Potenzen, zweitens für das abſolute Glied der Gleichung und drittens für die ſubtractive Bedingung eines Gliedes. Die Unbekannte bezeichnet er, wie ich ſchon in dem vorigen Kapitel andeutete, durch den Buchſtaben ς mit dem Accent, ς′ oder auch ςº, und nennt dieſelbe im Contexte ὁ ἀριθμός, die Zahl; das Zeichen wird verdoppelt, wenn der Coefficient derſelben größer als eins iſt, ςς̃. Das Quadrat der Unbekannten heißt δύναμις, ein Ausdruck, den auch ſchon Euklides für

die Quadratzahl braucht, und das Rechnungszeichen dafür ist δ^υ; der Kubus der Unbekannten heißt κύβος, abgekürzt in κ^υ. Die höheren Potenznamen werden aus den Namen δύναμις und κύβος der Art zusammengesetzt, daß jede höhere Potenz als ein Product von Quadraten und Kuben dargestellt wird; demnach heißt die vierte Potenz δυναμοδύναμις, die fünfte δυναμόκυβος, die sechste κυβοκυβος, und ihre entsprechenden Zeichen sind δδ^υ, δκ^υ, κκ^υ. Weiter geht Diophant nicht. Es ist hier wohl zu bemerken, daß die Zeichen δ^υ, κ^υ, δδ^υ u. s. w. durchaus bei Diophant nichts Anderes bedeuten, als das Quadrat, den Kubus, das Biquadrat, deren Wurzel die Unbekannte, ς', ὁ ἀριθμός ist, und daß selbst das Wort δύναμις für den Begriff des Quadrats nie anders gebraucht wird, als wenn von der Unbekannten die Rede ist, wogegen in allen anderen Fällen das Quadrat τετράγωνος genannt wird; das Wort κύβος und die Namen der höhern Potenzen werden indeß auch in andern Verbindungen gebraucht, weil die Sprache da nicht zwei verschiedene Worte darbot; die dafür substituirten Abkürzungen kommen aber nur von der Unbekannten vor. Es ist demnach ganz unrichtig, wenn Reimer [1]) sagt: „das Quadrat einer Zahl (δύναμις) bezeichnet er mit δ^υ, den Kubus mit κ^υ u. s. w." Nicht das Quadrat, den Kubus einer Zahl im Allgemeinen bezeichnet Diophant mit den angeführten Zeichen, sondern immer das Quadrat, den Kubus der unbekannten, gesuchten Zahl, so daß Diophant's δ^υ, κ^υ ganz und gar, ohne weitern Zusatz, unsern Ausdrücken x^2, x^3 entsprechen, und nicht etwa bloß den Exponenten ohne Rücksicht auf die Wurzelgröße ausdrücken; vielmehr vertritt der Ausdruck δ^υ oder κ^υ die Wurzelgröße sammt ihrem Exponenten. Und gerade in diesem unzweifelhaften Umstande liegt eine Unvollkommenheit des Diophantischen Systems, daß nämlich die Zeichen der Potenzen mit dem Zeichen der Wurzel in keinem sichtbaren Zusammenhange stehen. Denn wenn man auch dem Zeichen δ^υ leicht ansieht, daß es eine Abbreviatur des Worts δύναμις sein, also ein Quadrat ausdrücken soll, so sieht man ihm doch auf keine Weise an, daß es gerade das Quadrat der Wurzel ς' und gerade nur dieser Wurzel sein soll. Dem ganz analog und eben so inconvenient bezeichnen die Mathematiker

1) Übers. von Bossut's Gesch. d. Math. I. S. 56.

vor Vieta die Unbekannte mit *R* (radix oder res), deren Quadrat mit *Z* (zensus), den Kubus mit *C* und so weiter, ja selbst noch Bachet und Fermat, lange nach Vieta, behalten diese ihnen einmal geläufige Methode bei, nur mit dem Unterschiede, daß sie für *R* das Zeichen *N* (numerus) nach Diophant, und statt *Z* den Buchstaben *Q* (quadratum) gebrauchen. So schreibt zum Beispiel Bachet $1Q + 5N$ sint aequales 24, eine Gleichung, die wir so ausdrücken würden $x^2 + 5x = 24$. Vieta that den ersten Schritt, um diesem Übelstande abzuhelfen; er bezeichnet die Potenzen von *A* durch der Reihe durch *Aq.*, *Ac.*, *Aqq.* oder vollständiger ausgeschrieben *A quadr.*, *A cub.*, eine Bezeichnung, die außerdem, daß sie an und für sich systematisch ist, den unendlichen Vortheil gewährt, daß man mit ihrer Hilfe mehre Unbekannte einführen kann, was bei Diophant's und der Alten Methode absolut unmöglich ist. — An diese Zeichen der Unbekannten und ihrer Potenzen hängt Diophant die Zahlencoefficienten unmittelbar hinten an, und drückt selbst den Coefficienten 1 immer aus, z. B. ς′ $\overline{\alpha}$, ςς′ $\overline{\delta}$, δ$\tilde{\upsilon}$ $\overline{\alpha}$, δ$\tilde{\upsilon}$ $\overline{\iota\gamma}$, κ$\tilde{\upsilon}$ $\overline{\beta}$. Für die Multiplication hat Diophant kein Zeichen; denn da er nur Symbole für eine Hauptgröße und nur Zahlencoefficienten anwendet, so erscheint jede Multiplication sogleich ausgeführt; ebenso die Division, wenn sie ausführbar ist; im entgegengesetzten Falle giebt sie einen Bruch zum Resultat, wovon wir sogleich mehr sagen werden. Die Addition wird durch bloßes Nebeneinanderschreiben bezeichnet, so daß zum Beispiel δ$\tilde{\upsilon}$ $\overline{\alpha}$ ςς̃ $\overline{\delta}$ so viel sagt, wie $x^2 + 4x$. Diese Methode macht es nothwendig, auch dasjenige Glied einer Formel, welches die Unbekannte gar nicht enthält, als absolute Zahl zu bezeichnen, damit nicht ihr bloßer Zahlenausdruck mit dem Coefficienten der vorhergehenden Größe zusammenlaufe; daher nennt Diophant eine gegebene Zahl μονάδες, Einheiten, und bezeichnet sie in der Formel durch die Abbreviatur μ^{σ}, welcher dann ebenso wie den Zeichen der Unbekannten, die Coefficienten hinten angehängt werden. Nie aber wird, wie Reimer am angeführten Orte bemerkt, die Einheit mit μ^{σ} bezeichnet, sondern immer mit μ^{σ} α oder μ^{σ} μία. Bei Bachet, welcher das Additionszeichen + gebraucht, findet sich für das absolute Glied kein besonderes Zeichen mehr, sondern er braucht die nackte Zahl; die Italiener dagegen, welche die erste Potenz der Unbekannten mit *R* bezeichnen, nennen nach Sitte der Arabischen Algebristen, das absolute

Glied numerus und bezeichnen es durch N[2]). — Außer diesen Zeichen hat Diophant nur noch ein einziges, nämlich für die Subtraction. Die Bedingung der Subtractivität oder Negation nennt er λεῖψις, Mangel, im Gegensatz der Affirmation, die er ὕπαρξις, Vorhandensein, nennt, und schreibt im Zusammenhange zur Bezeichnung dessen, was wir minus nennen, entweder dieses Wort aus und zwar im Dativ λεῖψει, oder er braucht dafür als Symbol ein umgekehrtes und verstümmeltes ψ, etwa so ⅄ (καὶ τῆς λείψεως σημεῖον ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον ⅄. Def. IX.). Um allen Mißverständnissen vorzubeugen, stellt er bei zusammengesetzten Ausdrücken immer die negativen Glieder hinter alle positiven, z. B. δῦ $\overline{\alpha}$. μ° $\overline{\iota\beta}$ λεῖψει ςς̃ ς, das heißt $x^2 + 12 - 7x$, und ebenso bei mehren negativen Gliedern δδῦ $\overline{\vartheta}$. δῦ $\overline{\varsigma}$ μ° $\overline{\alpha}$ ⅄ κῦ $\overline{\delta}$ ςς̃ $\overline{\iota\beta}$, das heißt $9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x$ (IV. 29.). An ein allein stehendes subtractives Glied, an den Begriff der an und für sich negativen Zahl ist, wie wir unten sehen werden, bei ihm noch nicht zu denken.

---

2) Cossali (Orig. T. I. p. 195. 196.) macht die sonderbare Bemerkung, daß die Italiener und ihre Lehrer, die Araber, die Potenzenscala nicht von der Potenz 1, der Wurzel, sondern von der Potenz 0, der bekannten Zahl, anfangen. Seine Worte lauten so: Wallis non ha riflettuto a duo altre differenze tra le scale medesime (nämlich der Diophantischen und der Italienisch-Arabischen, deren erster Unterschied der ist, daß die Letztern die höhern Potenzen als Potenzen von Potenzen darstellen, während Diophant sie als Producte der niedrigeren Pozen betrachtet). La prima ci è, che laddove Diofanto denomina con singolarita *Numero* il numero ignoto, denominando *Monade* il numero dato di comparazione; gli antichi Italiani degli Arabi seguaci denominano questo il *Numero*, e *Radice*, o *Lato*, o *Cosa* il numero sconosciuto. La seconda è che Diofanto comincia la scala dal numero ignoto, e Fra Luca, Tartaglia, Cardano la incominciano dal numero noto. Dazu giebt er folgende Tabelle:

	Scala Diofantea	Scala Araba
	. . . . .	1. Numero . . . il noto
x	1. Numero . . . l'ignoto	2. Cosa, radice, lato
x^2	2. Podestà	3. Censo
x^3	3. Cubo	4. Cubo
x^4	4. Podestà-podestà	5. Censo di censo
x^5	5. Podestà-cubo	6. Relato primo
x^6	6. Cubo-cubo	7. Censo di cubo, o cubo di censo

u. s. w.

Digitized by Google

Ich habe oben im dritten Kapitel bereits davon gesprochen, wie die Griechen überhaupt und zumal auch Diophant Brüche zu bezeichnen pflegen. Dagegen muß ich als hieher gehörig eine besondere Art von Brüchen erwähnen, solche nämlich, deren Nenner die Unbekannte in irgend einer Form in sich schließt. Die einfachste Art dieser Brüche ist die, wenn der Nenner die Unbekannte selbst oder irgend eine nicht weiter complicirte Potenz derselben ist. Wir finden darüber in Diophant's dritter Definition die nöthigen Aufschlüsse. „Wie die den Zahlen gleichnamigen Theile, sagt Diophant, den Namen der Zahlen entsprechend benannt werden, so daß man von drei den Namen ein Drittel, von vier den Namen ein Viertel bildet, so werden auch die den eben beschriebenen Zahlen (ἀριθμός, δύναμις, κύβος u. s. w.) gleichnamigen Theile nach den Namen dieser Zahlen benannt werden, und man bildet von ἀριθμός den Namen τὸ ἀριθμοστόν, von δύναμις den Namen τὸ δυναμοστόν, von κύβος τὸ κυβοστόν und so fort τὸ δυναμοδυναμοστόν, τὸ δυναμοκυβοστόν, τὸ κυβοκυβοστόν. Jeder von ihnen wird seine Bezeichnung nach der gleichnamigen Zahl erhalten und eine Linie die Species absondern (ἔξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ ση-

---

Diese Tabelle ist insoweit ganz richtig, nur hätte Cossali, wie in der zweiten Spalte, so auch in der ersten eine Stufe höher, nämlich mit den Diophantischen μονάδες anfangen, oder auch mit demselben Rechte in beiden Spalten diese erste Stufe weglassen sollen. Ich sehe gar nicht ein, was dem sonst so besonnenen Manne hier vorgeschwebt hat, und habe auch eben keinen der alten Italienischen Mathematiker bei der Hand, den ich zu diesem Behufe nachschlagen könnte. Vielleicht daß daselbst sich eine Stelle, wie folgende aus der Algebra ihres Lehrers, Mohammed ben Musa, vorfand, aus welcher Cossali wider seine Gewohnheit einen Schluß gezogen hat, zu dem die Sache nicht berechtigt. Hier heißt es nämlich S. 3. der Rosen'schen Ausgabe: ووجدت الاعداد التي يحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة علي ثلثة ضروب وهي جذور و اموال وعدد مفرد لا ينسب الي جذر ولا الي مال „Ich fand, daß die Zahlen, deren man sich in der Rechnung Aljebr und Almukabalah bedient, dreierlei Art sind, und zwar Wurzeln und Quadrate und absolute Zahl, welche weder auf die Wurzel noch auf das Quadrat Bezug hat." Schwerlich aber dürfte eine Darstellung der Art einen Schriftsteller bewegen zu sagen, der Arabische Auctor fange die Potenzenscala der Unbekannten mit der bekannten Zahl an. Und daß die ältesten Italiener ungefähr dasselbe gesagt haben, läßt sich aus ihrem sonstigen Zusammenhange mit Mohammed ben Musa schließen.

Digitized by Google

μεῖον γράμμην ἔχον διαστέλλουσαν τὸ εἶδος)" [3]). Aus diesen letzten Worten scheint hervorzugehen, daß Diophant seine Brüche ursprünglich anders, als gewöhnlich geschieht, bezeichnet habe. In dem gedruckten Texte aber werden diese mit unbestimmtem Nenner den gewöhnlichen ganz analog ausgedrückt, indem das Nennerzeichen dem Zähler oben rechts als Exponent angesetzt wird, z. B. $\overline{\alpha}^{\varsigma'}$, und noch vollständiger indem er ϛού, die Endsylbe von ἀριθμοστοῦ, nebst dem zugehörigen Coefficienten oben ansetzt, $\overline{\delta}^{\varsigma\text{οῦ}\,\tilde{\alpha}}$, $\overline{\alpha}^{\delta\text{ῦ}\,\tilde{\alpha}}$. Ist dagegen der Zähler selbst schon ein Zahlenbruch, so finden wir die Formel in der Regel ausgeschrieben, z. B. ἀριθμοστὸν $\overline{\alpha}$. $\overline{\alpha}^{\beta}$, d. h. $\frac{1\frac{1}{2}}{x}$, δυναμοστὸν $\overline{\varsigma}$. $\overline{\alpha}^{\delta}$ d. h. $\frac{6\frac{1}{4}}{x}$ [4]). Diophant geht aber noch weiter und macht von Brüchen Gebrauch, deren Zähler oder Nenner oder beide zugleich zusammengesetzte algebraische Ausdrücke sind, z. B. $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\vartheta}$ ϕ ϛοῦ $\overline{\alpha}^{\varsigma\text{οῦ}\,\tilde{\alpha}}$, welches soviel sagen will, als $\frac{9-x}{x}$ [5]). Ist jedoch der Nenner ein zusammengesetzter Ausdruck, so bedient Diophant sich, anstatt den Ausdruck als Bruch zu schreiben, des Mittels, von dem er auch schon bei sehr großen Zahlennennern Gebrauch macht, daß er nämlich zu dem Zähler den Nenner mit den Worten ἐν μορίῳ oder μορίου hinzufügt; so zum Beispiel bei Zahlen $\delta\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\beta}$. $\overline{\text{͵εχ}}$ ἐν μορίῳ $\overline{\text{ρκβ}}$. $\overline{\text{ϙκε}}$, das heißt $\frac{25600}{1221025}x^4$, und ebenso bei algebraischen Nennern, z. B. $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\eta}$ μορίου $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. $\varsigma^{\text{οῦ}}\,\overline{\alpha}$, d. h. $\frac{8}{x^2+x}$; $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. $\varsigma^{\text{οῦ}}\,\overline{\alpha}$. $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\eta}$ μορίου $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$ $\varsigma^{\text{οῦ}}\,\overline{\alpha}$ das heißt $\frac{x^2+x+8}{x^2+x}$; $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\zeta}$ λείψει $\varsigma\tilde{\varsigma}$ $\overline{\text{κδ}}$ μορίου $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\text{ιβ}}$ λείψει $\varsigma\tilde{\varsigma}\,\overline{\zeta}$,

---

3) Diese ganze Definition, sowie die siebente, welche die Multiplicationsregel für solche Brüche von der Form $\frac{a}{x^n}$ enthält, hat Bachet falsch verstanden und so aufgefaßt, als hätte Diophant Ausdrücke von der Form $\frac{1}{n}x$ im Sinne. Während des Drucks hat der Herausgeber jedoch seinen Irrthum eingesehen und am Ende des sechsten Buchs, S. 451, verbessert.

4) Vergl. III, 12. IV, 40. V, 30. VI, 3. 4. 5.

5) S. IV, 37.

Digitized by

d. h. $\frac{7x^2-24}{x^2+12-7x}$; $\varkappa^{\tilde{\upsilon}}\ \overline{\beta}\ .\ \delta^{\tilde{\upsilon}}\ \overline{\varepsilon}\ .\ \varsigma\varsigma^{o\iota}\ \overline{\delta}\ .\ \mu^{\tilde{o}}\ \overline{\alpha}\ \grave{\varepsilon}\nu\ \mu\iota o\rho\acute{\iota}\omega\ \delta^{\tilde{\upsilon}}\ \overline{\alpha}\ .$ $\varsigma\tilde{\varsigma}\ \overline{\beta}\ .\ \mu^{\tilde{o}}\ \overline{\alpha}$, d. h. $\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$ und dergleichen mehr [6]).

Die beiden Seiten der Gleichung [7]) verbindet Diophant durch die Worte ἴσος oder ἴσος ἐστὶ in ihren verschiedenen durch die Umstände bedingten grammatischen Flexionen, z. B. ποιεῖ $\varkappa^{\tilde{\upsilon}}\ \overline{\varkappa\varsigma}\ \varsigma\varsigma^{o\tilde{\upsilon}\varsigma}\ \overline{\varsigma}\ \mathfrak{h}\ \delta^{\tilde{\upsilon}}\ \overline{\varkappa\varsigma}$ ἴσους $\varsigma\varsigma^{o\tilde{\iota}\varsigma}\ \overline{\varsigma}\ \mathfrak{h}\ \delta^{\tilde{\upsilon}}\ \overline{\alpha}$, ähnlich wie die Europäer bis ins siebzehnte Jahrhundert hinein.

Nach dieser Auseinandersetzung der wirklich vorhandenen Zeichen, deren Diophant sich bedient, wollen wir einen Blick auf das eigentliche Wesen dieser Bezeichnung werfen. Da muß ich denn zunächst bemerklich machen, daß diese Diophantische Bezeichnungsmethode ihrem Charakter nach sehr verschieden ist von der bei uns gebräuchlichen. Während wir nämlich durch die algebraische Bezeichnungsmethode eine von dem mündlichen Vortrage ganz unabhängige Zeichen- und Formelsprache uns gebildet haben, finden wir bei Diophant nur Abbreviaturen der als ausgesprochen gedachten Worte. Dies beweisen theils die Zeichen selbst, theils und noch mehr der Gebrauch derselben. Diophant gebraucht ganz beliebig, wie es ihm gerade einfällt, bei der Darstellung einer Formel bald das Zeichen, bald das vollständige Wort; er schreibt in demselben Satze $\varsigma\tilde{\varsigma}$, $\varsigma\varsigma\tilde{\varsigma}$, und gleich daneben in demselben Sinne ἀριθμός, ἀριθμοί [8]), ebenso $\mu^{\tilde{o}}$ und

---

6) S. IV, 26. 41. 42. V, 23. VI, 13. 14. 15. 21. 23.

7) Die Seite der Gleichung heißt Def. XI. μέρος, dagegen IV, 25. ἴσωσις (καὶ εἰ ἦσαν οἱ $\varsigma\varsigma^{o\iota}$ ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι etc.).

8) Was will Reimer mit folgenden Worten (Übers. d. Gesch. d. Mathem. von Bossut, I. 56.) sagen? „Die Zahl, welche nicht als Potenz betrachtet wird, wird mit dem griechischen Buchstaben ς, die Einheit mit μ^o bezeichnet. Die gesuchte Größe (unser x), in so fern sie zu keiner Dignität erhoben ist, nennt Diophant **immer** in Worten die Zahl (ἀριθμός), **oder** er gebraucht **auch** jenen Buchstaben ς." Reimer macht hier geradezu die Ausnahme zur Regel und umgekehrt. Diophant sagt in der zweiten Definition ausdrücklich, er werde die Unbekannte ἀριθμὸς nennen und durch ς' bezeichnen, und es ist späterhin im Texte eine Unregelmäßigkeit, wenn er oft auch für ς' das Wort ausschreibt und andrerseits ἀριθμὸς in ς' abkürzt, auch wo es nicht die Unbekannte bedeutet. Aus Reimer's Darstellung würde für beide Fälle gerade das Gegentheil geschlossen werden müssen. Was sollen ferner die sich gegenseitig aufhebenden Partikeln — **immer — oder auch?**

Digitized by Google

μονάδες, δῦ und δύναμις, ϕ und λείψει und so fort. Ja, was den Charakter dieser Zeichen als bloßer Abbreviaturen der Worte noch mehr ins Klare stellt, er gebraucht diese algebraischen Zeichen für die entsprechenden Worte auch dann, wenn diese einen ganz andern Sinn haben, zum Beispiel ς' für das Wort ἀριθμός, wo unter letzterem gar nicht die Unbekannte verstanden wird [9]), und ebenso das Zeichen ϕ für andere Flexionsformeln des Stammes λεῖψις, zum Beispiel im Contexte für λιπών oder λείψας, sogar in den Worten der Aufgabe [10]). Ferner wird oft das Wort sowohl als seine Abbreviatur von dem zugehörigen Zahlencoefficienten durch Partikeln getrennt [11]); ganz besonders aber deutet auch auf den Charakter bloßer Abbreviaturen der Umstand hin, daß den Zeichen ς' und μο̃ der den Worten ἀριθμός und μονάς nach der jedesmaligen Verbindung angemessene Artikel vorgesetzt, ferner daß dem Zeichen ς' statt des einfachen Accents in der Regel noch oben die Casusendung angehängt wird, ςοῦ, ςῷ, ςςοὶ, ςςοῦς, ςοῖς, und so auch mit den für den Artikel gebräuchlichen Abbreviaturen ς'' für ἀριθμὸν, ςς̃ für ἀριθμῶν, gleichwie man τ'' für τὸν und τ̃ für τῶν schreibt. Fast alle diese erwähnten Eigenthümlichkeiten finden wir in einer Formel vereinigt, welche wir in den letzten Zeilen des ersten Buchs lesen: ςςοὶ ἄρα ῑ μο̃ λ ἴσοι εἰσὶν ςςοῖς ῑα μονάσι ῑε. Die letztgenannten Erscheinungen kommen indeß so oft vor, daß es nicht nöthig ist, Beispiele als Belege anzuführen; jede Seite bietet deren mehrere.

Um den Standpunct, welchen Diophant in der Geschichte der Algebra in dieser Hinsicht einnimmt, richtiger beurtheilen zu können, bemerken wir Folgendes. Wir können, was die formelle Darstellung der algebraischen Operationen und Gleichungen anlangt, drei histo-

---

9) Z. B. II, 12. 19. III, 19. (zweimal) IV, 10. 25. V, 12. VI, 10. und öfter. Z. B. III, 19. ἵνα οὖν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ἔχωμεν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ς' πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι δύο ςςοὺς etc.

10) Z. B. III, 3. heißt die Aufgabe: Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν ϕ ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. Und ähnlich III, 11. 15. 19. IV, 40. vielleicht auch noch öfter. Zwar für λείψει, aber mitten im wörtlich ausgedrückten Texte findet es sich II, 34. und öfter.

11) Z. B. I, 2. ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες für 4x, I, 43. μονάδες ἄρα ιε̄. ebend. ςςοὶ ἄρα ῑ, und dergleichen.

Digitized by Google

risch und wesentlich verschiedene Entwickelungsstufen dieser Wissenschaft unterscheiden. Die erste und niedrigste Stufe kann man die rhetorische Algebra nennen; sie ist vollständige Wortrechnung, und ihr Wesen besteht darin, daß bei Ermangelung aller Zeichen der ganze Verlauf der Rechnung in ausführlichen Worten dargestellt wird. Hieher gehören die Beispiele algebraischer Auflösungen, welche wir bei Jamblichus finden und von denen wir im fünften Kapitel eines ausgeführt haben, so wie die Basis derselben, das Epanthema von Thymaridas; hieher gehören ferner alle bis jetzt bekannt gewordenen Arabischen und Persischen Algebristen, bei denen wir ebenso wenig wie bei Jamblichus irgend eine Spur von algebraischer Zeichensprache vorfinden; auch sind die ältesten Italiener und deren Schüler, zum Beispiel Regiomontanus, noch hieher zu rechnen [12]). Die zweite Stufe kann man die synkopirte Algebra nennen. Ihr Vortrag ist dem Wesen nach rhetorisch, wie in der ersten Stufe, aber sie bedient sich für gewisse oft wiederkehrende Begriffe und Operationen constanter Abbreviaturen statt der vollen Worte. Auf dieser Stufe steht Diophantus und die späteren Europäer bis gegen die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts, obgleich schon Vieta in seinen Schriften den Keim der modernen Algebra niedergelegt hat, der aber erst einige Zeit nach ihm aufsproßte. Diese dritte Stufe nämlich ist die symbolische Algebra, welche alle vorkommenden Formen und Operationen durch eine vollkommen ausgebildete, vom mündlichen Vortrage ganz unabhängige Zeichensprache darstellt, wodurch sie jede rhetorische Darstellung unnütz macht. Wir können eine algebraische Entwickelung von Anfang bis zu Ende völlig verständlich durchführen, ohne irgend ein geschriebenes Wort zu gebrauchen, und setzen wirklich, wenigstens bei einfacheren Entwickelungen, nur hin und wieder eine Conjunction zwischen die Formeln, um dem Leser das Suchen und Zurücklesen dadurch zu ersparen, daß wir gleich auf die Verbindung der Formel mit den vorhergehenden und nächstfolgenden hinweisen. Indeß sind wir Europäer seit der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts nicht die Ersten gewesen, die sich auf diese Stufe erhoben haben, sondern die Indischen Mathematiker sind uns hier um viele Jahrhunderte

12) Man kann hierüber vergleichen, was Stifel in der oben S. 57 Note 45 mitgetheilten Stelle seiner Coß sagt.

Digitized by Google

vorausgeeilt. Ich will jede dieser drei Stufen, der größern Anschaulichkeit wegen, an einem Beispiele erläutern, welches zu den beiden ersten Methoden wörtlich aus irgend einem Mathematiker entnommen ist.

Erste Stufe. Beispiel aus Mohammed ben Musa [13]). Ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln sind gleich neun und dreißig Dirhem, das heißt, wenn du zu einem Quadrate zehn Wurzeln addirst, so wird dieses zusammengenommen gleich neun und dreißig. Die Auflösung besteht darin, daß du die Anzahl der Wurzeln halbirst, und das macht in diesem Beispiele fünf; dann multiplicirst du dieses in sich selbst, so kommt fünf und zwanzig heraus. Hierauf addirst du dieses zu den neun und dreißig, das macht vier und sechzig; daraus ziehst du die Quadratwurzel, das ist acht, und subtrahirst davon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, nämlich fünf, so bleibt der Rest drei; und das ist die Wurzel des Quadrats, welches du suchst, und das Quadrat ist neun.

Die Araber sind in der Anwendung dieser rhetorischen Methode so consequent, daß sie nicht einmal ein Zahlzeichen in ihrem Texte gebrauchen. Man vergleiche mit diesem Beispiele Jamblichus (p. 89—96), der zwei Exempel giebt, die sich von dem Arabischen nur darin unterscheiden, daß der Grieche sich's nicht übel nimmt, statt der Zahlworte nach Belieben Zahlzeichen anzuwenden. Ferner kann man das oben S. 56 mitgetheilte Beispiel aus Regiomontanus daneben halten, in welchem sich auch keine andern Zeichen als Zahlzeichen befinden.

---

13) Ausgabe v. Rosen S. 5.

مال و عسرة اجذاره يعدل تسعة و ثلثين درهما و معناه اي مال
اذا زدت عليه مثل عشرة اجذار بلغ ذلك كله تسعة و ثلثين ✿
فقياسه ان تنصف الاجذار وهي في هذه المسئلة خمسة فتضربها في
مثلها فيكون خمسة وعشرين فتزيدها علي التسعة والثلثين فيكون
اربعة و ستين فتاخذ جذره وهو ثمانية فتنقص منه نصف الاجذار
وهو خمسة فيبقي ثلثة وهو جذر المال الذي تريد والمال تسعة ✿

In der Art ist das ganze Werk; ebenso die Werke von Beha-eddin, Nejm-eddin Ali, und die Auszüge aus Feizi's Persischer Bearbeitung der Lilawati, die ich gesehen habe.

Zweite Stufe. Beiſpiel aus Diophantus [14]).

Drei Zahlen zu finden, ſo daß die Summe von allen dreien ſowohl als von je zweien ein Quadrat ſei. Man ſetze die Summe der drei Zahlen gleich dem Quadrate 1 Q. 2 Z. 1 E. Die erſte Zahl ſammt der zweiten ſei 1 Q., ſo wird der Reſt 2 Z. 1 E. die dritte Zahl ſein. Die zweite mit der dritten ſei gleich 1 Q. 1 E. w. 2 Z., wovon die Wurzel 1 Z. w. 1 E. iſt. Nun ſind alle drei zuſammen 1 Q. 2 Z. 1 E.; daher wird die erſte ſein 4 Z. Dieſe aber mit der zweiten zuſammen war geſetzt gleich 1 Q. Demnach wird die zweite ſein 1 Q. weniger 4 Z. Es wird alſo die erſte mit der dritten zuſammen, 6 Z. 1 E., eine Quadratzahl ſein müſſen. Sei (dieſe Summe) gleich 121 E., ſo wird die Zahl 20 E. Daher iſt die erſte 80 E., die zweite 320 E., die dritte 41 E.; und ſie erfüllen die Forderung.

So wenig wie der Übergang von der erſten Stufe zu der zweiten ſich ſo ganz ſchroff darſtellt [15]), ebenſowenig iſt die Grenze zwiſchen der zweiten und dritten Stufe ſcharf bezeichnet. Der Übergang geſchah allmählig, indem man immer ein Zeichen nach dem andern erfand. Diophant hat ein einziges Operationszeichen, nämlich für die

---

14) III, 7. Ich habe, um das Princip der Abbreviatur auch im Deutſchen auszudrücken, für die Diophantiſchen Zeichen $\delta^{\tilde{\upsilon}}$, ς, $\mu^{\tilde{o}}$, ϕ die Buchſtaben Q., Z., E., w., als Anfangsbuchſtaben der Worte Quadrat, Zahl, Einheit, weniger gewählt, und unſerer Sprachweiſe gemäß die Zahlen vor das abgekürzte Wort geſtellt. Zur Vergleichung ſtehe hier das Original: Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ἵνα σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. $\varsigma^{\tilde{\varsigma}}\,\overline{\beta}\,\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\alpha}$. καὶ ἔστω ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος $\varsigma^{\tilde{\varsigma}}\,\overline{\beta}\,\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\alpha}$. ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}\,\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\alpha}\,\phi\,\varsigma^{\tilde{\varsigma}}\,\overline{\beta}$, ἀπὸ πλευρᾶς $\varsigma^{o\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$ λείψει $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\alpha}$. καὶ εἰσὶν οἱ τρεῖς $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. $\varsigma^{\tilde{\varsigma}}\,\overline{\beta}\,\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\alpha}$. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται $\varsigma^{\tilde{\varsigma}}\,\overline{\delta}$. ἀλλὰ καὶ σὺν τῷ δευτέρῳ τέτακται $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται $\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. λείψει $\varsigma^{\tilde{\varsigma}}\,\overline{\delta}$. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον μετὰ τοῦ τρίτου συναγόμενον $\varsigma^{\tilde{\varsigma}}\,\overline{\varsigma}\,\mu^{\tilde{\upsilon}}\,\overline{\alpha}$. ἰσῶσαι τετραγώνῳ· ἔστω ἴσος $\mu^{o}\,\overline{\rho\kappa\alpha}$· καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\kappa}$· ἔσται ὁ μὲν πρῶτος $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\pi}$, ὁ δὲ δεύτερος $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\tau\kappa}$, ὁ δὲ τρίτος $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\mu\alpha}$· καὶ ποισῦσι τὸ ἐπίταγμα.

15) So finden wir wirklich ſelbſt bei Diophant Beiſpiele von gänzlicher Vernachläſſigung des Gebrauchs der Abbreviaturen (z. B. I, 1.), die alſo ganz der rhetoriſchen Stufe angehören.

Digitized by Google

die Subtraction; Lucas de Burgo braucht für plus und minus die Anfangsbuchstaben *p* und *m*; Tartaglia drückt plus durch φ aus; bei Vieta finden wir bereits die jetzt noch gebräuchlichen Zeichen +, −, und außerdem = für die unbestimmte Subtraction (*A* = *B* heißt bei Vieta: entweder *A* − *B* oder *B* − *A* jenachdem das eine oder das andere größer ist, oder kurz gesagt, die Differenz zwischen *A* und *B*), wofür Andere das Zeichen ∽ gebrauchen. Für die Multiplication wendet Oughtred zuerst das Zeichen × an, und Harriot schreibt die Factoren ohne Zeichen nebeneinander [16]). Zu den am spätesten eingeführten Zeichen gehört das für die Gleichheit, welches ich mich nicht früher als bei Descartes gefunden zu haben erinnere, der dafür dieses Zeichen ∞ in seiner Geometrie gebraucht, wofür seit Wallis das jetzige Zeichen = allgemein aufgenommen ist [17]).

Dritte Stufe. Bloß der Vergleichung wegen will ich hier das oben gegebene Beispiel aus Mohammed ben Musa so hinschreiben, wie wir etwa den Gang der Rechnung einem Anfänger deutlich machen würden. Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 10x = 39$$

$\left(\frac{10}{2}\right)^2$, d. i. 25, auf beiden Seiten addirt, giebt

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

$$\text{also auch } \sqrt{x^2 + 10x + 25} = \sqrt{64}$$

$$\text{das ist } x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

Nachdem ich so Diophant's Bezeichnungsmethode dargestellt und ihm in dieser Beziehung seine Stellung im Gebiete der Algebra an-

---

16) Cossali (Orig. I. p. 52) sagt: Descartes, sebbe posteriore, Geom. parte II. (a la testa) prescrive d'interporre alle due quantità complesse da moltiplicarsi insieme la lettera M tirando sopra ciascuna una linea etc. In der Ausgabe von Descartes Geometrie, welche ich besitze, (Paris. 1726. 8.) habe ich weder an der bezeichneten noch an irgend einer andern Stelle etwas der Art gefunden.

17) Nach Kästner, Gesch. d. Math. I. S. 188, soll schon Xylander in seiner Übersetzung Diophant's das Zeichen || für die Gleichheit gebrauchen, was ich nicht habe vergleichen können. Speciellere Nachrichten über die allmählige Aufnahme

gewieſen habe, wollen wir noch einige Puncte berühren, welche nothwendig hervorgehoben werden müſſen, wenn wir uns von des Verfaſſers formeller Entwickelungsſtufe ein ganz klares ſelbſt im Einzelnen ausgeführtes Bild entwerfen wollen; und zwar werden wir unſer Augenmerk noch vorzüglich auf drei Gegenſtände zu richten haben, auf die Grenzen nämlich, welche in Diophant's Werk den unbekannten Größen, den gegebenen Größen und endlich den Wurzeln der Gleichungen geſteckt ſind.

Diophant kann vermöge ſeiner Bezeichnungsmethode nur eine Unbekannte in die Gleichung einführen. Das hat auf ſeinen Vortrag einerſeits den Einfluß, daß er Eliminationen, welche wir im Laufe der Rechnung ausführen, bereits in der Vorbereitung ausführt, ſo daß er auf einen Anſatz mit einer Unbekannten kommt. Einfache Beiſpiele der Art enthalten die meiſten Aufgaben des erſten Buchs, welche meiſtens beſtimmte Aufgaben mit mehren Unbekannten ſind. Sind aber, wie in vielen Beiſpielen, die Bedingungen und Verhältniſſe zwiſchen den verſchiedenen Unbekannten complicirter, ſo entwickelt Diophant eine unglaubliche Gewandtheit ſowohl in der geſchickteſten Annahme der Unbekannten als in der oft ſehr kunſtvollen und ſcharfſinnigen Vorbereitung der Gleichung. Beiſpiele führe ich hier nicht an, weil ich in den folgenden Kapiteln mehre der Art beibringe. Auf der andern Seite aber äußert dieſe Unvollkommenheit der Bezeichnung auf Diophant's Vortrag den üblen Einfluß, daß er bei Aufgaben, die ihrer Natur nach unbeſtimmt ſind und die alſo auf eine Endgleichung mit zwei oder mehren Unbekannten führen würden, für irgend eine derſelben eine willkührlich gewählte beſtimmte Zahl annehmen und auf dieſe Weiſe die unbeſtimmte Aufgabe in eine beſtimmte verwandeln muß. So wenigſtens macht er es bei den meiſten Aufgaben, welche ihrem erſten allgemeinen Ausdrucke nach auf unbeſtimmte Gleichungen des erſten Grades führen würden. Wie er aber ſchon bei den leichteren Aufgaben des erſten Buchs nicht immer eine der geſuchten Zahlen ſelbſt als die für die Gleichung beſtimmte Unbekannte annimmt, ſondern bald ihre Summe, bald ihre

---

der einzelnen Zeichen werde ich ſpäterhin geben. Vorläufig verweiſe ich auf die Notizen bei Coſſali T. I. cap. III. und auf Wallis Algebra (Opera T. II.), wo ſich einzelne Notizen der Art, z. B. p. 68. 69. 89. 138. 239. zerſtreut finden, die aber nicht alle richtig ſind.

Digitized by Google

Differenz, bald irgend eine andere Complexion derselben als ἀριθμός setzt, wobei er abermals eine ungemeine Gewandtheit in der Kunst, die Endgleichung in der möglichst einfachen Form darzustellen, an den Tag legt, so ist das noch viel mehr der Fall bei den schwierigeren Problemen der folgenden Bücher. Um daher die Beschränkung, welche Diophant's Kunst durch die Unmöglichkeit, mehr als eine Unbekannte in die Rechnung zu bringen, erleidet, ganz allgemein zu fassen, müssen wir sagen: er ist genöthigt, alle Unbekannten, welche die Aufgabe zu finden vorschreibt, als Functionen einer einzigen darzustellen. Mit welcher Kunstfertigkeit nun Diophant zwei, drei bis vier Unbekannte als Functionen seines Zeichens ς′ so auszudrücken weiß, daß alle Bedingungen der Aufgabe bis auf eine schon durch diese Annahme erledigt werden, so daß für die eigentliche Rechnung nur noch diese eine Bedingung zu erfüllen übrig bleibt, das wollen wir unten an einigen in dieser Beziehung ausgezeichneten Beispielen ausführlich zeigen. So giebt ihm also gerade diese formelle Unvollkommenheit seiner Methode Gelegenheit, sein überwiegendes Genie und seine seltene noch jetzt als Muster dastehende Gewandtheit in ihrem höchsten Glanze zu zeigen, und was seine Methoden dadurch an wissenschaftlicher Allgemeinheit verlieren, das gewinnen sie an äußerer Grazie und überraschendem Effect.

Weniger eine Beschränkung, als eine Unannehmlichkeit für den Leser, die aus dem Mangel an Zeichen für mehre Unbekannte hervorgeht, ist folgende. Diophant sieht sich oft genöthigt den Gang seiner Rechnung durch Auflösung einer Zwischenaufgabe zu unterbrechen, um eben für jene Functionen von ς′, durch welche die verschiedenen gesuchten Zahlen ausgedrückt werden sollen, die erforderlichen Formen zu bestimmen. Da tritt denn der Übelstand ein, daß er die in dieser neuen Aufgabe gesuchte Unbekannte ebenfalls durch das Zeichen ς′ ausdrückt, so daß dasselbe Zeichen in einer Aufgabe successive ganz verschiedene Bedeutungen hat. Auch davon werden wir in der Folge, bei der Auseinandersetzung der Diophantischen Methoden, Beispiele beibringen.

Was die Rolle anlangt, welche bei Diophant die bekannten Größen spielen, so habe ich hier nur zu wiederholen, was ich schon angedeutet habe, daß nämlich an allgemeine Coefficienten (species) oder an ein allgemein ausgedrücktes absolutes Glied der Gleichung nicht zu denken ist, daß vielmehr Diophant nur Zahlenbeispiele giebt. Ist in der Aufgabe von einer gegebenen Zahl, einem gegebenen Ver-

Digitized by Google

hältnisse die Rede, so nimmt er in dem Ansatze dafür irgend einen bestimmten Zahlenwerth an, wobei ich als einzelne Eigenthümlichkeit sogleich bemerken will, daß Diophant unter dem gegebenen Verhältnisse zweier Zahlen zu einander immer soviel versteht, daß die eine Zahl ein Vielfaches der andern sei. Als ferner der Auctor in dem soeben ausgeführten Beispiele dahin gekommen war, die Unbekannte, x, so zu bestimmen, daß der Ausdruck $6x + 1$ eine Quadratzahl werde, so begnügt er sich zu sagen: „es sei gleich 121;" da er doch mit demselben Rechte $6x + 1$ irgend einer andern Quadratzahl hätte gleich setzen können, allenfalls, wenn er das Resultat in ganzen Zahlen wünschte, mit der Beschränkung, daß die Wurzel der anzunehmenden Quadratzahl die Form $6n \pm 1$ habe; aber dergleichen weitere Anwendungen seiner Methode überläßt er dem Leser. Diophant ist zufrieden, wenn er für die gesuchte Zahl, oder wenn deren mehre sind, für jede derselben einen Zahlenwerth gefunden hat, welcher den Bedingungen der Aufgabe entspricht; und diese Zufriedenstellung seiner selbst mit einer einzigen Auflösung, wie sie die Aufgabe dem Worte nach auch nur verlangt, geht als Grundcharakter durch sein ganzes Werk hindurch. Nichtsdestoweniger aber liegt in der Art und Weise, wie er sein Zahlenbeispiel entwickelt und zum Resultate gelangt, immer zugleich ein ganz klarer Wegweiser, wie man durch Variationen in den beliebig angenommenen Zahlen sich selbst nach derselben Methode andere Zahlenwerthe entwickeln könne, welche der Aufgabe genügen. In dieser Hinsicht ist Diophant's Vortrag durchaus musterhaft; seine ganze Aufmerksamkeit ist auf die Veranschaulichung der Methode gerichtet, wozu ihm das Zahlenbeispiel nur als Mittel dient; daher diese häufigen Zurückweisungen auf den Gang der Rechnung und auf die Art, wie man zu diesem oder jenem Resultate gelangt ist; daher das Abbrechen der Entwickelung, sobald die Methode selbst klar geworden, und die wirkliche Auffindung der gesuchten Zahlenwerthe nur noch von gewöhnlichen Rechnungen abhängt [18]). Sonach liegt in seiner partiellen Auflösung immer zugleich der Wink für die Auffindung beliebig vieler anderer

18) Beispiele davon s. III, 9. V, 14. 18. 19. 20. 21. u. a., wo Diophant es dem Leser überläßt, den gefundenen Werth für ζ' in die davon abhängigen Ausdrücke der gesuchten Zahlen einzusetzen. Bloß angedeutet ist der Gang der Auflösung von V, 15. 16. 17. 23. u. a.

Digitized by Google

Zahlenwerthe, obgleich er selbst selten ausdrücklich auf diese Unendlichkeit der Auflösungen hinweist [19]). Ich habe schon öfter darauf hingedeutet, daß die Algebra in dieser an Zahlenbeispielen haftenden Darstellungsmethode nicht bloß bei Diophant, sondern auch bei den Indern, bei den Arabern, bei den alten Italienern und überhaupt bei allen Mathematikern vor Vieta erscheint und daß diesem großen Genius das Verdienst gebührt, durch Einführung der Buchstabencoefficienten der Algebra eine universellere Form gegeben zu haben. Indeß muß ich hier ein für allemal bemerken, daß der Mangel allgemeiner Formeln bei einem Mathematiker nicht auf den Mangel allgemeiner Regeln und Methoden schließen läßt. Die Alten hatten allgemeine Regeln für die Behandlung ihrer Gleichungen so gut wie wir, sie drückten dieselben aber nicht in Buchstabenformeln, sondern in Worten aus. So giebt auch Diophant, dessen Methoden zwar der großen Mehrzahl nach nicht diesen universellen Charakter haben, doch eine ganz allgemeine Regel für die sogenannte doppelte Gleichung, das heißt, für das Verfahren, welches anzuwenden ist, wenn man zwei Ausdrücke wie $x \pm a$ und $x \pm b$ für einen Werth von x zugleich zu Quadraten machen soll. Er sagt: nimm die Differenz beider Ausdrücke und zerlege sie in zwei Factoren; setzte dann entweder das Quadrat des halben Unterschiedes beider Factoren dem kleineren, oder das Quadrat der halben Summe derselben dem größeren jener Ausdrücke gleich, so erhält man einen Werth von x, der beide Ausdrücke zu Quadraten macht [20]). Die Wahrheit der Regel ist dann aber an einem Zahlenbeispiele erläutert,

---

19) Z. B. IV, 8. am Schlusse: τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται. Auch verweist er einmal in der Auflösung von VI, 12. auf unzählige Zahlen, welche einer Bedingung entsprechen; es kommt hier nämlich darauf an, x so anzunehmen, daß $6x^2 + 3$ ein Quadrat wird; da sagt er: ζητήσομεν ἄρα ἀριθμόν τινα, ὅπως οἱ ἐξ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι μετὰ μ$^{\overline{ο}}$ $\overline{γ}$ ποιῶσι τετράγωνον. ἔστι δὲ ἡ μονὰς $\overline{α}$ καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί. Es könnte hier fast den Anschein haben, als habe Diophant hier seine Zuflucht zur Empirik genommen, da die Methode ihn im Stiche gelassen. Indeß der dieser Aufgabe unmittelbar folgende Lehrsatz lehrt sogleich in der Gleichung $Ax^2 + B = y^2$ unendlich viele rationale Werthe für x finden, wenn $A + B$, wie in dem Beispiel, eine Quadratzahl ist.

20) II, 12. Wir würden die Regel so ausdrücken: Wenn $x + a = y^2$, $x + b = z^2$, so ist $y = \frac{m^2(a-b) + n^2}{2mn}$, $z = \frac{m^2(a-b) - n^2}{2mn}$.

Digitized by Google

welches sowohl bei Diophant als bei allen genannten Mathematikern bis auf Vieta hin die Stelle eines wissenschaftlichen Beweises vertritt. Diophant kennt keinen andern Beweis als die Probe, das heißt, er beweist nicht die Zulässigkeit der Methode, sondern er schließt auf deren Richtigkeit aus der Richtigkeit des speciellen Resultates, welches sie geliefert hat.

Wir kommen endlich auf die Form der Wurzeln in den Diophantischen Gleichungen. Wenn wir von den Auflösungen der unbestimmten quadratischen Gleichungen sprechen, so verstehen wir darunter nie die allgemeine Auflösung, derzufolge eine der beiden Unbekannten durch die andere und durch die gegebenen Zahlen ausgedrückt wird; in diesem Sinne würde die Behandlung der unbestimmten Gleichungen sich von der der bestimmten Gleichungen in gar nichts unterscheiden; nichts ist leichter als, wenn die Gleichung $y^2 + 2ay - 2xy = b + ax - cx^2$ gegeben wäre, zu sagen: also ist $y = x - a \pm \sqrt{a^2 + b - ax - (c-1)x^2}$. Sondern die Sache ist hier immer die, für eine der beiden Unbekannten einen solchen Werth oder solche Werthe in rationalen Zahlen zu finden, daß auch der Werth der zweiten Unbekannten rational werde; in dem angeführten Beispiele würde es also darauf ankommen, für x solche Werthe zu bestimmen, daß die Größe hinter dem Wurzelzeichen ein wirkliches Quadrat würde, damit wir den Ausdruck für y in rationaler Form erhielten. Diese Bedingung drückt der Grieche einfach aus durch sein ἀριθμός; die irrationale Größe ist ihm keine Zahl; daher sagt schon Euklides [21]): τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, „symmetrische (d. h. nach unsrer Redeweise, wie wir oben gesehen haben, rationale) Größen verhalten sich zu einander wie Zahlen.“ Wenn also Diophant in seinen Aufgaben sagt: εὑρεῖν ἀριθμὸν oder ἀριθμούς, so versteht sich seiner Meinung nach von selbst, ohne daß er nöthig hätte einen weitern Zusatz zu machen, daß er rationale Zahlen meine. Und dieses gilt nicht nur von seinen unbestimmten, sondern auch von seinen bestimmten Aufgaben. So stellt er z. B. I, 30. die Forderung, man soll zwei Zahlen finden, deren Summe und deren Product gegebenen Zahlen gleich sind. Nennt man hier die Summe der Zahlen s, ihr Product p, so werden bekanntlich die beiden Zah-

21) Elem. X, 5.

len im Allgemeinen $\frac{1}{2}s + \sqrt{(\frac{1}{2}s)^2 - p}$ und $\frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{2}s)^2 - p}$, Ausdrücke, welche für die gesuchten Zahlen irrationale Werthe geben, wenn nicht $(\frac{1}{2}s)^2 - p$ eine Quadratzahl ist. Darum fügt Diophant hier, und ebenso in allen ähnlichen Fällen, als nothwendige Bedingung der Auflösung hinzu: δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ, „Es muß das Quadrat der halben Summe der Zahlen deren Product um ein Quadrat übertreffen" das heißt eben, $(\frac{1}{2}s)^2 - p$ muß ein Quadrat sein. Dadurch erklärt Diophant auch in bestimmten Aufgaben jede irrationale Auflösung für unzulässig. Xylander hatte sich nicht wenig auf seine Gewandtheit in der Behandlung der von Euklides gelehrten Irrationalgrößen eingebildet und hielt gerade das für eine Berechtigung sich an die Bearbeitung des großen Arithmetikers Diophant zu wagen; er sah sich daher sehr überrascht, als er fand, daß dieser Auctor jene Größen gerade geflissentlich vermeiden lehrte.

Ferner betrachtet Diophantus die negative Form der Wurzel als unstatthaft, wie die meisten Determinationen des ersten Buchs beweisen. Diese Vernachlässigung negativer Wurzeln darf uns bei Diophant um so weniger wundern, da überhaupt aufgeklärte Ansichten über die Bedeutung derselben sich erst im siebzehnten Jahrhundert entwickelten. Nur die Bemerkung will ich hier noch machen, daß die Begriffe von negativen, irrationalen und imaginären Zahlen bei Diophant ganz gleichbedeutend sind, das heißt, daß eine Wurzel in negativer oder irrationaler Gestalt diesem Mathematiker für eine Wurzel in unmöglicher Gestalt gilt; er erklärt die Auflösung von Gleichungen, die auf eine negative oder irrationale Wurzel führen, für ἀδύνατος. Darum erklärt er IV, 28. die Affindung von x so daß die Formel $8x^3 - x^2 + 8x - 1$ ein Kubus werde, für ἀδύνατον, weil die nach seinen Mitteln einzig mögliche Art, diese Formel zu behandeln, indem man nämlich, um $8x^3$ und -1 verschwinden zu lassen, die Wurzel des Kubus gleich $2x - 1$ setzt, ein negatives Resultat giebt, nämlich $x = -\frac{2}{11}$. Ähnlich nennt er V, 2. die Gleichung $4 = 4x + 20$ ἄτοπος, weil sie das Resultat $x = -4$ geben würde. In den meisten Fällen, wenn eine Aufgabe auf eine dieser drei Unstatthaftigkeiten führen könnte, fügt Diophant derselben eine Determination, προσδιορισμός, hinzu. Diese Determinationen, auf welche als die hauptsächlichsten Fundgruben

ſeiner Kenntniß der Zahlentheorie wir noch einmal zurückkommen werden, haben demnach bei Diophant einen dreifachen Zweck:

1. Verhütung eines negativen Reſultats; in dieſe Rubrik gehören die Determinationen zu den Aufgaben I, 5. 6. 8. 9. 14. 16. 17. 20. 23. 24. II, 6.

2. Verhütung eines irrationalen Reſultats; hieher gehören I, 30. 31. 33. IV, 38. 40. von denen aber die beiden letzten zu enge ſind.

3. Verhütung der Unmöglichkeit der Ausführung; es iſt hier nicht von imaginären Formen im modernen Sinne des Worts, das heißt, nicht von Quadratwurzeln aus negativen Größen die Rede, welche ſchon durch die zweite Klaſſe von Determinationen zugleich mit verhütet werden, ſondern die beiden hieher gehörigen Determinationen zu V, 12. und 14. beziehen ſich auf die Zerlegbarkeit einer Zahl in zwei oder drei Quadratzahlen, gehören aber inſofern nicht unter die zweite Rubrik, weil man das Quadrat einer Irrationalzahl, Va, nicht füglich eine Quadratzahl nennen kann; die Unmöglichkeit ſteckt alſo nicht in der Form der Wurzel, ſondern in dem Sinne, den die Worte der Aufgabe in ſich ſchließen. Ähnliche Determinationen zu den Sätzen V, 13. 15. 16. hat Diophant vernachläſſigt, obgleich ſie eben ſo nöthig geweſen wären.

Schließlich bemerke ich noch, daß Diophant Brüche von ſeinen Auflöſungen nicht ausſchließt, wie man aus Boſſut's Worten zu folgern geneigt ſein könnte [22]). Die Beſchränkung der Auflöſung der unbeſtimmten quadratiſchen Gleichungen auf ganze Zahlen iſt ein Verdienſt Fermat's und einiger ſeiner Zeitgenoſſen; von den dazu nöthigen Hülfsmitteln und Methoden ſcheint Diophant keine Ahnung gehabt zu haben; ja er macht dieſe Beſchränkung nicht einmal bei

22) Hist. T. I. p. 8. 9. Qu'on propose, par exemple, les questions suivantes: *Partager un nombre carré en deux autres nombres carrés etc. etc.*; rien n'est plus facile à résoudre que ces questions, si l'on permet d'employer des nombres quelconques; mais si l'on impose la condition que les nombres cherchés seront rationels; *si l'on veut aussi exclure les nombres fractionnaires:* alors la solution demande de l'adresse. Diophante a trouvé la manière de soumettre *toutes les questions de cette nature* à des règles certaines et exemptes de toute espèce de tâtonnement.

Digitized by

den Gleichungen vom ersten Grade geltend; denn daß er zuweilen, wenn er eine unbestimmte Aufgabe durch willkührliche Annahme einer der Unbekannten in eine bestimmte verwandelt hat, am Ende in den gewonnenen Resultaten die Nenner wegwirft [23]), gehört nicht hieher.

Als Anhang zu diesem dem Formellen gewidmeten Kapitel diene hier noch eine Notiz, die ich hinzufüge, um dem Leser das Vergleichen meiner Citate aus Diophant nicht zu verleiden. Zwischen den Aufgaben 12. und 13. des sechsten Buchs befindet sich ein Lemma, welches Bachet in seiner Ausgabe nicht numerirt hat; Schulz dagegen hat demselben in seiner Übersetzung die Zahl 13. gegeben, woher es kommt, daß von dieser Zahl an die Nummern in beiden Ausgaben nicht mehr übereinstimmen. Ich citire nach Bachet; daher haben diejenigen Leser, welche die Übersetzung vergleichen, von VI, 13—26 zu der Nummer des Satzes 1 zu addiren.

---

23) Z. B. I, 26. 27. 28. III, 16. und öfter.

Achtes Kapitel.

Diophant's Behandlung der Gleichungen.

Bei der Darstellung der Diophantischen Kunst müssen wir wesentlich von einander unterscheiden den Mechanismus der Gleichungen und die analytische Behandlung der Aufgaben; jener ist die Kunst, aus einer gegebenen Gleichung die Werthe ihrer Wurzeln zu finden, und ist rein Sache des Calculs, der sich auf ganz bestimmte Regeln zurückführen läßt; diese dagegen ist die Kunst, aus einer gegebenen Aufgabe eine Gleichung zu bilden, oder mit andern Worten, die Auflösung der Aufgabe auf die mechanische Auflösung einer Gleichung zurückzuführen; diese letztere bleibt immer Sache der Überlegung und des Genies, und gerade in ihr offenbart sich Diophant's größte Stärke. Obgleich nun in der Anwendung beide Künste, von denen die Auflösung einer Aufgabe abhängt, in der umgekehrten Reihenfolge stattfinden, so nehme ich doch hier den äußern Mechanismus der Gleichungen, welcher der Sache nach die spätere Operation ist, voraus, theils weil sie die einfachere, geregeltere ist, theils weil gerade ihre größere oder geringere Ausdehnung den Platz bestimmt, welchen wir einem Schriftsteller im Gebiete der Wissenschaft anzuweisen haben. Dazu kommt noch, daß sie in der That der wesentlichere Theil der Algebra ist; denn jede Aufgabe läßt sich auf eine Gleichung reduciren, aber nicht jede Gleichung läßt sich auflösen; und wohlweislich wählt jeder mathematische Schriftsteller nur solche Aufgaben, die auf Gleichungen führen, deren Auflösung in seinen Kräften steht.

Diophant hatte nicht die Absicht, ein Lehrbuch der Algebra zu schreiben. Darum finden wir die einzelnen Regeln und Beschränkungen für die Auflösung gewisser Arten von Gleichungen bei ihm nicht in einer systematischen Ordnung bei einander, sondern wir müssen uns dieselben aus dem ganzen Umfange seines Werkes mühsam

Digitized by Google

zuſammenſuchen, um die zerſtreuten Brocken in wiſſenſchaftlicher Zuſammenſtellung dem Leſer zu einer genügenden Anſchaulichkeit zu bringen.

I. Beſtimmte Gleichungen.

Diophant hat die Auflöſung der beſtimmten Gleichungen der erſten beiden Grade vollkommen in ſeiner Gewalt; ein einziges Beiſpiel von einer kubiſchen Gleichung enthält einen ſehr ſpeciellen Fall.

1. Ungemiſchte Gleichungen.

Unter dieſem Namen faſſe ich alle Gleichungen zuſammen, welche nur eine Potenz der Unbekannten enthalten, weil die Auflöſung derſelben immer dieſelbe bleibt, welches auch der Exponent der Unbekannten ſein mag. Auch macht Diophant ſelbſt keinen Unterſchied zwiſchen den Gleichungen erſten Grades und den reinen Gleichungen höherer Grade; ſondern er giebt ohne Rückſicht auf den Exponenten der Unbekannten folgende allgemeine Regel, nach welcher alle Gleichungen der Art aufzulöſen ſind: „Wenn man bei einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, welche auf beiden Seiten dieſelbe Potenz der Unbekannten, aber in verſchiedener Anzahl (mit verſchiedenen Coefficienten) enthält, ſo muß man Gleiches von Gleichem abziehen, bis ein Glied einem Gliede gleich wird. Wenn aber auf einer oder auf beiden Seiten der Gleichung einzelne Glieder negativ ſind (ἐνελλείπειν), ſo muß man die negativen Glieder auf beiden Seiten addiren, bis auf beiden Seiten alle Glieder poſitiv geworden ſind; und dann muß man ebenfalls Gleiches von Gleichem abziehen, bis auf jeder Seite der Gleichung ein Glied übrig bleibt [1]).“ Nach Anwendung dieſer beiden Operationen, welche genau daſſelbe ſind, was die Araber mit den Namen aljebr und almukâbalah bezeich-

1) Def. XI. Μετὰ δὲ ταῦτα ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται ὑπαρξις εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς μὴ ὁμοπληθῆ δὲ ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν, δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἓν [Ed. ἑνὸς] εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται· ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ, ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐνελλείψῃ τινὰ εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα

nen, ist jede ungemischte Gleichung auf die Form $ax^m = b$ reducirt und als aufgelöst zu betrachten.

Diesen Gleichungen nun, oder vielmehr den Aufgaben, welche auf Gleichungen dieser Art führen, scheint nach Diophant's eigener Andeutung am Ende der Einleitung das erste Buch ursprünglich gewidmet gewesen zu sein. Auch noch in der jetzigen Gestalt des Werks führen die meisten Aufgaben dieses Buchs auf bestimmte Gleichungen des ersten Grades, einige (29. 34—41.) in der Form $x^2 = ax$, drei (30. 31. 33.) auf die reine quadratische Gleichung, was Alles ganz in der Ordnung ist. Vielleicht nur scheinbar ist die Abweichung von dieser vorgesetzten Ordnung, daß die Aufgaben 24—28 unbestimmt sind; denn sie werden dadurch, daß eine der gesuchten Zahlen gleich von vorne herein willkührlich angenommen wird, sogleich auf bestimmte Gleichungen reducirt. Dagegen haben sich Aufgaben, welche auf bestimmte reine Gleichungen führen und die also in das erste Buch gehörten, in die folgenden Bücher verirrt, z. B. die Aufgabe II, 18. 19., welche ihrem Inhalte nach unmittelbar hinter I, 25. stehen sollte; ferner die Aufgaben IV, 1. 2. 16. 38. 40., welche auf die Gleichung $Ax^2 = B$ führen; und IV, 42., welche, obgleich mit Hilfe zusammengesetzter quadratischer Ausdrücke, doch auf die Endgleichung $Ax^2 = Bx$ zurückgeführt wird. Endlich gehören in ihrer jetzigen, aber ganz gewiß verstümmelten Gestalt hieher die Aufgaben II, 1—5.

Die große Mehrzahl der Aufgaben des ersten Buchs ist aber der Art, daß darin mehr als eine Unbekannte gesucht wird, und es sind davon nur sieben Aufgaben (7—11. 29. 43.) ausgenommen. Es hat nun, wenn nur zwei Zahlen aus zwei Datis gesucht werden, in der Regel keine Schwierigkeit, mit Hilfe einer der gegebenen Bedingungen beide Unbekannte durch dasselbe Symbol auszudrücken. Werden aber mehr als zwei Unbekannte gesucht, so legt Diophant einen ganz eigenthümlichen Scharfsinn an den Tag durch die Gewandtheit, mit welcher er sämmtliche Unbekannte auf die einfachste

---

γένηται· καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ· περιλοιπχνήσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ. Die Tautologie, welche der letzte Satz enthält, beruht vielleicht auf einer fehlerhaften Lesart, und auf einem theilweisen Zusammenschmelzen desselben mit dem vorletzten.

Digitized by Google

Weiſe als Functionen des einzigen ihm zu Gebote ſtehenden Symbols darſtellt. Indeß gehört die Erläuterung dieſer ſeiner Methoden, ſo wie der Art, wie er gemiſchte quadratiſche Gleichungen durch eine geſchickte Annahme zu vermeiden weiß, in das folgende Kapitel. In Betreff des letztern Punctes füge ich nur hinzu, daß es begreiflicher Weiſe nicht immer möglich iſt, das Reſultiren einer gemiſchten quadratiſchen Gleichung zu vermeiden, und daß es grundfalſch iſt, wenn von einigen flüchtigen Leſern oder Nachbetern behauptet wird, Diophant löſe keine andern als reine quadratiſche Gleichungen [2]). Daß er die Auflöſung der gemiſchten quadratiſchen Gleichungen gekannt habe, davon wollen wir uns ſogleich vollkommen überzeugen.

2. Gemiſchte quadratiſche Gleichungen.

Da einerſeits, wie ich ſchon oben erwähnt habe, Diophant nirgend die in der elften Definition verſprochene Auflöſung der gemiſchten quadratiſchen Gleichungen lehrt, andrerſeits er aber in ſeinem Vortrage durchweg die Eigenthümlichkeit befolgt, zu der Gleichung, auf welche ihn die Annahme geführt hat, allemal ſogleich und ohne weitere Deduction die Wurzel anzugeben, ſo würden wir nicht im Stande ſein zu beurtheilen, ob er die geregelte Formel für die Wurzeln dieſer Gleichungen gekannt habe, oder ob ſeine Auflöſung bloß auf Verſuchen beruhe, wenn nicht ein anderer Umſtand, den wir

---

2) So ſchreibt Reimer (Boſſut's Geſch. d. Mathem. I. S. 55): „Aber Diophant vermeidet dieſe (die gemiſchten quadrat. Gleich.) mit abſichtlicher Kunſt und weiß hier immer reine quadratiſche Gleichungen zu erhalten. Was ihm alſo von der Auflöſung zuſammengeſetzterer Gleichungen bekannt geweſen iſt, läßt ſich nicht angeben; zumal da die letzten ſieben Bücher ſeines Werks, die wahrſcheinlich die verwickeltſten Aufgaben enthielten, verlohren gegangen ſind." — Ähnlich Klügel (Mathem. Wörterbuch Th. I. S. 31): „Da er aber die unbekannten Größen ſo wählt, und die Auflöſung ſo einrichtet, daß er alle Bedingungen in Gleichungen vom erſten Grade oder höchſtens einfache quadratiſche Gleichungen bringt, ſo kann man nicht wahrnehmen, was ihm von der Auflöſung zuſammengeſetzter Gleichungen, der eigentlichen Algebra, bekannt geweſen ſei." Indeß widerſpricht Klügel ſich ſelbſt, indem er ebend. S. 177. 178. ſagt: „Sein groſſes Werk, wovon nur die erſte Hälfte vorhanden iſt, enthält die Lehre von den Gleichungen des erſten und zweiten Grades." Ein Ausſpruch iſt ſo unwahr, wie der andere. Diophant's Werk trägt nicht die Lehre von den Gleichungen vor.

Digitized by Google

ſogleich erwähnen wollen, uns hier zu Hilfe käme. Zuvor aber einige Beiſpiele der erſten Art. In der Aufgabe IV, 23. leſen wir als Reſultat einer Operation: δύναμις ἄρα ᾱ ἴση ϛς οἷς δ̄ λείψει μῳ̃ δ̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ́ β̄; das heißt, in unſere Sprache überſetzt: „es iſt alſo $x^2 = 4x - 4$ und x wird $= 2$." Ähnlich ſchreibt er VI, 6.: καὶ γίνεται ... δ ῦ πδ̄ ϛς ὁ ξ̄. ταῦτα ἴσα μῳ̃ ξ̄, ὅθεν ὁ ἀριθμὸς εὑρίσκεται ᾱδ̄; das heißt: $84x^2 + 7x = 7$, woraus man findet $x = \frac{1}{4}$. Ebenſo VI, 7.: $84x^2 - 7x = 7$, „und die Zahl wird $\frac{1}{3}$;" ferner VI, 9.: $630x^2 - 73x = 6$, „woraus die Zahl gefunden wird $\frac{6}{33}$." Ja immer giebt er den Werth der Unbekannten gar nicht einmal an, ſondern begnügt ſich bemerklich zu machen, daß die Auflöſung möglich ſei, d. h., daß das Reſultat rational werde; z. B. VI, 8. $630x^2 + 73x = 6$, καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ ῥητός, „und die Zahl wird rational;" wo es eben ſo einfach geweſen wäre zu ſagen: und die Zahl wird $\frac{1}{18}$.

Soweit könnte Diophant's Auflöſung auf bloßer Empirik beruhen. Aber ein anderes Beiſpiel möge uns beweiſen, daß er auch die Wurzel näherungsweiſe zu finden wußte, wenn ſie nicht rational ausfällt. In der Aufgabe V, 33. kommt es darauf an, x ſo anzunehmen, daß x größer als $\frac{x^2 - 60}{8}$ und kleiner als $\frac{x^2 - 60}{5}$, oder, was daſſelbe iſt, daß $x^2 - 60$ größer als $5x$ und kleiner als $8x$ werde [3]). Nun heißt es: ἐπεὶ οὖν δ ῦ ᾱ λείψει μῦ ξ̄ μείζων ἐστὶν ϛ ῦ ε̄, κοιναὶ προσκείσθωσαν μῦ ξ̄, ὥστε καὶ δ ῦ ᾱ μείζων ἐστὶν ϛ ῦ ε̄ μῦ ξ̄· ὥστε καὶ δύναμις ᾱ ἴση ἐστὶν ϛ ῦ ε̄ καὶ ἀριθμῷ τινὶ μείζονι μῦ ξ̄· ὥστε δείσει τὸν ἀριθμὸν μείζονα εἶναι ἢ μὴ ἐλάσσονα μῦ ιᾱ. Πάλιν ἐπεὶ ἡ δύναμις ᾱ λείψει μῦ ξ̄ ἐλάσσων ἐστὶν ϛ ῦ η̄, κοιναὶ προσκείσθωσαν μῦ ξ̄, ὥστε δ ῦ ᾱ ἴση ἐστὶν ϛ ῦ η̄ καὶ ἀριθμῷ τινὶ ἐλάττονι μῦ ξ̄, ὅθεν δεῖ τὸν ϛ ῦ εὑρίσκεσθαι μὴ μείζονα μῦ ιβ̄. Das heißt kurz: Da $x^2 - 60 > 5x$, oder $x^2 > 5x + 60$, ſo iſt x nicht kleiner 11. Da ferner

3) Ich werde hier und im Folgenden, ſobald es ſich nicht um die Diophant eigenthümliche Darſtellungsweiſe, ſondern nur um die Sache handelt, der beſſern Anſchaulichkeit wegen die Gleichungen und Formeln immer in der uns geläufigen Weiſe bezeichnen, und mich der Diophantiſchen Zeichen nur bedienen, wenn es darauf ankommt, ſeine eigenthümliche Denk- und Vorſtellungsweiſe wiederzugeben.

Digitized by Google

$x^2 - 60 < 8x$ oder $x^2 < 8x + 60$, so ist x nicht größer als 12. Untersuchen wir die Wurzeln beider Gleichungen genauer, so finden wir aus der ersten $x > \frac{5 + \sqrt{265}}{2}$ oder $x > 10{,}6394$, aus der zweiten $x < 4 + \sqrt{76}$ oder $x < 12{,}7178$. Demnach kann allerdings, Diophant's Resultate zuwider, x kleiner als 11 und größer als 12 werden; aber ich muß bemerken, daß Diophant unter dem Ausdrucke, die Zahl darf nicht größer sein als z. B. 12, immer soviel versteht als, sie darf nicht so groß als die nächst größere ganze Zahl, also nicht 13 sein. Wir sehen also aus diesem Beispiele, daß Diophant Mittel in Händen hatte, auch die irrationalen Wurzeln quadratischer Gleichungen, welche sich nicht versuchsweise finden lassen, durch Näherung anzugeben.

Aber wir wissen nicht bloß, daß Diophant die quadratischen Gleichungen aufzulösen verstand, wir können sogar ganz genau die Formel oder vielmehr die Regel angeben, nach welcher er die Wurzel bildete; natürlich ist diese Regel nicht verschieden von derjenigen, welche wir anwenden, und sie weicht nur in unwesentlichen Puncten von der unsrigen ab. Wenn uns nämlich eine Gleichung von der Form $mx^2 + px = q$ gegeben ist, so pflegen wir die ganze Gleichung, bevor wir sie auflösen, durch m zu dividiren; dann erst wenden wir die Regel an: addire zu dem absoluten Gliede das Quadrat des halben Coefficienten der Unbekannten, ziehe aus dieser Summe die Quadratwurzel, von der Quadratwurzel subtrahire den halben Coefficienten der Unbekannten, so ist die Differenz die Unbekannte. Indem sich nun die Wurzel x darstellt in der Form $-\frac{p}{2m} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4m^2} + \frac{q}{m}}$, so fällt in die Augen, daß man hier häufig mit Brüchen zu rechnen hat. Wahrscheinlich um diese Beschwerlichkeit zu vermeiden, scheint Diophant die gegebene Gleichung nicht durch m dividirt, sondern mit m multiplicirt zu haben; indem man nun hat $m^2x^2 + pmx = qm$, kann man mx als die Unbekannte ansehen, woraus sich dann ergiebt $mx = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}$ und $x = \frac{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}}{m}$. Es leuchtet nicht ganz klar ein, ob Diophant diesen Weg eingeschlagen hat; Thatsache aber ist, daß er die Wurzel immer in der zuletzt hingeschriebenen Gestalt betrachtet, die allerdings für die Praxis in den meisten Fällen bequemer ist

als die zuerſt gegebene. Nur muß ich geſtehen, daß ich, von Diophant's Standpunct betrachtet, in die Formel, wie ich ſie hingeſchrieben, einen Fehler hineingebracht habe. Diophant betrachtet nämlich durchaus nur eine Wurzel der quadratiſchen Gleichung, indem er den negativen Werth der Quadratwurzel nicht zu kennen ſcheint. Dieſe Beſchränkung darf uns nicht wundern in ſolchen Fällen, wenn eine der beiden Wurzeln negativ wird, alſo in den Gleichungen von der Form $x^2 \pm px = + q$; die Erſcheinung iſt aber auffallend in dem dritten Falle $x^2 - px = - q$, in welchem beide Wurzeln, wenn ſie reell ſind, poſitiv werden; in dieſem Falle betrachten auch ſchon die Araber [4]), ſowie die älteſten Italiener [5]) beide Wurzeln. Weicht alſo hierin Diophant von ſeinen Nachfolgern ab, ſo finden wir auf einer andern Seite ſogleich wieder einen Berührungspunct zwiſchen Beiden. Ich habe im zweiten Kapitel S. 48. geſagt, daß die Araber die quadratiſchen Gleichungen vor der Auflöſung auf eine kanoniſche Form bringen, in welcher alle Glieder poſitiv ſind. In denjenigen Fällen nun, in welchen die Gleichung eine rationale Auflöſung giebt, ſcheint Diophant keine Rückſicht auf irgend eine ſolche Form derſelben zu nehmen, ſondern zieht geradezu aus der Geſtalt, welche ſich zunächſt aus der Rechnung ergiebt, die Wurzel, wie die obigen Beiſpiele $x^2 = 4x - 4$, $84x^2 - 7x = 7$, $630x^2 - 73x = 6$ beweiſen. In den Fällen dagegen, wenn er über die Form der Wurzel eine Unterſuchung anſtellen oder die irrationale Wurzel finden will, ſieht er ſich veranlaßt, die Gleichung auf eine beſtimmte regelrechte Geſtalt zu reduciren, und zwar ordnet er dieſelbe ebenſo wie nach ihm die Araber, daß er nämlich alle

4) **Mohammed ben Musa p. 7.** „Wenn eine Aufgabe dich auf dieſen Fall ($x^2 + q = px$) führt, ſo verſuche ihre Auflöſung durch Addition; wenn aber dieſe nicht paſſend iſt, ſo iſt's die durch Subtraction gewonnene ohne Zweifel; dieſer Fall geſtattet nämlich ſowohl die Addition als die Subtraction, was in den andern Fällen nicht ſtattfindet." Vergl. **Behâ-eddîn p. 354—357. Nejm-eddîn Khân p. 459 sqq.**

5) Z. B. ſchon **Leonardo Bonacci von Piſa.** Nach Coſſali (Orig. I, 3.) ſagt er über den Fall $x^2 + q = px$ Folgendes: Wenn $\frac{1}{4}p^2 < q$, ſo iſt die Gleichung unmöglich, wenn $\frac{1}{4}p^2 = q$, ſo iſt $x = \frac{1}{2}p$ (beide Bemerkungen finden ſich auch bei Moh. ben Muſa a. a. O.), wenn $\frac{1}{4}p^2 > q$, ſo iſt $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ oder auch $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$. **Et sic si non solvetur quaestio cum diminitione, solvetur cum additione.**

Digitized by Google

alle Glieder positiv darstellt. So haben wir oben in dem Beispiel V, 33. gesehen, daß er die Gleichungen oder vielmehr die Ungleichheiten $x^2 - 60 > 5x$ und $x^2 - 60 < 8x$, um die Wurzeln zu finden, zuvor auf die positiven Formen $x^2 > 5x + 60$, $x^2 < 8x + 60$ reducirt. Daß diese Form der Gleichung diejenige gewesen, für welche er die Regel der Auflösung in einem der verlorenen Bücher gegeben hat, dafür sprechen nicht bloß die schon erwähnten und noch anzuführenden Beispiele, sondern auch der Ausdruck in der elften Definition, wo von den quadratischen Gleichungen die Rede ist. Nachdem er gesagt hat, man solle die negativen Glieder auf beiden Seiten addiren und Gleiches von Gleichem subtrahiren bis man dahin gekommen ist, daß ein Glied einem Gliede gleich wird, fährt er so fort: ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται, „spät erhin werde ich dir zeigen, wie der Fall aufzulösen ist, wenn zwei Species gleich einer Species übrig bleiben." Offenbar setzt der Ausdruck καταλειφθέντων, der auch in der vorhergehenden Regel gebraucht war, voraus, daß von einer Gleichung die Rede ist, aus welcher auf dem eben gelehrten Wege die negativen Glieder entfernt sind. Demnach ergiebt sich, daß wir auch bei Diophant, da er ebenfalls den Fall $x^2 + px + q = o$ vernachlässigt, drei Normalformen der quadratischen Gleichung zu unterscheiden haben; und wirklich finden sich die Auflösungen jedes dieser Fälle, jedoch für den ersten nicht ganz vollständig, in seinem Werke gelegentlich zerstreut angegeben. Wir wollen sie nach der Reihe durchnehmen.

Erster Fall. $mx^2 + px = q$; $x = \frac{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}}{m}$.

Beispiel VI, 6. Es wird in der Aufgabe gefordert, ein rechtwinkliges Dreieck zu suchen, so daß die Summe des Inhalts und einer Kathete (Alles natürlich bloß als Zahl gedacht) einer gegebenen Zahl gleich sei. Diophant nimmt an, die gegebene Zahl sei 7, und das Dreieck sei der Form nach gegeben, und habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$; so ist sein Inhalt $6x^2$, also führt die Aufgabe auf die Gleichung $6x^2 + 3x = 7$. Wollte Diophant nun diese Gleichung auflösen, so würde er für x einen irrationalen, also dem Sinne der Aufgabe nach unstatthaften Werth erhalten, darum untersucht er, wie er statt der Coefficienten 3, 4, 5, welche die Form des

Dreiecks von vorne herein als gegeben darstellen, andere hätten annehmen müssen, damit diese Gleichung eine rationale Wurzel gäbe. Er fährt darum so fort: Wenn man nun den halben Coefficienten von x ins Quadrat erhebt ($p = 3$, $\frac{1}{4}p^2 = \frac{9}{4}$) und dazu das Product der Zahl 7 und des Coefficienten von x^2 addirt ($mq = 42$), so müßte die Summe ein Quadrat werden. Das trifft aber nicht zu. [καὶ δεῖ τῶν ἀριθμῶν τῷ ἡμίσει ἐφ' ἑαυτὸ προσθεῖναι τὰς δυνάμεις (ἑπτάκις γενομένας) καὶ ποιεῖν τετράγωνον· οὐ ποιεῖται δὲ]. In diesen Worten nun ist uns die Gestalt des Theils der Wurzel, der sich hinter dem Wurzelzeichen befindet, vollkommen gegeben.

Zweiter Fall. $mx^2 = px + q$; $x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}}{m}$.

Beispiel IV, 45. giebt uns zunächst eine Ungleichheit, die auf diesen Fall führt. Es soll nämlich $2x^2 > 6x + 18$ sein. Diophant dividirt diese Gleichung nicht durch 2, weil dann der Coefficient von x, dessen Hälfte er braucht, ungerade werden würde. Er sagt: „Um nun hier eine Vergleichung anzustellen, so erheben wir den halben Coefficienten von x ins Quadrat, und wir erhalten 9; nun multipliciren wir den Coefficienten von x^2 mit der bestimmten Zahl 18, das giebt 36; dazu addiren wir 9, giebt 45, und davon ist die Wurzel nicht kleiner als 7 (das heißt, wie ich oben erwähnt habe, 6 ist zu klein). Dazu addiren wir den halben Coefficienten von x (giebt 10), und dividiren durch den Coefficienten von x^2, so finden wir, daß x nicht kleiner als 5 sein dürfe." Hier ist uns also die vollständige Form der Wurzel gegeben, aus welcher Diophant's Verfahren unzweifelhaft einleuchtet.

Wir können aber auch für diesen Fall eine wirkliche Gleichung beibringen. In der Aufgabe IV, 33. sagt Diophant über die Gleichung $3x + 18 = 5x^2$: „und es findet keine Auflösung in rationalen Zahlen statt; aber 5 ist eine um 1 vermehrte Quadratzahl; diese muß, mit 18 multiplicirt und um das Quadrat des halben Coefficienten von x, oder um $2\frac{1}{4}$ vergrößert, ein Quadrat geben." Dieses Raisonnement giebt uns wieder nur Licht über die Größe unter dem Wurzelzeichen.

Dritter Fall. $mx^2 + q = px$; $x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - mq}}{m}$.

Digitized by Google

Beiſpiel VI, 24. $\frac{1}{x^2} + 196x^2 - 336x - \frac{24}{x} + 172 = 196x^2 + \frac{1}{x^2}$. „Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, ziehe Gleiches von Gleichem ab, und multiplicire Alles mit x, ſo erhält man $336x^2 + 24 = 172x$. Dieſe Gleichung aber läßt ſich nicht auflöſen, wenn nicht das Quadrat des halben Coefficienten von x ($\frac{1}{4}p^2 = 7396$), nachdem man das Product der 24 Einheiten und des Coefficienten von x^2 ($24 \cdot 336 = 8064$) davon abgezogen hat, ein Quadrat wird.“ Diophant nimmt hier keine Rückſicht darauf, daß die Wurzel nicht nur nicht rational, ſondern ſogar imaginär wird; genug daß ſie nicht rational ausfällt, um die Gleichung als unſtatthaft zu verwerfen.

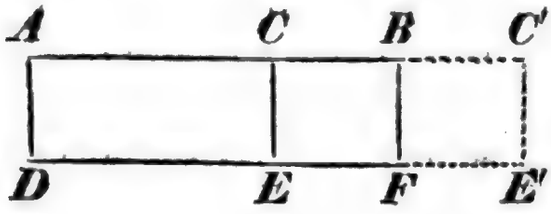
Auch für dieſen Fall ſind wir im Stande, ein an einer Ungleichheit vollſtändig durchgeführtes Beiſpiel beizubringen. V, 13. handelt es ſich darum, x ſo anzunehmen, daß $\frac{6x}{x^2+1}$ größer als $\frac{17}{12}$, alſo $17x^2 + 17$ kleiner als $72x$ wird. „Man erhebe den halben Coefficienten von x ins Quadrat, dieſes giebt 1296, davon ziehe man das Product der beſtimmten Zahl 17 und des Coefficienten von x^2 ab, alſo 289, ſo bleibt 1007. Davon iſt die Quadratwurzel nicht größer als 31 (das heißt, wie oben, die nächſte ganze Zahl, 32 wäre zu groß); dazu addire man den halben Coefficienten von x, ſo erhält man die geſuchte Zahl nicht größer als 67; endlich dividire man mit dem Coefficienten von x^2, ſo wird x nicht größer als $\frac{67}{17}$.“ Auch dieſes Beiſpiel giebt eine unzweifelhafte Gewähr für die oben aufgeſtellte Form der Wurzel.

In formeller Beziehung bemerke ich nur noch, daß Diophant den Begriff, den wir durch das Wort Coefficient bezeichnen, entweder durch πλῆθος, Anzahl, oder gar nicht ausdrückt; ſo ſagt er IV, 45.: ποιοῦμεν τῶν ϛ̃ς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό, das heißt: „wir erheben den halben Coefficienten von x (wörtlich die Hälfte der Zahlen) auf das Quadrat;“ καὶ τὰς δ῀ $\overline{\beta}$ ἐπὶ τὰς μ῀ $\overline{\iota\eta}$, und multipliciren den Coefficienten von x^2, 2, in die 18 Einheiten,“ wörtlich: und multipliciren die 2 Quadrate in die 18 Einheiten. Dagegen heißt es III, 18.: τὸ πλῆθος τῶν ϛ̃ς καὶ τῶν μονάδων.

Die angeführten Beiſpiele ſtellen alſo die Thatſache feſt, daß Diophant die allgemeine Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen

Digitized by Google

gekannt habe. Es ist nun mehrfach die Frage aufgeworfen worden, wie man zu dieser Auflösung gelangt sei. Montucla und Cossali leiten die Erfindung aus Betrachtung geometrischer Constructionen her. Allerdings läßt sich nicht leugnen, daß die Alten seit Euklides und vielleicht früher schon die Formeln $x^2 \pm px = q$, $px - x^2 = q$, geometrisch betrachtet, auflösen konnten. Der erste Fall, $x^2 + px = q$, so dargestellt $x(x+p) = q$ würde geometrisch heißen: eine gegebene gerade Linie p um ein Stück x zu verlängern, so daß das Rechteck aus der ganzen verlängerten Linie $p+x$ und dem angesetzten Stücke x einem gegebenen Raume q gleich werde. Der zweite Fall $x(x-p)$ unterscheidet sich von dem ersten blos darin, daß hier nicht die Verlängerung, sondern die zusammengesetzte Linie gleich x gesetzt ist. Der dritte Fall dagegen $px - x^2$ oder $x(p-x) = q$ befiehlt eine gegebene gerade Linie p in zwei Abschnitte x, $p-x$ zu theilen, so daß das Rechteck derselben einem gegebenen Raume q gleich sei. Alle diese Aufgaben waren den alten Geometern bekannt und werden mehrfach von ihnen angewendet. Ganz direct schon findet sich die geometrische Auflösung derselben in der noch allgemeineren Gestalt $mx^2 \pm px = q$, $px - mx^2 = q$ in Euklid's Elementen VI, 28. 29., wo diese Aufgaben, geometrisch ausgedrückt, so lauten: „An einer gegebenen geraden Linie, p, ein einer gegebenen geradlinigen Figur, q, gleiches Parallelogramm zu entwerfen, dessen Überschuß (in dem ersten) oder Ergänzung (in dem zweiten Falle) einem gegebenen Parallelogramm ähnlich ist." Dieses letzterwähnte Parallelogramm wird ein Quadrat, wenn der Coefficient m in obiger Formel 1 ist. Der geometrische Sinn der Aufgabe ist folgender:



An der gegebenen Linie $AB = p$ soll man ein Rechteck AE, AE' so anlegen, daß $AE = q$, $BE \backsim mc^2$, oder $CB : BF = m : 1$ werde. Nennt man also AD x, so ist $BC = mx$, $AC = p - mx$, $AC' = p + mx$, demnach das Rechteck $AE = x(p-mx)$, $AE' = x(p+mx)$; und es ist klar, daß aus

dieſen beiden Euklidiſchen Aufgaben ſich unmittelbar die geometriſche Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen ergiebt. Auf dieſe Aufgaben nun will Montucla [6]) die algebraiſche Auflöſung dieſer Gleichungen zurückgeführt wiſſen. Dieſelbe geometriſche Wahrheit nur etwas anders dargeſtellt, finden wir noch an einer andern Stelle der Euklidiſchen Werke wieder, nämlich Data 58, 59., welche den Lehrſatz ausſprechen: „Wenn ein gegebener Raum *AE* an eine gegebene Linie *AB* angefügt wird, aber um eine der Geſtalt nach gegebene Figur *BE* herüberragt oder zurückbleibt, ſo ſind die Seiten *BC*, *BF* des Überſchuſſes oder der Ergänzung gegeben.“ Das heißt, wenn $x(p+mx)=q$, ſo iſt x und mx gegeben. Faſt noch directer wird uns die Hinweiſung auf die quadratiſchen Gleichungen gegeben in den Sätzen 84. 85. der Data: „Wenn zwei gerade Linien einen gegebenen Raum unter einem gegebenen Winkel einſchließen, und ihr Unterſchied oder ihre Summe gegeben iſt, ſo ſind die Linien ſelbſt gegeben.“ Das heißt, wenn $xy=q$, $x\pm y=p$, ſo ſind x und y gegeben. Dieſe Sätze der Data macht Coſſali [7]) als Fundament für die Erfindung der algebraiſchen Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen geltend. Der zuletzt angeführte Satz würde ſogar beide Wurzeln der

---

6) Hist. d. Math. T. I. p. 413. Lorsque j'ai dit, que les *Arabes*, et avant eux *Diophante* avoient trouvé la résolution des équations du second degré, je n'ai entendu parler que de cette résolution en forme analytique, semblable à celle que nous employons dans notre algèbre; car il faudroit avoir une idée bien fausse de la géométrie des anciens, pour penser que des problêmes qui mènent au second degré, leur fussent inaccessibles. On trouve cette résolution énoncée en d'autres termes, dans les Elémens d'Euclide, et notamment dans les propositions 27 et 28 (nach den gewöhnlichen Ausgaben 28. 29) du VI. livre, propositions qui, par cette raison, ont été mal — à — propos omises par divers éditeurs d'Euclide qui ne les ont pas entendues et en ont méconnu l'usage.

7) Origine dell Alg. T. I. p. 91. Io mi do a credere, che non possa alcuno nei Dati LVIII.LIX (di Euclide) non iscorgere sotto geometrica forma tutta l'arte della risoluzione delle equazioni di secondo grado, e non ravvisare nei Dati 84. 85 due delle applicazioni di essa anche appresso di noi ordinarie. Nello spazio pertanto dei secoli che passarono da Euclide a Diofanto qual cosa più facile, che alcuno trasportasse dal geometrico all' aritmetico i Dati 58. 59 di Euclide, e così la soluzione stabilisse delle equazioni di secondo grado?

Digitized by Google

Gleichung gegeben haben, wenn man bedenkt, daß, wenn x und y die beiden Werthe für x in der Gleichung $x^2 + px = q$ sind, dann $x + y = p$, $xy = q$ ist. Da aber Diophant nur eine Wurzel der quadratischen Gleichung anerkennt, so folgt daraus wohl, daß er die Auflösung derselben aus diesem Satze nicht entnommen hat. Deßungeachtet läßt Bachet sich durch einen falsch verstandenen Ausdruck im Texte Diophant's verleiten zu glauben, daß Diophant selbst die Aufgaben, aus der gegebenen Summe oder Differenz und dem Produkte zweier Zahlen die Zahlen zu finden, als Quelle für die Auflösung der quadratischen Gleichungen betrachte. Die hieher gehörigen Stellen aus Diophant sind die Aufgaben 30. 31. und 33. des ersten Buchs, folgenden Inhalts:

Aufg. 30. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe und Product gegebenen Zahlen gleich sind. — Es muß aber, wenn man von dem Quadrat der halben Summe das Produkt abzieht, eine Quadratzahl übrig bleiben.

Aufg. 31. Zwei Zahlen zu finden, so daß ihre Summe und die Summe ihrer Quadrate gegebenen Zahlen gleich sind. — Es muß aber, wenn man von der doppelten Summe der Quadrate das Quadrat der Summe abzieht, eine Quadratzahl übrig bleiben.

Aufg. 33. Zwei Zahlen zu finden, so daß ihr Unterschied und ihr Product gegebenen Zahlen gleich sind. — Es muß aber das vierfache Product nebst dem Quadrat des Unterschiedes zusammen eine Quadratzahl ausmachen.

Hinter jede der drei Determinationen, welche den Zweck haben, die Auflösung rational zu machen, setzt Diophant die Worte: ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν. Diese Worte, welche ganz einfach sagen: „das läßt sich aber bewerkstelligen," hat Bachet insofern falsch verstanden, als er dem Adjectiv πλασματικόν einen transitiven Sinn giebt und meint, es bezeichne etwas, woraus etwas Anderes gebildet werden könne. Weil nun aber in der oben angedeuteten Weise die Auflösung der quadratischen Gleichungen nur aus den Aufgaben 30. und 33., nicht aus der Aufgabe 31. hervorgeht, so hielt Bachet die Worte ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν hinter der Determination zu dieser Aufgabe für unächt, und schaltet sie in Sternchen, sein Corruptionszeichen, ein; in seiner Lateinischen Übersetzung behält er an allen drei Stellen das Griechische Wort bei und sagt: **Est autem hoc Plasmaticum.** Der Wahrheit näher, wenn auch nicht ganz richtig, übersetzt Xylander: **Hoc autem ut effictum**

Digitized by Google

aliunde, was Bachet natürlich ganz verwirft. Aber hören wir ihn selbst in seinem Commentar zur dreiunddreißigsten Aufabe: Superest ut explicem verba illa ἔστι δὲ τοῦτο πλοσμιατικόν, quae tum huic quaestioni, tum trigesimae et trigesimae primae adjecta sunt statim post conditionem, quaeque hoc loco dilucidanda recepi. Prius tamen monendus est lector, nec Scholiastem, nec Xilandrum mentem Diophanti assequutum esse, quod cuilibet fiet manifestum qui ea quae uterque ad trigesimam commentus est legere voluerit. Sane non vacat in eorum nugis refellendis diutius immorari. Praeterea Xilandes verba ipsa male reddidit, nam Plasmaticum, interpretatus est, effictum aliunde; cum potius significet id a quo aliud quippiam effingi et plasmari potest. Ego itaque nil aliud voluisse Diophantum ajo, quam indicare ex hujusmodi quaestionum solutione, seu ex conditionibus adjectis, vel ex canonibus inde deductis formari et plasmari quodammodo regulas illas quas vocant compositas, cum scilicet ex tribus infimis speciebus, duae uni aequales reperiuntur, seu ut loquitur Franciscus Vieta, regulas de quadrato affecto sub latere [8]). Etenim prima et secunda illarum regularum, ab hac ipsa quaestione trigesima tertia facile deducuntur. Tertia vero pendet omnino a trigesima. Quamobrem cum a trigesima prima nulla formetur hujusmodi regula, non dubito eadem verba ibi temere inculcata esse, ab ipso scilicet Scholiasta, vel imperito amanuensi ex aliis quaestionibus eo translata. Es folgt nun in tyronum gratiam eine weitläufige Auseinandersetzung des Zusammenhangs, in welchem jene Diophantischen Aufgaben mit der Auflösung der verschiedenen Fälle der quadratischen Gleichungen stehen, womit ich meine Leser verschonen will.

Diese Bachet'sche Hypothese, ebenso wie die Montucla'sche und und Cossali'sche lehren, wie die Auflösung der quadratischen Gleichungen hätte gefunden werden können. Da wir aber gar keine Andeutung besitzen, auf welchem Wege diese Erfindung wirklich gemacht

---

8) Regulae compositae heißen bei den alten Italienern die drei Fälle der gemischten quadratischen Gleichung; tres infimae species sind die bekannte Zahl (Coefficient von x^0) und die erste und zweite Potenz der Unbekannten. Über Vieta's horrible Kunstsprache werde ich späterhin im Zusammenhange sprechen.

Digitized by

worden, so müssen wir die Sache dahingestellt sein lassen und uns einstweilen mit dem negativen Resultate begnügen: Wir wissen weder, ob die Auflösung der quadratischen Gleichungen, welche Diophant kennt, von ihm erfunden oder ob sie schon früher vorhanden gewesen, noch, auf welchem Wege er oder seine Vorgänger zu dieser Erfindung gelangt sind. Es hat indeß die Annahme Manches für sich, daß die bei Diophant erscheinende algebraische Regel eine bloße Übersetzung geometrischer Constructionen in die arithmetische Sprache sei.

3. Kubische Gleichungen.

Das einzige Beispiel von der Auflösung einer kubischen Gleichung, welches Diophant uns darbietet, ist weit entfernt, den Italienern des sechszehnten Jahrhunderts ihren wohlverdienten Lorbeer entreißen zu wollen. In der Aufgabe **VI**, 19. handelt es sich darum, eine Kubikzahl zu finden, die um 2 größer als eine Quadratzahl ist. Diophant setzt die Wurzel der Kubikzahl $x-1$, die Wurzel der Quadratzahl $x+1$, durch welche sehr willkührliche Annahme er auf eine kubische Gleichung geführt wird, deren Auflösung auch dem Ungeübtesten in die Augen springt. Es ist der Annahme zufolge

$$(x-1)^3 = (x+1)^2 + 2, \text{ das heißt}$$
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$$

Zwar disponirt Diophant diese Gleichung nicht weiter, sondern fügt ihr unmittelbar die Auflösung bei in den Worten ὅθεν ὁ ς̀ εὑρίσκεται μ$^{\sigma}$ δ̄. Dieses Resultat ergiebt sich aber wirklich sogleich von selbst, wenn wir die Gleichung auf Diophantische Weise, das heißt so ordnen, daß alle Glieder positiv werden. Wir erhalten dann

$$x^3 + x = 4x^2 + 4$$
$$\text{oder} \quad x(x^2+1) = 4(x^2+1)$$
$$\text{folglich} \quad x = 4$$

Von den beiden andern Wurzeln, $x = \pm\sqrt{-1}$, welche sich eben so unmittelbar ergeben, ist natürlich hier nicht die Rede.

In der folgenden Aufgabe, in welcher eine Kubikzahl gesucht wird, die um 2 kleiner ist als eine Quadratzahl, schlägt Diophant einen andern Weg ein.

Digitized by

Aus einem einzigen, überdieß ſo unbedeutenden Datum ſind wir natürlich nicht im Stande, zu beurtheilen, wie weit unſerm Auctor die Behandlung höherer als quadratiſcher Gleichungen bekannt geweſen iſt.

II. Unbeſtimmte Gleichungen.

Diophant behandelt, wie ich oben ſchon einmal erwähnt habe, nirgend unbeſtimmte Gleichungen des erſten Grades. Diejenigen Aufgaben des erſten Buchs, welche auf eine ſolche Gleichung führen würden, werden von ihm dadurch, daß eine der geſuchten Zahlen von vorne herein beliebig als gegeben angenommen wird, ſogleich in beſtimmte verwandelt. Man vergleiche zu dem Ende die Aufgaben 14. und 25 — 28. des erſten Buchs. Es mag dieſer mangelnde Theil ſeiner Lehre zu den zwiſchen dem erſten und zweiten Buche wahrſcheinlich ausgefallenen Stücken gehört haben. Indeß läßt ſich eine andere Betrachtung, welche vermuthen läßt, daß Diophant dieſe Gleichungen gar nicht behandelt habe, nicht ganz verwerfen. Wie es nämlich bei den unbeſtimmten quadratiſchen Gleichungen ſich allein darum handelt, ein rationales Reſultat zu Wege zu bringen, ſo hat die Auflöſung der unbeſtimmten Gleichungen des erſten Grades nur inſofern Sinn, als es darauf ankommt, ein Reſultat in ganzen Zahlen zu finden. Wie die Auflöſung jener aufhört, eine Kunſt zu ſein, wenn man irrationale Werthe ſtatuirt, ſo geſchieht daſſelbe mit dieſen, wenn man ſich mit Brüchen begnügt. Aber eine ſolche Bevorzugung ganzer Zahlen, eine ſolche Ausſchließung der Brüche aus ſeinen Reſultaten ſcheint unſerm Auctor durchaus fremde geweſen zu ſein. Wir finden wenigſtens in dem Vorhandenen nirgend eine Spur, daß er ſich dieſe Bedingung geſtellt habe. Ich will indeß auf dieſen Schluß, der leicht das Gepräge eines logiſchen Cirkels an ſich tragen könnte, keinen weiteren Werth legen. Wir betrachten deshalb ſogleich

1. die unbeſtimmten Gleichungen des erſten Grades.

Dieſe Gleichungen erſcheinen bei Diophant immer in der Geſtalt, daß irgend eine oder zwei, nie mehre Funktionen der Unbe-

Digitized by Google

kannten von der Form $Ax^2 + Bx + C$ zu einem rationalen Quadrat gemacht werden sollen. Demnach haben wir hier mit der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = y^2$, oder mit zwei Gleichungen derselben Form zu thun. Es unterscheiden sich hier also ganz natürlich zwei Fälle, die einfache und die doppelte Gleichung.

a) Einfache Gleichung, *aequatio simplex.*

Je nachdem einer oder mehre der Coefficienten A, B, C entweder verschwinden oder besondern Bedingungen unterliegen, gewinnt die Gleichung $Ax^2 + Bx + C = y^2$ specielle Gestalten, die ich hier, so weit sich bei Diophant Beispiele davon finden, der Reihe nach durchgehen will. Zuvor bemerke ich nur noch, daß Diophant die rechte Seite der Gleichung, $= y^2$, immer in Worten ausdrückt, ἴσον (ἴσοι etc.) τετραγώνῳ.

1. Gleichungen, deren rationale Auflösung immer möglich ist. Dieser Fall tritt ein, wenn entweder A, oder C, oder beide zugleich o sind; demnach haben wir hier folgende drei Formeln zu betrachten:

$Bx = y^2$. Diophant setzt in dem Beispiel III, 5. y^2 irgend einer Quadratzahl gleich; sein Beispiel ist $2x = y^2$; er setzt $y^2 = 16$, so wird $x = 8$. Man könnte auch $y = mx$ setzen, so würde $x = \frac{B}{m^2}$.

$Bx + C = y^2$. Für y^2 wird irgend eine bestimmte Quadratzahl, m^2, substituirt; dann wird $\frac{m^2 - C}{B}$. Beispiele: III, 7. 8. 10. 11. 19. Die rationale Auflösung dieser Gleichung wird im Allgemeinen immer möglich sein; daß aber x in vielen Fällen, z. B. $3x + 2 = y^2$ u. a. keine ganze Zahl sein kann, deutet Diophant nirgend an, weil ganze Zahlen nicht das sind, was er sucht. Seine einzige Fürsorge bei dieser Gleichung ist die, daß x positiv werde, was in jedem bestimmten Zahlenbeispiel und nach den verschiedenen Vorzeichen von B und C sich immer leicht bewerkstelligen läßt.

$Ax^2 + Bx = y^2$. Für y setzt Diophant x mit irgend einem Zahlencoefficienten, $\frac{m}{n}x$, so erhält er $Ax + B = \frac{m^2}{n^2}x$, also $x = \frac{Bn^2}{m^2 - An^2}$. Auf dasselbe Resultat führt die Leslie'sche Zerlegungsmethode, nach welcher man $x = \frac{m}{n}y$, $Ax + B = \frac{n}{m}y$ setzt;

Digitized by Google

eine Methode, die in vielen Fällen die Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen sehr vereinfacht, von der sich aber bei Diophant keine Spuren finden. Beispiele für diesen Fall siehe II, 22. 34. IV, 23. 34.

2. Gleichungen, deren rationale Auflösung nur unter gewissen Bedingungen möglich ist. Es kann hier nicht meine Absicht sein, alle Fälle und Bedingungen zu untersuchen, in und unter welchen die Gleichung $Ax^2 + Bx + C = y^2$ möglich oder unmöglich ist. Diese Untersuchungen gehören in ein Lehrbuch über die unbestimmte Algebra, nicht in einen historischen Bericht über Diophantus. Indem ich also den Leser, welcher sich über den jetzigen Standpunct dieser Methoden unterrichten will, an die neueren Lehrbücher und in historischer Beziehung namentlich an die Schriften von Euler, Leslie, Lagrange, Legendre u. A. verweise [9]), begnüge ich mich hier dasjenige aufzustellen, was bei Diophant sich vorfindet. Wenn wir also die Form $Ax^2 = y^2$, welche nur möglich ist, wenn A Quadratzahl ist, übergehen, bleiben uns noch zwei Formen der Gleichung zu betrachten übrig.

$Ax^2 + C = y^2$. Die rationale Auflösung dieser Gleichung ist nach Diophant in folgenden Fällen möglich. 1) Wenn A positiv und Quadratzahl, also $a^2x^2 + C = y^2$ ist. Diophant setzt $y = ax \pm m$, woraus sich ergiebt $x = \pm \frac{C - m^2}{2am}$. Beispiele für $A = 1$ finden sich II, 12. 13. 14. 29. 30. III, 12. 13. Für andere quadratische Werthe von A II, 29. III, 13. 29. IV, 17. 18. 46. — 2) Wenn C positiv und Quadratzahl, also $Ax^2 + c^2 = y^2$ ist. Diophant setzt $y = mx \pm c$, also $x = \pm \frac{2mc}{A - m^2}$. Beispiele IV, 8. 33. Die Auflösung dieses Falles in ganzen Zahlen war die herausfordernde Aufgabe, welche im Jahre 1657 Fermat den Englischen Mathematikern stellte, und welche den Hauptgegenstand des von Wallis herausgegebenen und im zweiten Bande seiner Werke wieder abgedruckten Commercium episto-

9) Als sehr belehrend muß ich hier auch noch eine kleine Schrift meines verehrten und gelehrten Lehrers, des Herrn Professor F. Buchner, nennen: Beitrag zur Auflösung der unbestimmten Aufgaben des zweiten Grades. Elbing (1838). 4., welche mit häufigen Hinweisungen auf die Geschichte diese Lehre in sehr interessanter Weise behandelt.

Digitized by Google

licum ausmacht. Künftig mehr über dieſen Gegenſtand. — 3) Wenn eine Auflöſung der Gleichung bekannt iſt, laſſen ſich beliebig viele andere finden. So ganz allgemein ſpricht Diophant dieſen Satz nur für einen beſchränkten Fall aus, wenn nämlich C negativ iſt und die Gleichung alſo die Form hat $Ax^2 - C = y^2$. Für dieſen Fall ſagt er VI, 16.: „Wenn zwei Zahlen gegeben ſind, und man hat eine Quadratzahl, welche mit einer der gegebenen Zahlen multiplicirt ein Quadrat giebt, wenn man die andern von dem Produkte abzieht, ſo läßt ſich auch noch eine andere und zwar größere Quadratzahl finden, welche daſſelbe leiſtet.“ Iſt nämlich der Fall $Ap^2 - C = q^2$ bekannt, ſo ſetzt Diophant $x = x_1 + p$; dadurch wird $Ax^2 - C = Ax_1^2 + 2Apx_1 + Ap^2 - C$ das iſt $Ax_1^2 + 2Apx_1 + q^2 = y_1^2$. Demnach iſt auf dieſe Weiſe die Auflöſung dieſes Falles auf einen auflösbaren Fall der allgemeinen Formel $Ax^2 + Bx + C = y^2$ reducirt, den wir unten erwähnen wollen. Es iſt zu verwundern, daß Diophant dieſe Regel nicht weiter angewandt hat, da ſie nicht nur für die allgemeinere Form $\pm Ax^2 \pm C = y^2$, ſondern auch für die ganz allgemeine Gleichung $Ax^2 + Bx + C = y^2$ gilt. In ſpeciellerer Form erſcheint der Satz VI, 12., wenn in der Gleichung $Ax^2 + C = y^2$ A und C poſitiv ſind. Es heißt nämlich in dem Lemma daſelbſt: „Wenn zwei Zahlen gegeben ſind, deren Summe ein Quadrat iſt, ſo laſſen ſich unzählig viele Quadratzahlen finden, deren jede mit einer gegebenen Zahlen multiplicirt ein Quadrat giebt, wenn man die andere gegebene Zahl hinzuaddirt.“ Dieſes iſt aber nichts anderes als der ſpecielle Fall, wenn der eine bekannte Werth von x die Einheit iſt. Ja im weiteren Sinne kann man auch noch den unter 2) angeführten Fall hieher zählen, weil daſelbſt $x = 0$ als die bekannte Auflöſung betrachtet werden kann. Noch auffallender aber, als die unnütze Beſchränkung der VI, 16. ausgeſprochenen Regel iſt der Umſtand, daß Diophant die Anwendbarkeit derſelben öfters überſehen hat. So erklärt er III, 12. die Auflöſung der Gleichung $52x^2 + 12 = y^2$ für unmöglich, weil 52 keine Quadratzahl iſt, da doch $52 + 12$ d. i. 64 eine Quadratzahl iſt, welche Bedingung nach VI, 12. zur Auflöſung der Gleichung vollkommen hinreicht, und es leicht iſt, aus dem Werthe $x = 1$, welcher $y = 8$ macht, andere herzuleiten, z. B. $x = \frac{1}{2}$, $y = 5$, oder $x = \frac{11}{6}$, $y = \frac{41}{3}$, oder $x = \frac{11}{3}$, $y = \frac{80}{3}$, oder $x = \frac{1}{23}$, $y = \frac{80}{23}$. In der folgenden Auf-

gabe III, 13. erklärt Diophant die Auflösung der Gleichung $266x^2 - 10 = y^2$ für unmöglich, da doch hier ebenfalls $x = 1$ eine rationale Auflösung giebt, weil $266 - 10 = 256 = (16)^2$ ist. Wirklich unmöglich dagegen ist die Auflösung der Gleichung $60x^2 + 2520 = y^2$, VI, 13., wenn gleich der Grund, aus welchem Diophant sie erwirft, daß nämlich $60 + 2520$ kein Quadrat ist, zu beschränkt ist. — Noch eine interessante Bemerkung, welche Diophant VI, 15. macht, kann ich nicht unerwähnt lassen, die nämlich, daß die Gleichung $Ax^2 - c^2 = y^2$ unmöglich ist, wenn A nicht die Summe zweier Quadrate ist. (S. Legendre Théorie des Nombres p. 60.) Es bleibt uns nun nur noch die vollständige Formel

$Ax^2 + Bx + C = y^2$ zu betrachten übrig. Euler hat gezeigt, wie man durch Einführung einer andern Variablen $x = z - \frac{B}{2A}$ diese Gleichung auf die zuletzt betrachtete, in welcher das zweite Glied fehlt, zurückführen könne, indem die Transformation ergiebt $Az^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} = y^2$. Diophant aber behandelt diese Form mit der vorigen unabhängig und nicht so vollständig als jene. Nach ihm ist die Auflösung nur möglich 1) Wenn A positiv und Quadratzahl, also $a^2x^2 + Bx + C = y^2$ ist; dann setzt er $y = ax + m$, woraus $x = \frac{C - m^2}{2am - B}$ sich ergiebt. Von diesem Falle finden sich in seinem Werke sehr viele Beispiele II, 20. 21. 23. 24. 33. III, 9. 16. 18. IV, 15. 21. V, 3. 4. 18. 20. u. s. w. — 2) Wenn C positiv und Quadratzahl, also $Ax^2 + Bx + c^2 = y^2$ ist; er setzt dann $y = mx + c$, so wird $x = \frac{2mc - B}{A - m^2}$. Beispiele: II, 17. IV, 9. 10. 12. 14. 45. u. s. w. — 3) Wenn $\frac{1}{4}B^2 - AC$ positiv und Quadratzahl ist. Diophant spricht diese Bedingung nicht offen aus, sondern erschleicht nur, auf das zufällige Eintreffen derselben gestützt, eine Auflösung. Er will nämlich IV, 33. die Formel $3x + 18 - x^2$ zu einem Quadrate machen. Er setzt $3x + 18 - x^2 = 4x^2$, also ist die quadratische Gleichung $3x + 18 = 5x^2$ aufzulösen; aber οὐκ ἔστιν ἡ ἴσωσις ῥητή. Nun sind die $5x^2$ eine um 1 vermehrte Quadratzahl (5 ist nämlich entstanden aus dem Coefficienten von x^2 in der gegebenen Formel und dem Coefficienten des angenommenen Quadrats $4x^2$); es sollte also

Digitized by Google

dieses, mit den 18 Einheiten multiplicirt und zu dem Quadrat des halben Coefficienten von x, nämlich $\frac{9}{4}$ addirt, ein Quadrat sein. Darum sind wir nun darauf hingeführt, eine Quadratzahl zu suchen, welche zu 1 addirt und achtzehnmal genommen, wenn man $\frac{9}{4}$ addirt, ein Quadrat giebt. Die gesuchte Quadratzahl sei z^2 (Diophant nimmt wieder dasselbe Zeichen $\delta^{\tilde{\upsilon}}\overline{\alpha}$), so erhalten wir actis agendis die Formel $18z^2+\frac{81}{4}$, welche ein Quadrat werden soll; oder es soll $72z^2+81=w^2$ sein. Diophant setzt nur $w=8z+9$, woraus er findet $z=18$. Nun kehrt er zu der ursprünglichen Aufgabe zurück und setzt $3x+18-x^2$ nicht $=4x^2$, sondern $=324x^2$, also $3x+18=325x^2$, καὶ γίνεται ὁ ς̀ $\overline{\text{οη}}^{\text{τκε}}$ d. i. $x=\frac{78}{325}$. Nachdem ich so Diophants Beispiel ausführlich durchgenommen habe, wollen wir einmal die Methode allgemein betrachten. Sei $Ax^2+Bx+C=m^2x^2$, so wird $x=\frac{-\frac{1}{2}B\pm\sqrt{\frac{1}{4}B^2-AC+Cm^2}}{A-m^2}$; das heißt, damit x rational werde, muß man m so annehmen, daß $\frac{1}{4}B^2-AC+Cm^2$ ein Quadrat wird. Diese Bedingung läßt sich erfüllen, wenn $\frac{1}{4}B^2-AC$ ein Quadrat ist, aber außerdem in allen andern Fällen, in welchen, wenn wir $\frac{1}{4}B^2-AC=D$ setzen, die Formel $Cm^2+D=y^2$ rationale Auflösungen zuläßt. Es ist also hier die allgemeine Form der unbestimmten quadratischen Gleichung auf die Auflösung des Falles reducirt, in welchem das zweite Glied fehlt, und zwar auf einem anderen Wege, als der ist, den Euler eingeschlagen hat; wir finden also in diesem speciellen Beispiele bei Diophant gewissermaßen den Keim, welcher unter Eulers Händen sich entwickelt hat. Ebenso hätte man auch noch auf eine dritte Weise diese Reduction vornehmen können, wenn man $Ax^2+Bx+C=m^2$ gesetzt hätte; dann würde $x=\frac{-\frac{1}{2}B\pm\sqrt{\frac{1}{4}B^2-AC+Am^2}}{A}$. Es läßt sich also, wenn wir wieder $\frac{1}{4}B^2-AC$ der Kürze wegen mit D bezeichnen, die Formel Ax^2+Bx+C sowohl auf Am^2+D, als auf Cm^2+D reduciren. Da es aber nicht in meinem Plane liegt, diese Theorie weiter zu führen als Diophant gethan hat, so sei das Gesagte genug.

Digitized by Google

b) Doppelte Gleichung, *aequatio duplicata.*

Unter dem Namen doppelte Gleichung[10]) verſteht Diophant die Aufgabe, für die Unbekannte x einen ſolchen Werth zu finden, daß zwei Funktionen derſelben zugleich Quadrate werden. Demnach haben wir zwei Gleichungen $Ax^2+Bx+C=y^2$, $A_1x^2+B_1x+C_1=y_1^2$ in rationalen Zahlen zu löſen. Diophant's Unterricht über die Behandlung dieſer Gleichungen iſt nicht vollſtändig und wir müſſen uns die einzelnen Winke und Vorſchriften, welche er hie und da giebt, aus den einzelnen Orten, an denen ſie ſich zerſtreut befinden, zuſammenſuchen. Die erſte Bedingung iſt natürlich die, daß jede der beiden Funktionen an und für ſich ein Quadrat werden könne. Wir haben geſehen, daß das immer der Fall iſt, wenn das erſte Glied, welches x^2 enthält, in der Funktion fehlt. Für dieſen Fall giebt Diophant eine allgemeine Regel, nebſt den nöthigen Beſchränkungen. Die Regel findet man in der Aufgabe II, 12.; die Bedingungen, von denen die Möglichkeit ihrer Anwendung abhängt, in den Sätzen III, 18. IV, 35. 45. zerſtreut. Wir wollen das daſelbſt Vereinzelte hier kurz zuſammenfaſſen. Damit die gleichzeitige rationale Auflöſung der Gleichungen $Bx+C=y^2$, $B_1x+C_1=y_1^2$ möglich ſei, iſt nothwendig, entweder

1. daß B und B_1 ſich zu einander verhalten, wie zwei Quadratzahlen, oder mit einem andern Ausdrucke, daß B und B_1 ähnliche Flächenzahlen ſeien. III, 18. IV, 35. Ein ſpecieller Fall iſt, wenn $B=B_1$, z. B. II, 12. 14. III, 14. 18. IV, 35. Oder
2. daß C ſowohl als C_1 jedes für ſich ſchon Quadratzahl ſei. IV, 45.

Der Zweck der einen wie der andern Bedingung iſt der, daß man durch Multiplication mit einem quadratiſchen Factor entweder die Coefficienten von x, oder die abſoluten Glieder in beiden Functionen einander gleich machen könne, damit ſie bei der Subtraction ſich gegenſeitig wegheben. Trifft nun eine dieſer beiden Bedingungen zu und hat man durch Multiplication mit quadratiſchen

---

10) Es finden ſich im Griechiſchen Texte dafür drei Ausdrücke: διπλοϊσότης II, 12.; διπλῆ ἰσότης II, 12. III, 14. 18. 20. IV, 24. 35. 45., und διπλῆ ἴσωσις II, 14. III, 15. 17.

Digitized by Google

Factoren entweder die Coefficienten von x oder die absoluten Glieder einander gleich gemacht, so ist Diophant's Regel II, 12. folgende:

Nimm die Differenz beider Ausdrücke und suche zwei Zahlen, deren Product dieser Differenz gleich ist, so ist das Quadrat der halben Summe derselben gleich dem größern Ausdrucke, das Quadrat der halben Differenz gleich dem kleineren.

Wir wollen diese Regel an den einzelnen Fällen erläutern, mit besonderer Berücksichtigung die von Diophant gegebenen Beispiele.

Erster Fall. Wenn B und B_1 sich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten. Sie also $B = bm^2$, $B_1 = bm_1^2$, so haben wir die beiden Gleichungen

$$bm^2x + C = y^2, \quad bm_1^2x + C_1 = y_1^2.$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit m_1^2, die zweite mit m^2, so erhalten wir $bm^2m_1^2x + Cm_1^2 = m_1^2y^2$, und $bm^2m_1^2x + C_1m^2 = m^2y_1^2$. Die Differenz ist $Cm_1^2 - C_1m^2 = m_1^2y^2 - m^2y_1^2 = (m_1y + my_1)(m_1y - my_1)$. Zerlegt man also den Ausdruck $Cm_1^2 - C_1m^2$ in zwei Factoren, P, Q, und setzt $m_1y + my_1 = P$, $m_1y - my_1 = Q$, so wird $m_1y = \frac{1}{2}(P+Q)$, $my_1 = \frac{1}{2}(P-Q)$. Substituiren wir nun einen dieser Werthe für m_1y oder für my_1 in die betreffenden Gleichungen, so erhalten wir die Werthe für x. Es wird also sein $bm^2m_1^2x + Cm_1^2 = \frac{1}{4}(P+Q)^2 = \frac{1}{4}P^2 + \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{4}Q^2$. Aber $PQ = Cm_1^2 - C_1m^2$,

folglich $x = \frac{\frac{1}{4}(P^2+Q^2) - \frac{1}{2}(Cm_1^2 + C_1m^2)}{bm^2m_1^2}$; und dasselbe Resultat hätten wir erhalten, wenn wir in die Gleichung $bm^2m_1^2x + C_1m^2 = m^2y_1^2$ für die letzte Größe ihren Werth $\frac{1}{4}(P-Q)^2$ substituirt hätten. Da Diophant Brüche nicht ausschließt, so läßt sich die Größe $Cm_1^2 - C_1m^2$ allemal auf unzählige Weise in zwei Factoren zerlegen, und er hat nur darauf zu achten, daß nicht $\frac{1}{4}(P+Q)^2$ kleiner als Cm_1^2 oder $\frac{1}{4}(P-Q)^2$ kleiner als C_1m^2 werde, um negative Werthe von x zu vermeiden. Sind die Coefficienten B und B_1 beide negativ, so macht das in der Behandlung keinen Unterschied; ist aber einer von ihnen positiv und der andere negativ, so können sie sich natürlich nie wie Quadratzahlen verhalten, und die Auflösung ist dann wenigstens auf diesem Wege nicht möglich. Sind B und B_1 nicht bloß ähnliche Zahlen, sondern schon beide

selbst

ſelbſt Quadratzahlen, ſo macht das weiter keinen Unterſchied, als daß man in der Formel $b = 1$ zu ſetzen hat. Iſt dagegen ſchon von Hauſe aus $B = B_1$, ſo iſt weiter keine Veränderung mit den gegebenen Gleichungen nöthig. Die Subtraction ergiebt dann geradezu $C - C_1 = y^2 - y_1^2$. Iſt hier wieder $C - C^1 = PQ$, ſo wird $y = \frac{1}{2}(P+Q)$, $y_1 = \frac{1}{2}(P-Q)$, alſo $Bx + C = \frac{1}{4}(P+Q)^2$, $x = \frac{\frac{1}{4}(P^2+Q^2) - \frac{1}{2}(C+C_1)}{B}$. So hat Diophant **II**, 12. die Aufgabe geſtellt, für einen und denſelben Werth von x die Ausdrücke $x+3$ und $x+2$ zu Quadraten zu machen. Hier iſt $B = B_1 = 1$, $C = 3$, $C_1 = 2$; alſo $y^2 - y_1^2 = 1$. Unter den unzähligen Zahlen, deren Product 1 iſt, wählt Diophant die Zahlen 4 und $\frac{1}{4}$; es iſt alſo $2y = 4 + \frac{1}{4}$, $2y_1 = 4 - \frac{1}{4}$, $y = \frac{17}{8}$, $y^1 = \frac{15}{8}$. Setzt man alſo $x+3 = \frac{289}{64}$, ſo wird $x = \frac{97}{64}$; und ſetzt man $x+2 = \frac{225}{64}$, ſo wird ebenfalls $x = \frac{97}{64}$. So macht Diophant **II**, 14. die Ausdrücke $x-6$ und $x-7$, **III**, 14. die Ausdrücke $10x+54$ und $10x+6$ zu Quadraten, u. ſ. f.; **III**, 19. dagegen befiehlt uns, die Ausdrücke $\frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ und $\frac{5}{8}x - \frac{13}{8}$ zu Quadraten zu machen; hier verhält ſich $\frac{5}{2} : \frac{5}{8} = 4 : 1$; multiplicire ich alſo die erſte Gleichung $\frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = y^2$ mit 1, die zweite $\frac{5}{8}x - \frac{13}{8} = y_1^2$ mit 4, oder, um ganze Zahlen zu Coefficienten zu erhalten, die erſte mit 4, die zweite mit 16, ſo werden die Coefficienten von x in beiden Gleichungen dieſelbe, und ich erhalte $10x - 14 = 4y^2$, $10x - 26 = 16y_1^2$; demnach $4y^2 - 16y_1^2 = (2y + 4y_1)(2y - 4y_1) = 12$. Nun ſetzt Diophant $2y + 4y_1 = 6$, $2y - 4y_1 = 2$, ſo wird $2y = 4$, $4y_1 = 2$, alſo $10x - 14 = 16$, $x = 3$. Es iſt leicht einzuſehen, warum die Bedingung geſtellt war, daß B und B_1 ſich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten ſollen; damit man nämlich, nachdem man durch die Multiplication die Coefficienten von x einander gleich gemacht hat, nach der Subtraction rechts die Differenz zweier Quadrate erhalte.

Zweiter Fall. Wenn C und C_1 jedes für ſich Quadratzahl iſt. Sei alſo

$$Bx + c^2 = y^2, \quad B_1 x + c_1^2 = y_1^2.$$

Multiplicirt man die erſte Gleichung mit c_1^2, die zweite mit c^2, ſo erhält man

$$Bc_1^2 x + c^2 c_1^2 = c_1^2 y^2, \quad B_1 c^2 x + c^2 c_1^2 = c^2 y_1^2.$$

Die Subtraction ergiebt

$$(Bc_1^2 - B_1 c^2)x = c_1^2 y^2 - c^2 y_1^2 = (c_1 y + c y_1)(c_1 y - c y_1).$$

Hier haben wir die Größe $(Bc_1^2 - B_1c^2)x$ in zwei Factoren zu zerlegen; sie seien Px und Q, so ist $c_1y = \frac{1}{2}(Px + Q)$, $cy_1 = \frac{1}{2}(Px - Q)$. Substituirt man nun zum Beispiel den ersten dieser Werthe in die erstere der obigen Gleichungen, so erhält man

$$Bc_1^2x + c^2c_1^2 = \tfrac{1}{4}P^2x^2 + \tfrac{1}{2}PQx + \tfrac{1}{4}Q^2,$$

oder, wenn man für PQ seinen Werth $Bc_1^2 - B_1c^2$ substituirt und die Gleichung nach x ordnet,

$$\tfrac{1}{4}P^2x^2 - \tfrac{1}{2}(Bc_1^2 + B_1c^2)x + \tfrac{1}{4}Q^2 - c^2c_1^2 = o.$$

Dieses Resultat zeigt, daß die allgemeine Zerlegung des Ausdrucks $Bc_1^2 - B_1c^2$ in irgend zwei Factoren nicht zu dem erwünschten Ziele führt, indem wir eine Gleichung erhalten, in welcher x^2 und x vorkommt, und die also im Allgemeinen irrationale Werthe für x geben wird. Es finden hier zwei Auswege statt, auf denen man sich aus der Schwierigkeit ziehen kann. Diophant wählt den kürzeren, und nimmt die Factoren P und Q so an, daß $\frac{1}{4}Q^2 = c^2c_1^2$, also $Q = 2cc_1$ wird. Dann hebt sich in der letzten Gleichung das absolute Glied auf, man kann den Rest durch x dividiren und erhält eine Gleichung vom ersten Grade, aus welcher sich x ohne Schwierigkeit bestimmen läßt; es ist nämlich $x = \frac{2(Bc_1^2 + B_1c^2)}{P}$ $= \frac{8c^2c_1^2(Bc_1^2 + B_1c^2)}{(Bc_1^2 - B_1c^2)^2}$. Indeß habe ich nur ein Beispiel gefunden, in welchem Diophant diese Methode anwendet, nämlich IV, 45.; hier tritt aber der besondere Umstand ein, daß $c^2 = c_1^2$ ist, wodurch die Auflösung sich etwas abkürzt, wie wir unten sehen werden. Es ist klar, daß diese Methode nur eine Auflösung giebt. Um vielleicht eine andere, weniger beschränkende Bedingung für die Factoren P und Q zu erhalten, lösen wir die gefundene quadratische Gleichung nach x auf; daraus ergiebt sich

$$x = \frac{Bc_1^2 + B_1c^2 \pm 2cc_1\sqrt{BB_1 + P^2}}{P^2}.$$

Wir erhalten demnach außer der obigen sehr partiellen noch die auf unzählige Weisen erfüllbare Bedingung, daß $BB_1 + P^2$ ein Quadrat sein müsse. Ein spezieller Fall ist nun der, wenn $c^2 = c_1^2$ ist. Dann haben wir $Bx + c^2 = y^2$, $B_1x + c^2 = y_1^2$, und wir können ohne vorhergehende Multiplication geradezu die Differenz dieser beiden Gleichungen nehmen, welche giebt $(B - B_1)x = y^2 - y_1^2$. Sei nun auch $y + y_1 = Px$, $y - y_1 = Q$, so ist $y = \frac{1}{2}(Px + Q)$, $y_1 = \frac{1}{2}(Px - Q)$, also $Bx + c^2 = \frac{1}{4}P^2x^2 + \frac{1}{2}PQx + \frac{1}{4}Q^2$, geordnet $P^2x^2 - 2(B + B_1)x = c^2 - \frac{1}{4}Q^2$,

Digitized by Google

also $x = \frac{B+B_1 \pm 2\sqrt{BB_1+c^2P^2}}{P^2}$. Die partielle Diophantiſche Methode giebt alſo hier die Bedingung, daß $Q=2c$, die allgemeinere, daß $BB_1+c^2P^2$ ein Quadrat ſein müſſe. Diophant giebt uns für dieſen Fall IV, 45. das Beiſpiel $8x+4=y^2$, $6y+4=y_1^2$, folglich $y^2-y_1^2=2x$; demnach iſt hier $PQ=2$, und da $Q=2c=4$, ſo iſt $P=\frac{1}{2}$, demnach $\frac{1}{4}x^2-28x=0$, $x=112$. Unſere Formel giebt uns die Bedingung, daß $4P^2+48$, oder durch 4 dividirt P^2+12 ein Quadrat ſein ſolle; daraus finden wir für P die allgemeine Formel $\frac{12m^2-n^2}{2mn}$, oder $\frac{4p^2-3q^2}{2pq}$, oder $\frac{3r^2-s^2}{rs}$. Daraus ergiebt ſich $x = \frac{8mn(12m^2+7mn+n^2)}{(12m^2-n^2)^2}$, $y = \frac{24m^2+16mn+2n^2}{12m^2-n^2}$, $y_1 = \frac{24m^2+12mn+2n^2}{12m^2-n^2}$. Da Diophant ſein direct gefundenes Reſultat nicht brauchen kann, ſo gelangt er auf vielen Umwegen, die wir ſpäterhin wollen kennen lernen, zu einem zweiten, welches ihm $y_1=1\frac{1}{3}$, $x=\frac{4}{2}\frac{5}{6}\frac{5}{2}$ giebt, ein Reſultat, welches wir nach der entwickelten Formel ſehr bald gefunden hätten, wenn wir $m=5$, $n=6$ geſetzt hätten.

Noch eine eigenthümliche Auflöſung eines zu dieſem Falle gehörenden Beiſpiels muß ich hier erwähnen. Diophant betrachtet III, 17. die beiden Gleichungen $10x+9=y^2$, $5x+4=y_1^2$. Da 9 und 4 Quadratzahlen ſind, ſo wäre die Auflöſung nach der vorigen Methode leicht zu bewerkſtelligen geweſen. Aber Diophant ſchlägt einen andern Weg ein: Er ſubtrahirt geradezu beide Gleichungen von einander, das giebt $5x+5=5(x+1)=y^2-y_1^2$; nun ſetzt er $y+y_1=x+1$, $y-y_1=5$, woraus folgt $y=\frac{1}{2}x+3$, $y_1=\frac{1}{2}x-2$; alſo $10x+9=\frac{1}{4}x^2+3x+9$, $x=28$. Wir ſehen, daß die durch den Augenſchein ſich darbietende Zerlegung des Ausdrucks $5x+5$ in die Factoren 5 und $x+1$ zufällig ſo günſtig iſt, daß nach der Subſtitution ſich das abſolute Glied weghebt, mit andern Worten, das $5+1=2\cdot3$ iſt. Betrachten wir das Verfahren allgemein an den Gleichungen $Bx+c^2=y^2$, $B_1x+c_1^2=y_1^2$; die Differenz iſt $(B-B_1)x+(c^2-c_1^2)=y^2-y_1^2$. Hat nun die linke Seite die Factoren p und $mx+n$, und ſetzt man $y+y_1=mx+n$, $y-y_1=p$, ſo wird $y=\frac{1}{2}mx+\frac{1}{2}(n+p)$, $y_1=\frac{1}{2}mx+\frac{1}{2}(n-p)$. Demnach iſt

$$Bx+c^2=\tfrac{1}{4}m^2x^2+\tfrac{1}{2}m(n+p)x+\tfrac{1}{4}(n+p)^2,$$
$$B_1x+c_1^2=\tfrac{1}{2}m^2x^2+\tfrac{1}{2}m(n-p)x+\tfrac{1}{4}(n-p)^2.$$

Digitized by

Damit in diesen beiden Gleichungen die nicht mit x behafteten Glieder ausfallen, ist es nöthig, daß $n+p=2c$, $n-p=2c_1$, also $n=c+c_1$ $p=c-c_1$ sei. Nun bleibt noch m zu bestimmen übrig. Es war aber $(B-B_1)x+c^2-c_1^2=p(mx+n)$ $=(c-c_1)mx+c^2-c_1^2$, demnach $m=\frac{B-B'}{c-c_1}$. Aber da $\frac{1}{4}(n-p)^2=c_1^2$ war, so hätte man auch $p-n=2c_1$, also $p=c+c_1$, $n=c-c_1$ setzen können; woraus sich ergiebt $m=\frac{B-B_1}{c+c_1}$. Demnach giebt diese Methode zwei Auflösungen, von denen Diophant die zweite gewählt hat, weil die erste ihm ein negatives Resultat, nämlich $x=-\frac{4}{5}$ gegeben hätte.

Die allgemeine Methode, aus einer bekannten Auflösung unzählige andere hinzuleiten, welche Diophant auf specielle Fälle der einfachen Gleichung anwendet, scheint ihm bei den doppelten Gleichungen nicht bekannt gewesen zu sein. Meines Wissens hat sie Fermàt zuerst gelehrt, indem er, wenn a dieser bekannte Werth von x ist, x_1+a für x in die Gleichung substituirt, wodurch er namentlich aus einem negativen Werthe von x, den die gewöhnliche Auflösung gab, positive ableitet [11]). Nichts destoweniger aber werden wir in dem folgenden Kapitel sehen, daß Diophant mit Hilfe eigenthümlicher Methoden aus diesen doppelten Gleichungen andere Werthe für die Unbekannte ableitet, wenn der auf directem Wege gefundene ihm nicht genügt. Ich bemerke hier nur noch, daß der Auctor III, 18. die Auflösung der Gleichungen $4x+3=y^2$, $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=y_1^2$ und IV, 35. $8-x=y^2$, $8-3x=y_1^2$ für unmöglich erklärt, weil weder die eine noch die andere der angeführten Bedingungen statt findet. Die Unauflösbarkeit beider Paare von Gleichungen läßt sich leicht nachweisen. Betrachten wir z. B. das zweite Paar, so ist deren Differenz $2x=y^2-y_1^2$. Sei nun $2=PQ$, und $y+y_1=Px$, $y-y_1=Q$, also $y=\frac{1}{2}(Px+Q)$, $y^2=\frac{1}{4}P^2x^2+x+\frac{1}{4}Q^2=8-x$, also $\frac{1}{4}P^2x^2+2x=8-\frac{1}{4}Q^2$, oder $P^2x^2+8x=32-Q^2$, so ist $x=\frac{-4+\sqrt{16+32P^2-P^2Q^2}}{P^2}$ $=\frac{-4+2\sqrt{3+8P^2}}{P^2}$. Aber $3+8P^2$ kann nie Quadrat werden,

11) Observ. in Dioph. VI, 24.

Digitized by Google

weil kein Quadrat durch 8 dividirt 3 zum Reſt laſſen [12]). Bei dem erſten Paare können weder die Coefficienten von x, noch die abſoluten Glieder einander gleichgemacht werden. Es würde alſo nur übrig bleiben, die Differenz $\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}$ in zwei Factoren p und $mx+n$ zu zerlegen und dieſe ſo zu beſtimmen, daß x rational werden könnte; aber auch dieſe Operation führt zu keinem Reſultate, wie Jeder ſich überzeugen kann, der die Rechnung durchführen will.

Für die übrigen Fälle der doppelten Gleichung ſind Diophant's Andeutungen und Regeln nicht ſo vollſtändig und liegen auch nicht ſo offenbar in ſeinem Verfahren ausgeſprochen, daß ſich etwas Beſtimmtes darüber ſagen ließe. Die Beiſpiele, welche ſich für die zuſammengeſetzteren Formen bei ihm finden, ſind meiſtens der Art, daß die Auflöſung keine Schwierigkeit darbietet. Ich will mich daher damit begnügen, die einzelnen Beiſpiele hier anzuführen; es ſind folgende:

$Ax^2+Bx=y^2$, $A_1x^2+B_1x+C=y_1^2$. Für dieſe Form finden wir nur ein Beiſpiel, in welchem A und A^1 einander gleich und jedes Quadratzahl iſt; es iſt **III**, 15, $4x^2+15x=y^2$, $4x^2-x-4=y_1^2$. Die Differenz beider Gleichungen iſt $16x+4=y^2-x^2$. Bei der Zerlegung in die Factoren p und $mx+n$ iſt darauf zu achten, daß $\frac{1}{4}m^2=4$, alſo $m=4$ werde, Diophant ſetzt $y+y_1=4x+1$, $y-y_1=4$, ſo wird $y=2x+\frac{5}{2}$; $y_1=2x-\frac{3}{2}$. Jeden dieſer Werthe in eine der gegebenen Gleichungen ſubſtituirt läßt das quadratiſche Glied verſchwinden, und ergiebt in einer einfachen Gleichung $x=\frac{5}{4}$.

$Ax^2+Bx+C=y^2$, $A_1x^2+B_1x+C_1=y_1^2$. Dieſer Form gehören zwei Beiſpiele an, in denen aber A und A_1 zwei einander gleiche Quadratzahlen ſind und außerdem $C=C_1$ iſt. **III**, 20. finden wir $4x^2+4x-1=y^2$, $4x^2+3x-1=y_1^2$. Die Differenz giebt $y^2-y_1^2=x$. Dieſe muß wieder ſo zerlegt werden, daß y ſowohl als y_1 das Glied $2x$ enthält; demnach $y+y_1=4x$, $y-y_1=\frac{1}{4}$, alſo $y=2x+\frac{1}{8}$, $y_1=2x-\frac{1}{8}$; dann wird $x=\frac{65}{124}$. Dem ganz ähnlich iſt das Beiſpiel **III**, 21., wo $4x^2+3x-1$

12) S. Euler unbeſt. Anal. Kap. 5., wo bewieſen wird, daß dieſe Bedingung, die eigentlich nur Sinn hat, wenn P eine ganze Zahl iſt, auch für Brüche gilt.

Digitized by

$=y^2$, $4x^2-x-1=y_1^2$. Die Differenz ist $y^2-y_1^2=4x$, und muß in die Faktoren $4x$ und 1 zerlegt werden; daraus ergiebt sich $x=\frac{5}{4}$.

$Ax^2+Bx+C=y^2$, $A_1x^2+C_1=y_1^2$. Ein Beispiel mit denselben Zufälligkeiten behaftet, wie die in dem vorigen Falle, ist Alles, was Diophant uns bietet. Wir finden IV, 24. $x^2+x-1=y^2$, $x^2-1=y_1^2$; also $y^2-y_1^2=x$; die Zerlegung muß so geschehen, daß y und y_1 das Glied x enthalten; demnach ist $y+y_1=2x$, $y-y_1=\frac{1}{2}$, $y=x+\frac{1}{4}$, und $x=\frac{17}{8}$.

$Ax^2+C=y^2$; $B_1x+C_1=y_1^2$. In allen drei Beispielen dieser Form ist $A=1$ und $C=C_1$, so daß die Differenz immer ohne weitere Zurüstung die Form $x^2\pm B_1x$ erhält. V, 1. $x^2-12=y^2$, $\frac{13}{2}x-12=y_1^2$, $y^2-y_1^2=x^2-\frac{13}{2}x=x(x-\frac{13}{2}x)$. Diophant setzt $y+y_1=x$, $y-y_1=x-\frac{13}{2}$, also $y=x-\frac{13}{4}$, $y_1=\frac{13}{4}$, also $x=\frac{361}{104}$. Ähnlich V, 2., wo $x^2+20=y^2$, $\frac{19}{2}x+20=y_1^2$, also $y^2-y_1^2=x(x-\frac{19}{2})$, $y+y_1=x$, $y-y_1=x-\frac{19}{2}$, $y=x-\frac{19}{4}$, $y_1=\frac{19}{4}$, $x=\frac{441}{152}$. Und ebenso VI, 6. $x^2+1=y^2$, $14x+1=y_1^2$; $y^2-y_1^2=x(x-14)$, $y=x-7$, $y_1=7$, $x=\frac{24}{7}$.

$Ax^2+Bx+C=y^2$, $B_1x+C_1=y_1^2$. In dem einzigen Beispiel dieser Form sind A, C, C_1 Quadratzahlen; es steht VI, 24., und die mit ziemlich großen Zahlen behafteten Gleichungen sind

$$x^2-6144x+1048576=y^2,\quad x+64=y_1^2.$$

Diophant führt die Auflösung nicht zu Ende, sondern giebt nur den Weg an, den man einzuschlagen hat; es heißt nämlich am Ende ziemlich lakonisch: καὶ ἐξισώσθω σοι [13]) ἀριθμοὶ, καὶ ἡ ὑπεροχὴ, καὶ ἡ μέτρησις, καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα; d. h. man mache die Zahlen einander gleich, nehme die Differenz, zerlege sie in Factoren, und das Übrige ist klar. Thut man das, so erhält man $x^2-6144x+1048576=y^2$, $16384x+1048576=16384y_1^2$, $y^2-16384y_1^2=x^2-22528x$, also $y+128y_1=x$, $y-128y_1=x-22528$, $y=x-11264$, $128y_1=11264$, $y_1=88$, demnach $x=88^2-64=7680$.

---

13) Hier ist die Bachet'sche Lesart wahrscheinlich zu verbessern in ἐξισώσθωσαν οἱ ἀριθμοὶ.

Digitized by Google

$$x^2 = 58982400$$
$$1048576$$
$$60030976$$
$$6144x = 47185920$$
$$y^2 = 12845056 = (3584)^2$$

$Ax^2 + Bx = y^2$, $A_1x^2 + B_1x = y_1^2$. Nur in diesem Falle, wenn beide zu einem Quadrat zu machenden Functionen diese gleichmäße Form haben, wendet Diophant in drei Beispielen ein ganz eigenthümliches Verfahren an, dessen Sinn ich allgemein darstellen will. Diophant substituirt für y x mit einem unbestimmten Coefficienten, (wie er das zu Wege bringt, werden wir im folgenden Kapitel sehen), z. B. mx, so wird aus der ersten Gleichung $x = \frac{B}{m^2 - A}$ gefunden; diesen Werth substituirt er in die zweite Gleichung, so wird $\frac{A_1B^2}{(m^2-A)^2} + \frac{BB_1}{m^2-A^2} = y_1^2$, oder $\frac{BB_1m^2 + B(A_1B - AB_1)}{(m^2-A)^2} = y_1^2$. Es bleibt also nur noch übrig, daß der Zähler dieses Bruchs ein Quadrat werde. Ob das möglich ist oder nicht, hängt von der Beschaffenheit der Größen A, A_1, B, B_1 ab. Es ist demnach dieser Fall der doppelten Gleichung auf die Auflösung der einfachen Gleichung $Mx^2 + N = \square^2$ reducirt. Diophant wendet übrigens in den Beispielen VI, 13. 14. nur als Kriterium an, ob $M + N$ ein Quadrat ist; in dem Beispiel VI, 15. wird N negativ und Quadratzahl, und das Beispiel verworfen, weil M nicht die Summe zweier Quadrate ist, was ich oben schon erwähnt habe.

2. Unbestimmte Gleichungen höherer Grade.

a) Einfache Gleichung.

Die unbestimmten höheren Gleichungen bei Diophant zerfallen in zwei Klassen; die erste Klasse begreift die Aufgabe, eine Function, in welcher die Unbekannte in höhern Potenzen als im Quadrat vorkommt, zu einem Quadrat zu machen, ihr Gegenstand ist also die rationale Auflösung der Gleichung $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots Mx^2 + Nx + P = y^2$; die zweite Klasse begreift die Aufgabe, irgend eine Function der Unbekannten nicht zu einem Quadrat, sondern zu

einer höheren Potenz zu machen, und da die Beispiele bei Diophant alle die Aufgabe stellen, die Unbekannte so zu bestimmen, daß eine gegebene Function ein Kubus werde, so können wir diese zweite Aufgabe ausdrücken durch die Gleichung $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots Mx^2 + Nx + P = y^3$. In den Beispielen der ersten Klasse übersteigt n nicht den Werth 6, in denen der zweiten Klasse nicht den Werth 3. Wir wollen die Diophantischen Beispiele einzeln betrachten.

Erste Klasse. $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots Mx^2 + Nx + P = y^2$.

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + d^2 = y^2$. Wenn eine Function vom dritten Grade diese Form hat, daß nämlich das absolute Glied Quadratzahl ist, so kann man die Auflösung auf zweierlei Art anstellen. Man setzt entweder $y = mx + d$, also $y^2 = m^2x^2 + 2mdx + d^2$, und bestimmt nun m so, daß das dritte Glied, welches die erste Potenz von x enthält, wegfällt; also $m = \frac{C}{2d}$; den Rest kann man dann durch x^2 dividiren und aus dem Resultat x bestimmen; es wird dann nämlich $Ax + B = \frac{C^2}{4d^2}$, also $x = \frac{C^2 - 4d^2B}{4d^2A}$. Der andere Weg ist der, daß man y dreigliedrig annimmt, so daß in der gegebenen Formel sich alle Glieder außer Ax^3 wegheben; setzt man nämlich $y = mx^2 + nx + d$, so wird $y^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (2md + n^2)x^2 + 2ndx + d^2$. Vergleichen wir diese Formel mit der gegebenen, so muß $2nd = C$, also $n = \frac{C}{2d}$, und $2md + n^2 = B$, $m = \frac{B - n^2}{2d} = \frac{nd^2B - C^2}{8d^3}$ werden. Wenn man dann die übrig bleibenden Glieder durch x^3 dividirt, so behält man die einfache Gleichung $A = m^2x + 2mn$,

folglich $x = \frac{A - 2mn}{m^2}$. In dem einzigen Beispiele, welches Diophant uns darbietet, wendet er die erstere dieser Methoden an. Er hat nämlich VI, 20. die Geichung $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = y^2$. Er nimmt, damit $3x$ auf beiden Seiten stehe und wegfalle, $y = \frac{3}{2}x + 1$ an, woraus sich $x = \frac{21}{4}$ ergiebt. Nach der zweiten Methode wäre geworden $n = \frac{3}{2}$, $m = -\frac{21}{8}$, folglich $x = \frac{A - 2mn}{m^2} = \frac{568}{441}$. Da Diophant mit dem gewonnenen Resultate zufrieden ist, so leuchtet nicht ein, ob er verstanden habe, aus diesem ersten Werthe für x

Digitized by Google

andere abzuleiten. Auch giebt er nicht den Grund ausdrücklich an, warum er $y = \frac{3}{2}x + 1$ ſetzt.

$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2$. Dieſe allgemeine Formel vom vierten Grade läßt ſich nur auflöſen, wenn entweder A oder E Quadratzahl iſt; trifft keins von beiden Bedingungen zu, ſo kann man nur aus einer verſuchsweiſe gefundenen Auflöſung andere ableiten. In den beiden Beiſpielen, welche bei Diophant ſich finden, iſt ſowohl A als E Quadratzahl, ſo daß die Gleichung dieſe Geſtalt gewinnt $a^2x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + e^2 = y^2$. In dieſem Falle läßt die Gleichung ſich auf vier verſchiedenen Wegen löſen. 1) Man ſetzt $y = ax^2 + mx + n$ und beſtimmt m und n ſo, daß außer dem biquadratiſchen auch das kubiſche und quadratiſche Glied ausfällt; es iſt nämlich $y^2 = a^2x^4 + 2amx^3 + (2an + m^2)x^2 + 2mnx + n^2$; es muß alſo, damit die genannten Glieder ſich gegenſeitig fortheben, $2am = B$ und $2an + m^2 = C$ ſein; das heißt, es iſt $m = \frac{B}{2a}$, $n = \frac{C - m^2}{2a} = \frac{4a^2C - B^2}{8a^3}$ zu ſetzen. Dann bleibt als Endgleichung übrig $Dx + e^2 = 2mnx + n^2$, alſo $x = \frac{e^2 - n^2}{2mn - D}$. 2) Man ſetzt $y = px^2 + qx + e$, und beſtimmt p und q ſo, daß außer dem abſoluten auch das einfache und quadratiſche Glied wegfällt. Nun iſt $y^2 = p^2x^4 + 2pqx^3 + (2pe + q^2)x^2 + 2qex + e^2$; demnach muß $2qe = D$, alſo $q = \frac{D}{2e}$, und $2pe + q^2 = C$, alſo $p = \frac{C - q^2}{2e} = \frac{4e^2C - D^2}{8e^3}$ ſein. Wenn man dann die reſtirenden Glieder durch x^3 dividirt, ſo bleibt $a^2x + B = p^2x + 2pq$, alſo $x = \frac{2pq - B}{a^2 - p^2}$. 3) Man ſetzt $y = ax^2 + kx \pm e$, und beſtimmt k ſo, daß außer dem erſten und letzten Gliede auch noch das zweite ausfällt, alſo $k = \frac{B}{2a}$; wenn man dann die übrig bleibenden Glieder durch x dividirt, ſo behält man die Gleichung $Cx = D = (k^2 \pm 2ae)x \pm 2ke$, alſo $x = \frac{D \mp 2ke}{k^2 \pm 2ae - C}$ $= \frac{4a(aD \mp eB)}{4a^2(\pm 2ae - C) + B^2}$; das heißt, die beiden Werthe von x, welche der Gleichung genügen, ſind $\frac{4a(aD - eB)}{B^2 + 4a^2(2ae - C)}$ und $\frac{4a(aD + eB)}{B^2 - 4a^2(2ae + C)}$. 4) Man ſetzt $y = \pm ax^2 + kx + e$, und beſtimmt k ſo, daß außer dem erſten und letzten auch das vierte Glied

wegfällt, also $k = \frac{D}{2e}$. Wenn man dann den Reſt durch x^2 divi-dirt, ſo bleibt $Bx + C = \pm 2akx \pm 2ae + k^2$,
alſo $x = \frac{\pm 2ae + k^2 - C}{B \mp 2ak} = \frac{D^2 + 4e^2(\pm 2ae - C)}{4e(eB \mp aD)}$; das heißt, es iſt ſowohl $x = \frac{D^2 + 4e^2(2ae - C)}{4e(eB - aD)}$, auch auch $x = \frac{D^2 - 4e^2(2ae + C)}{4e(eB + aD)}$. Wir haben alſo durch dieſe vier Methoden ſechs von einander ver-ſchiedene Werthe von x erhalten, von denen aber in der Ausfüh-rung in der Regel mehrere negativ ausfallen. Von dieſen vier Me-thoden nun, die ich der Vollſtändigkeit und Überſicht wegen mitge-theilt habe, und von denen die beiden letzten ausſchließlich auf die hier vorausgeſetzte Form anwendbar ſind, die beiden erſten dagegen allgemeiner auch den Fällen angehören, wenn nur eine der beiden Größen A oder E Quadratzahl iſt, braucht Diophant nur die bei-den letzten. Von ſeinen beiden hieher gehörigen Beiſpielen iſt das erſte IV, 29. folgendes: $9x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1 = y^2$. Nach der unter 4) erwähnten Methode ſetzt er $k = \frac{D}{2e} = -6$, und $y = 3x^2 - 6x + 1$; erhebt man dieſen Ausdruck auf das Qua-drat und ſetzt daſſelbe der gegebenen Function von x gleich, ſo bleibt die Gleichung übrig $-4x + 6 = -36x + 42$, alſo wird $x = \frac{9}{8}$. Die zweite Formel der vierten Methode, $y = -3x^2 - 6x + 1$, hätte den negativen Werth $x = -\frac{3}{5}$ gegeben; nach der dritten Me-thode hätte man $y = 3x^2 - \frac{2}{3}x \pm 1$, und daraus $x = -24$ und $x = \frac{15}{13}$ erhalten; die zweite Methode hätte gegeben $y = -15x^2 - 6x + 1$, $x = -\frac{23}{27}$, die erſte dagegen $y = 3x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{25}{27}$, und $x = \frac{13}{981}$; alſo erhält man ſelbſt auf directem Wege außer der Diophantiſchen Auflöſung noch zwei andere poſitive Werthe von x. Das zweite Diophantiſche Beiſpiel, VI, 10., welches die Glei-chung $x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 8x + 1 = y^2$ aufzulöſen befiehlt, be-dient ſich der dritten Methode; dann wird $k = \frac{B}{2a} = 6$, alſo $y = x^2 + 6x \pm 1$. Diophant ſetzt indeß nur das untere Zeichen, und findet daraus $x = \frac{5}{4}$. Das obere Zeichen hätte $x = -\frac{1}{5}$ gegeben. Die vierte Methode hätte $x = 0$ und $x = -\frac{1}{5}$, alſo

Digitized by Google

kein neues brauchbares Resultat geliefert; aus der ersten Methode hätte man erhalten $x = \frac{20}{29}$, aus der zweiten aber wieder $x = 0$. Also ergeben die sechs oben entwickelten Formeln für diese Gleichung nur drei Werthe von x, und darunter zwei positive; der Werth $x = 0$ ist nämlich kein neuer, sondern liegt schon begriffen in der Bedingung, daß E Quadratzahl ist. An beiden angeführten Stellen sagt Diophant nichts über die Methode, und fügt bei diesen Gleichungen ebensowenig, wie oben bei der kubischen den Grund an, der ihn bestimmt, y gerade so und nicht anders anzunehmen, so daß sich auch hier nicht genau angeben läßt, wie weit seine Kenntniß in Behandlung dieser Gleichungen sich erstreckt habe.

Noch unvollkommener und unvollständiger erscheint seine Behandlung derjenigen Fälle, wenn in der allgemeinen biquadratischen Function die ungeraden Potenzen von x fehlen. Bekanntlich ist die Auflösung der scheinbar einfacheren Gleichungen $Ax^4 + Cx^2 + E = y^2$, und $Ax^4 + E = y^2$, selbst wenn A oder E oder beide Quadratzahlen sind, größeren Schwierigkeiten unterworfen, als die Auflösung der eben betrachteten allgemeineren Gleichung, und es ist bei diesen specielleren Formen nur die Methode anwendbar, aus einer versuchsweise gefundenen Auflösung andere Werthe von x zu finden. Die Beispiele, welche Diophant von beiden Formeln giebt, beweisen eben nicht, daß ihm dieser Theil der unbestimmten Analysis sehr geläufig gewesen sei. Wir wollen sehen, was er giebt.

$Ax^4 + Cx^2 + E = y^2$. Diese Formel erscheint zweimal, aber in sehr specieller Gestalt, so daß die Auflösung gleichsam spielend gewonnen wird. Was das Äußere anlangt, so hat sie bei Diophant beidemal die Form $Ax^2 - C + \frac{E}{x^2} = y^2$, so jedoch, daß alle drei Coefficienten A, C, E Quadratzahlen sind; also können wir den Fall so ausdrücken: $a^2x^2 - c^2 + \frac{e^2}{x^2} = y^2$. Hier ergeben sich nun ganz von selbst zwei Auflösungen, wenn man $y = ax$ und wenn man $y = \frac{e}{x}$ setzt; im ersten Falle wird $x = \frac{e}{c}$, im zweiten $x = \frac{c}{a}$. Natürlich findet diese Auflösung nur statt, wenn außerdem, daß alle Coefficienten Quadrate sind, auch noch ein Glied negativ ist. Diophant's Beispiele sind V, 30. $25x^2 - 9 + \frac{25}{4x^2}$

$= y^2$ und V, 31. $\frac{25}{4}x^2 - 25 + \frac{25}{4x^2} = y^2$. Im ersten Beispiele setzt er $y = 5x$, woraus $x = \frac{5}{6}$ sich ergiebt, im zweiten $y = \frac{5}{2x}$, und er findet $x = 2$. Ebenso hätte er aber auch in dem ersten Beispiele $y = \frac{5}{2x}$ und im zweiten $y = \frac{5}{2}x$ setzen können; dies hätte im ersten Beispiele $x = \frac{3}{5}$; im zweiten $x = \frac{1}{2}$ gegeben. Mehr Schwierigkeiten verursacht unserm Auctor die Auflösung der Gleichung, wenn auch noch das quadratische Glied fehlt. Es kommt von diesem Falle nur ein Beispiel vor in der Gestalt

$x^4 + E = y^2$. V, 32., und E ist bei Diophant 97. Wollte man diese Gleichung geradezu auflösen, indem man $y = x^2 - m$ setzte, so würde man auf eine Bedingungsgleichung gerathen, welche der ursprünglichen congruent wäre. Es ist aber bekannt, daß diese Gleichung sich nur auflösen läßt, wenn eine Auflösung schon bekannt ist. Wir wollen sehen, was Diophant bei der Sache thut, um sich aus der Schlinge zu ziehen. Seine ursprüngliche Aufgabe war, drei Biquadratzahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl ist; indem er eine der gesuchten Zahlen x^4 setzte, die andern beiden aber beliebig annahm, nämlich 81 und 16, gerieth er auf die Gleichung $x^4 + 97 = y^2$. Er setzt $y = x^2 - 10$, so wird $97 = 100 - 20x^2$, $20x^2 = 3$. Die Annahme $y = x^2 - 10$ führt also nicht zu einem rationalen Resultate. Anstatt nun zu untersuchen, in welchen Fällen die Gleichung $x^4 + E = y^2$ sich auflösen läßt, verwirft Diophant geradezu seine beliebige Annahme der Zahlen 81 und 16, und untersucht, was für andere Zahlen er für diese und die angenommene Zahl 10 hätte setzen müssen, damit die letzte Gleichung $20x^2 = 3$ solche Coefficienten bekommen, welche ein rationales x gestatten. Um sein Verfahren allgemein darzustellen, nennen wir die beliebig angenommenen Biquadrate a^4 und b^4, so wird die Gleichung $x^4 + a^4 + b^4 = y^2$. Setzen wir nun $y = x^2 - m$, $y^2 = x^4 - 2mx^2 + m^2$, so wird $x^2 = \frac{m^2 - (a^4 + b^4)}{2m}$. Zu diesem nämlichen Resultate kommt Diophant durch Räsonnement. Damit nun dieser Ausdruck aus m, a, b ein Quadrat werde, setzt er $m = a^2 + b^2$, also $m^2 - (a^4 + b^4) = 2a^2b^2$, so wird $x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$; es also nur noch nöthig, daß $a^2 + b^2$ ein Quadrat sei, was sich

Digitized by Google

leicht zu Wege bringen läßt, wenn man $b = \frac{a(p^2-q^2)}{2pq}$ ſetzt. Dann wird $m = \frac{a(p^2+q^2)}{2pq}$. Diophant nimmt nun $a=4$, $b=3$, ſo iſt $m = a^2+b^2 = 25$; um alſo die neue Gleichung $x^4+a^4+b^4$, d. i. $x^4+337=y^2$ aufzulöſen, ſetzt er $y=x^2-25$, $y^2=x^4-50x^2+625$, alſo wird $x^2 = \frac{625-337}{50} = \frac{144}{25}$, $x = \frac{12}{5}$. Anſtatt ſich alſo länger bei der Auflöſung der gegebenen Gleichung aufzuhalten oder zu zeigen, warum dieſelbe nicht möglich iſt, bildet er ſich kunſtvoll eine neue Gleichung ſammt ihrer Auflöſung.

Ein ähnliches Verfahren beobachtet Diophant in dem letzten unter dieſer Rubrik gehörigen Beiſpiel, in welchem er eine Function vom ſechſten Grade zu einem Quadrat machen ſoll, in welcher aber mehre Glieder fehlen. Die Gleichung hat die Form $x^6 - Ax^3 + Bx + c^2 = y^2$. Setzt man hier $y = x^3 + c$, ſo iſt $y^2 = x^6 + 2cx^3 + c^2$, alſo $-Ax^2 + B = 2cx^2$, und $x^2 = \frac{B}{A+2c}$. Die Auflöſung wird alſo auf dieſem Wege ohne Schwierigkeit erlangt werden, wenn $\frac{B}{A+2c}$ ein Quadrat iſt. In der Gleichung aber, welche Diophant IV, 19. zuerſt aus ſeiner Annahme herleitet, und welche lautet $x^6 - 16x^3 + x + 64 = y^2$, trifft die gefundene Bedingung nicht zu. Darum geht er nach ſeiner gewöhnlichen Methode der Zurückrechnung darauf aus, die Annahme ſo zu ändern, daß er eine Gleichung erhält, welche der gefundenen Bedingung entſpricht; ſo gewinnt er endlich die Gleichung $x^6 - 128x^3 + x + 4096 = y^2$; hier ſetzt er $y = x^3 + 64$, woraus ſich $x = \frac{1}{16}$ ergiebt.

Zweite Klaſſe. $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots Mx + N = y^2$.

Wenn wir die einfachen Fälle $Ax^2 = y^2$ und $Ax^4 = y^2$, IV, 23. 26., übergehen, wo weiter nichts zu thun iſt, als daß man $y = mx$ ſetzt, ſo bleiben unter den Diophantiſchen Beiſpielen nur zwei Formen dieſer allgemeinen Gleichung übrig, nämlich $Ax^2 + Bx + C = y^2$ und $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$.

$Ax^2 + Bx + C = y^2$. Wir haben für dieſen Fall nur zwei ſehr einfache Beiſpiele. In dem erſtern, VI, 1., iſt die Formel $Ax^2 + Bx + C$ ein vollſtändiges Quadrat, und zwar $x^2 - 4x + 4$, da ſetzt Diophant, was am natürlichſten iſt, die Wurzel $x-2$ gleich einer beſtimmten Kubikzahl, z. B. 8, ſo wird $x = 10$, $y = 8$.

Digitized by

Das zweite Beiſpiel, VI, 19., iſt ganz eigenthümlicher Art, und oben ſchon erwähnt worden. Es ſoll eine Kubikzahl gefunden werden, die um 2 größer als eine Quadratzahl ſei. Diophant ſetzt die Wurzel der Kubikzahl $x-1$, die Wurzel der Quadratzahl $x+1$, woraus ſich die Geichung ergiebt $x^3-3x^2+3x-1=x^2+2x+3$, oder $x^3+x=4x^2+4$ und $x=4$. Wir haben dieſe Gleichung als beſtimmte kubiſche Gleichung ſchon beſprochen. Hieher aber gehört die Frage: iſt es Zufall, daß dieſe Gleichung ſo einfach ausfällt, oder liegt in der Annahme von $x-1$ und $x-1$ für die Wurzeln der geſuchten Zahlen irgend eine die Einfachheit des Reſultats herbeiführende Kunſt? Diophant ſagt keine Sylbe über das Motiv, welches ihn beſtimmt, die Differenz der Wurzeln als gegeben zu betrachten. Der Umſtand aber, daß die Zahlen 27 und 25, welche das Verlangte leiſten, ſo nahe liegen, und die einzigen ganzen Zahlen ſind, welche der Gleichung $y^3=z^2+2$ genügen [14]), läßt vermuthen, daß Diophant ſeine Annahme $z=x+1$, $y=x-1$ aus dieſem ſchon vorher gekannten Falle hergeleitet habe, um dann durch eine ſcheinbar kunſtvolle Rechnung auf denſelben zurückgeführt zu werden. Zu dieſer Vermuthung ſind wir um ſo mehr berechtigt, als Diophant nicht unterlaſſen hätte, uns vorher auf einen falſchen Weg zu führen, hätte es in ſeinen Kräften geſtanden, uns hinterher den richtigen zu zeigen. Demnach ſind beide Beiſpiele der Gleichung $Ax^2+Bx+C=y^3$ nicht geeignet, bei Diophant in dieſer Theorie uns viel vorausſetzen zu laſſen.

$Ax^3+Bx^2+Cx+D=y^3$. Dieſe Gleichung läßt ſich auf directem Wege nur behandeln, wenn A oder D Kubikzahl iſt. Haben wir nämlich $a^3x^3+Bx^2+Cx+D=y^3$, ſo iſt $y=ax+\frac{B}{3a^2}$ zu ſetzen, ſo daß das kubiſche und das quadratiſche Glied aus der Gleichung verſchwindet; iſt dagegen Ax^3+Bx^2+Cx

14) Dieſe Bemerkung rührt von Fermat her. S. Observ. in Dioph. VI, 19. Fermatii opera math. p. 192. Wallis opera T. II. (Commerc. epist.) p. 770. In Brüchen erleidet die Gleichung allerdings unendlich viele Auflöſungen; ſetzt man z. B. in der Gleichung $y^3-2=z^2$, $y=3\pm y^1$, $z=5\pm\frac{27}{10}y^1$, ſo erhält man zwei zuſammengehörige Werthe für y und z, nämlich $y=\frac{129}{100}$, $z=\frac{383}{1000}$. u. ſ. w.

$+d^3 = y^3$, so setzen wir $y = \frac{C}{3d^2} + d$, so daß die beiden niedrigsten Glieder aus der Endgleichung ausfallen. Beide Methoden lassen sich anwenden, wenn sowohl A als D Kubikzahl ist, wenn also die Gleichung die Form hat $a^3x^3 + Bx^2 + Cx + d^3 = y^3$; auch kann man hier außerdem noch $y = ax + d$ setzen, welche Annahme das erste und letzte Glied ausfallen läßt; demnach sind wir in diesem Falle im Stande, auf directem Wege drei Werthe für x anzugeben, von denen sich dann im Allgemeinen beliebig viele wieder ableiten lassen. In dieser Gestalt erscheint Diophant's Beispiel IV, 27., und wir können mit Gewißheit behaupten, daß er von den drei Formen, die man dem y geben kann, nämlich $ax + \frac{B}{3a^2}$, $\frac{C}{3d^2} + d$, und $ax + d$ nur die letzte als anwendbar gekannt habe. Sein Beispiel ist $8x^3 + x^2 - 8x - 1 = y^3$; da nun setzt er $y = 2x - 1$, $y^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, also bleibt $x - 8 = 6 - 12x$, und $x = \frac{14}{13}$. Da hier die beiden andern Annahmen negative Resultate gegeben hätten, so würde aus deren Vernachlässigung nicht folgen, daß sie unserm Auctor gerade unbekannt gewesen wären. Aber wir folgern das unzweifelhaft aus dem folgenden Beispiele IV, 28. Hier wird der Verfasser auf die Gleichung geführt $8x^3 - x^2 + 8x - 1 = y^3$, welche er mit den Worten καὶ ἔστιν ἀδύνατον abfertigt. Wir wollen diese Unmöglichkeit einmal untersuchen. Setzen wir hier, wie in dem vorigen Beispiel $y = 2x - 1$, also $y^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, so wird $-x + 8 = -12x + 6$, folglich $x = -\frac{2}{11}$, also erhalten wir durch diese Annahme ein nach Diophant's Begriffen unmögliches Resultat, nämlich ein negatives. Wie aber, wenn wir die beiden andern Methoden anwendeten? Sei also zunächst $y = 2x - \frac{1}{12}$, also $y^3 = 8x^3 - x^3 + \frac{1}{24}x - \frac{1}{1728}$; nun heben sich die beiden ersten Glieder weg und es bleibt die Gleichung übrig $8x - 1 = \frac{1}{24}x - \frac{1}{1728}$, woraus sich $x = \frac{1727}{13752}$, demnach $y = 2x - \frac{1}{12} = \frac{577}{3488}$, also beides positiv findet. Sei ferner nach der zweiten Methode $y = \frac{8}{3}x - 1$, so ist $y^3 = \frac{512}{27}x^3 - \frac{64}{3}x^2 + 8x - 1$; hier heben sich die beiden letzten Glieder weg, und es bleibt, wenn man den Rest durch x^2 dividirt,

Digitized by Google

$8x-1=\frac{512}{27}x-\frac{64}{3}$, woraus sich ebenfalls ein positives, also Diophantisch mögliches Resultat, nämlich $x=\frac{549}{296}$, $y=\frac{146}{37}$ ergiebt. Daß also Diophant eine Gleichung, in welcher eine Methode einen unbrauchbaren, zwei andern aber brauchbare Werthe für x geben, als unauflösbar verwirft, beweist wohl augenscheinlich, daß er diese beiden andern Methoden nicht gekannt habe. Noch haben wir den speciellen Fall, wenn C und $D=0$ sind, also

$Ax^3+Bx^2=y^3$. Setzt man hier $y=mx$, so wird $x=\frac{m^3-A}{B}$. Diophant's Beispiele sind IV, 6., wo $x^3+16x^2=y^3$, und IV, 30., wo $x^3-2x^2=y^3$. In dem ersten Beispiel setzt er $y=2x$, im zweiten $y=\frac{1}{2}x$, und findet in beiden Fällen $x=\frac{16}{7}$.

b) Doppelte Gleichung.

Hieher zähle ich einige Beispiele, in welchen Diophant von zwei verschiedenen Functionen von x die eine zu einem Quadrat, die andere zu einem Kubus zu machen befiehlt. Die beiden ersten Beispiele der Art sind sehr einfach. Es soll nämlich VI, 21. $4x+2$ ein Kubus, und die Hälfte davon, nämlich $2x+1$, ein Quadrat werden. Setzt man also $4x+2=y^3$ und $2x+1=z^2$, so ist $y^3=2z^2$. Es kommt also nur darauf an, eine Kubikzahl zu finden, welche das Doppelte einer Quadratzahl ist; solche Zahlen sind z. B. 8 und 4, welche Diophant annimmt; er setzt daher $4x+2=8$ oder $2x+1=4$, so wird $x=\frac{3}{2}$. Setzt man im Allgemeinen $z=my$, so wird $y=2m^2$, $z=2m^3$, $x=\frac{4m^6-1}{2}$. Umgekehrt ist in dem zweiten Beispiel VI, 22. x so zu bestimmen, daß $4x+2$ ein Quadrat und $2x+1$ ein Kubus werde; setzt man also $2x+1=y^3$, $4x+2=z^2$, so ist $z^2=2y^3$; man darf also nur ein Quadrat suchen, welches das Doppelte einer Kubikzahl ist. Diophant nimmt die Zahlen 16 und 8 an, und findet daraus $x=\frac{7}{2}$. Setzt man allgemein $z=my$, so wird $y=\frac{1}{4}m^2$, $z=\frac{1}{4}m^3$, $x=\frac{m^6-8}{16}$. In beiden Beispielen ist also die Auflösung Spielerei.

Etwas

Etwas complicirter ist das Beispiel VI, 23. Hier soll $2x^2 + 2x = y^2$, $x^3 + 2x^2 + x = z^3$ sein. Diophant setzt $y = mx$ (siehe das folgende Kapitel), so wird aus der ersten Gleichung $x = \frac{2}{m^2 - 2}$, demnach $2x^2 = \frac{8}{(m^2-2)^2}$, $x^3 = \frac{8}{(m^2-2)^3}$, folglich, wenn man diese Werthe in die zweite Gleichung substituirt, $z^3 = \frac{8}{(m^2-2)^3} + \frac{8}{(m^2-2)^2} + \frac{2}{m^2-2} = \frac{2m^4}{(m^2-2)^3}$. Es bleibt also weiter nichts zu thun übrig, als $2m^4$ zu einem Kubus zu machen; aber $2m^4$ wird ein Kubus, wenn $2m$ ein Kubus ist; Diophant setzt $2m = 8$, so wird $m = 4$, also $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{4}{7}$, $z = \frac{4}{7}$. Im Allgemeinen hätte man, wenn die Gleichungen $Ax^3 + Bx^2 + Cx = z^3$, $B_1x^2 + C_1x = y^2$ gegeben wären, erhalten $x = \frac{C_1}{m^2 - B_1}$, demnach $z^3 = \frac{AC_1^3}{(m^2-B_1)^3} + \frac{BC_1^2}{(m^2-B_1)^2} + \frac{CC_1}{m^2-B_1}$, und wenn man diesen Ausdruck auf gleiche Benennung brächte, bliebe $CC_1m^4 - C_1(2B_1C - BC_1)m^2 + B_1C_1(B_1C - BC_1) + AC_1^3$ zu einem Kubus zu machen, was denn doch einige Schwierigkeiten haben würde. Die begünstigenden Zufälligkeiten in dem vorliegenden Falle bestehen darin, daß $2B_1C = BC_1$ und $B_1^2C + AC_1^2 = BB_1C_1$ ist.

Ich habe nicht nöthig zu bemerken, daß lange nicht alle Aufgaben, in denen von Kubikzahlen die Rede ist, auch wirklich auf kubische Gleichungen führen. Die meisten Aufgaben der Art führt Diophant auf die Gleichung $Ax^3 = Bx^2$ oder $Ax^3 = Bx$. Man vergleiche IV, 1 — 13., V, 18 — 23. und mehre Aufgaben des sechsten Buchs.

Werfen wir nun noch einen Rückblick auf den Inhalt dieses Kapitels, so dürften sich folgende Resultate ergeben:

1. Ganz vollständig löst Diophant nur die bestimmten Gleichungen des ersten Grades.

2. In den bestimmten Gleichungen des zweiten Grades kennt er nur eine Wurzel, selbst in dem Falle, wenn beide Wurzeln positiv und reell sind.

3. Von höhern Gleichungen kommt ein einziges leichtes Beispiel vor.

4. Die unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades behandelt er nur vollständig, wenn das quadratische oder wenn das absolute Glied fehlt; dagegen ist seine Auflösung der Gleichungen

Digitized by Google

$Ax^2+C=y^2$ und $Ax^2+Bx+C=y^2$ in mancher Beziehung beſchränkt.

5. Für die doppelte Gleichung des zweiten Grades hat er nur dann eine beſtimmte Regel, wenn in beiden Formeln das quadratiſche Glied fehlt; doch iſt auch da ſeine Auflöſung nicht allgemein. Für complicirtere Formeln kommen nur Beiſpiele unter beſonders begünſtigenden Umſtänden vor.

6. Die Auflöſung der höhern unbeſtimmten Gleichungen haftet faſt ganz an den Eigenthümlichkeiten einzelner günſtiger Zahlenbeiſpiele, und ſeine Methoden ſind mangelhaft.

Aus dieſen Sätzen, deren Wahrheit aus den eben ausgeführten Thatſachen ſich vollkommen bethätigt, erſehen wir, daß Diophant's algebraiſche Technik nichts weniger als vollendet iſt. Aber die Auflöſung der Gleichungen iſt auch gerade nicht dasjenige, was wir an ihm bewundern und was ihn noch heute ſo hoch ſtellt, ſondern im Gegentheil die bis zur Virtuoſität ausgebildete Kunſt, ſolche Gleichungen zu vermeiden, die er techniſch nicht löſen kann. Mit Erſtaunen betrachten wir ſeine Operationen, wenn er die ſchwierigſten Aufgaben durch irgend eine überraſchende Wendung auf eine ganz einfache Gleichung zurückführt. Wir bewundern in ihm nicht ſowohl die gigantiſche Kraft, die jedes Hinderniß, das ſich ihr entgegenſtellt, beſiegt, als vielmehr die ausgebildete Klugheit, die meiſtens gerade in dem Augenblicke, wenn man den Beginn des Kampfes erwartet, ſtill, aber ſicher dem Hinderniß aus dem Wege geht, und ſo zwar auf Umwegen, aber doch oft ſchneller als jene ans Ziel gelangt. Die Äußerungen und Erfolge dieſer Klugheit ſoll uns das nächſte Kapitel zeigen.

Digitized by Google

Neuntes Kapitel.

Diophant's Auflösungsmethoden.

Diophant's Methoden in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit vollständig darstellen, hieße nichts andres, als sein Buch abschreiben. Die individuelle Beschaffenheit fast jeder Aufgabe giebt ihm Gelegenheit, ihr ein eigenthümliches Verfahren anzupassen oder auf sie eine Wendung zu begründen, die sich auf kein zweites Beispiel anwenden läßt. Seine Größe beruht nicht, um dem Vergleiche am Ende des vorigen Kapitels einen neuen hinzuzufügen, auf einer im hohen Grade sich angeeigneten Kunstfertigkeit im Gebrauch einer oder einiger Waffen, sondern auf der unnachahmbaren Gewandtheit bei jeder sich darbietenden Gelegenheit vermöge eines augenblicklichen coup d'esprit gerade die Waffe zu ergreifen, mit welcher die momentane feindliche Blöße am leichtesten verwundbar ist. Ist es indeß auch nicht möglich, in einiger Kürze alle seine Methoden darzustellen, so will ich doch versuchen, einige häufiger wiederkehrende oder durch ihre Eleganz sich besonders auszeichnende Operationen hervorzuheben und wo möglich ihr wissenschaftliches Princip durch eine allgemeine Darstellung und durch eine zweckmäßige Zusammenfassung des Gleichartigen unter gemeinschaftliche Gesichtspuncte zu veranschaulichen. Kann es mir gleich auf diesem Wege nicht gelingen, die Fundgrube dieses überreichen Genius zu erschöpfen, so trägt doch vielleicht eine solche Darstellung etwas dazu bei, in Andern den Trieb fernerer Forschungen zu erwecken und die Begierde der eignen Anschauung rege zu machen, auf welche ich nicht angelegentlich genug zurückweisen kann. Unter allen hier zu erörternden Kunstgriffen steht oben an

Digitized by

1. die geschickte Annahme der Unbekannten.

Jedem Mathematiker ist bekannt, wie wichtig dieser Theil der Analysis ist, der sich einzig und allein auf eine gewandte Benutzung der jedesmaligen besondern Umstände gründet und auf keine allgemeine Regeln zurückgeführt werden kann, und wie sehr die leichte und elegante Expedition einer Aufgabe von der zweckmäßigen Annahme der Unbekannten abhängt. In dieser Kunst nun steht Diophant bis auf den heutigen Tag als unerreichtes Muster da. Es ist unmöglich, in einer übersichtlichen Darstellung in dieser Hinsicht den ganzen Reichthum dieses großen Geistes zu erschöpfen. Ich bin zufrieden, wenn es mir gelingt, die wesentlichsten Puncte, auf die es hier ankommt, einigermaßen aufzuklären.

Der erste und einfachste Gebrauch, den Diophant von seinem Talent zu einer geschickten Annahme der Unbekannten macht, besteht in der Vermeidung gemischter quadratischer Gleichungen. Hieher gehört zunächst seine Behandlung der Aufgaben 30. 31. 33. des ersten Buchs, die ich oben schon berührt habe, und in denen respective Summe und Product, Summe und Summe der Quadrate, Differenz und Product zweier Zahlen gegeben sind. Nennen wir die Summe s, die Differenz d, das Product p, die Summe der Quadrate q, so würden alle drei Aufgaben, wenn man die eine der gesuchten Zahlen x, die andere also $s-x$ oder $d+x$ setzen wollte, auf gemischte quadratische Gleichungen führen. Was thut dagegen Diophant? Er setzt in den ersten beiden Aufgaben nicht eine der Zahlen selbst, sondern ihre halbe Differenz, in der dritten Aufgabe dagegen ihre halbe Summe als die in die Rechnung einzuführende Unbekannte und gelangt dadurch auf eine reine quadratische Gleichung. Indem nun nämlich z. B. in der ersten Aufgabe die eine Zahl $\frac{1}{2}s+x$, die andere $\frac{1}{2}s-x$ ist, so wird ihr Product $\frac{1}{4}s^2-x^2=p$, also $x=\sqrt{\frac{1}{4}s^2-p}$; es bleibt also weiter nichts zu thun übrig, als aus dieser gefundenen halben Differenz und der gegebenen Summe die Zahlen selbst zu finden. Ein ähnliches Verfahren finden wir auch in einigen bestimmten Aufgaben des vierten Buchs angewandt, z. B. gleich in den ersten beiden Aufgaben desselben, welche verlangen, zwei Zahlen zu finden deren Summe und Summe der Kuben, oder deren Differenz und Differenz der Kuben gegeben ist. Wollte man in der ersten Aufgabe die eine Zahl x,

Digitized by Google

die andere $s-x$ ſetzen, ſo würde die Summe ihrer Kuben $s^3 - 3s^2x + 3sx^2 = c$; und ähnlich in der zweiten Aufgabe. Dagegen ſetzt Diophant wieder in der erſten Aufgabe die halbe Differenz, in der zweiten die halbe Summe der Zahlen x; die Zahlen ſelbſt alſo $\frac{1}{2}s + x$, $\frac{1}{2}s - x$ in der erſten, $x + \frac{1}{2}d$, $x - \frac{1}{2}d$ in der zweiten; durch dieſe Annahme gelangt er auf reine quadratiſche Gleichungen.

Als ein Paar hübſche Beiſpiele dieſer Art führe ich noch folgende an:

IV, 16. Drei Zahlen zu finden, ſo daß das Product aus der Summe von je zweien in die dritte eine gegebene Zahl ſei.

Nennen wir der Kürze wegen die drei geſuchten Zahlen A, B, C, ſo ſoll nach Diophant's Annahme $(A+B)C = 35$, $(B+C)A = 27$, $(A+C)B = 32$ ſein. Die dritte Zahl, C, nennt Diophant x, ſo iſt $A+B = \frac{35}{x}$. Es kommt alſo darauf an, $\frac{35}{x}$ ſo in zwei Theile zu zerlegen, daß die beiden andern Bedingungen erfüllt werden. Sei einſtweilen $A = \frac{m}{x}$, $B = \frac{n}{x}$, ſo daß $m+n = 35$ iſt. Dann iſt $B+C = x + \frac{n}{x}$, $A+C = x + \frac{m}{x}$; jene Summe mit A, dieſe mit B multiplicirt, giebt die beiden Gleichungen $\frac{mn}{x^2} + m = 27$, $\frac{mn}{x^2} + n = 32$. Subtrahiren wir beide Gleichungen von einander, ſo erhalten wir $n - m = 5$. Es war aber $m+n = 35$. Demnach iſt $m = 15$, $n = 20$, alſo ſind die drei Zahlen nun nach der Reihe $\frac{15}{x}$, $\frac{20}{x}$ und x, welche ſo beſchaffen ſind, daß wenn von den beiden letzten Gleichungen eine erfüllt wird, auch die andere ſich verificirt; es iſt alſo $B+C = x + \frac{20}{x}$, demnach $(B+C)A = 15 + \frac{300}{x^2} = 27$, alſo $x^2 = \frac{300}{12} = 25$, folglich $x = 5$; und die drei Zahlen ſind 3, 4, 5. Die Art, wie Diophant die Größen m und n beſtimmt, da er dieſelben nicht durch allgemeine Symbole ausdrücken kann, wird uns Veranlaſſung geben, dieſe Aufgabe bei einer andern Gelegenheit noch einmal vorzunehmen.

IV, 38. Drei Zahlen zu finden, ſo daß, wenn man zu dem Producte von je zweien die Summe derſelben beiden addirt, gegebene Zahlen herauskommen.

Digitized by Google

Diophant nimmt an $AB+A+B=8$, $BC+B+C=15$, $AC+A+C=24$. Ich will dieſe Auflöſung wörtlich nach Diophant geben, nur daß ich ſtatt der ſich immer wiederholenden Ausdrücke die erſte, die zweite, die dritte Zahl die Zeichen A, B, C ſubſtituire. „Da ich alſo will, daß $AB+A+B=8$ ſei, ſo wird, wenn ich B beliebig annehme, dieſelbe von 8 abziehe und den Reſt durch $B+1$ dividire, der Quotient A ſein; es ſei alſo $B=x-1$; wenn ich dieſen Ausdruck von 8 ſubtrahire und den Reſt durch $B+1$ dividire, ſo wird $A=\frac{9}{x}-1$. Da ich ferner will, daß auch $BC+B+C=15$ ſei, ſo ſubtrahire ich $x-1$ von 15 und dividire den Reſt durch x, ſo wird $C=\frac{16}{x}-1$. Es bleibt alſo nur noch übrig, daß auch $AC+A+C=24$ ſei. Es iſt aber $AC+A+C=\frac{144}{x^2}-1$; dieſes iſt gleich 24; und es wird $x=\frac{12}{5}$ u. ſ. w.“ Diophant's Kunſt beſteht bei dieſer Auflöſung darin, daß er $B=x-1$ ſetzt; hätte er ſtatt deſſen $B=x$ angenommen, ſo wäre $A=\frac{8-x}{x-1}$, $C=\frac{15-x}{x-1}$ geworden, und er hätte die Gleichung $\frac{143-2x-x^2}{(x+1)^2}=24$, oder $25x^2+50x=119$ erhalten.

Es erhellt leicht, daß die Auflöſung nicht immer rational werden wird. Nennen wir nämlich die drei geſuchten Zahlen x, y, z, die drei gegebenen a, b, c, ſo ſtellt die Aufgabe die drei Gleichungen

$$xy+x+y=a$$
$$yz+y+z=b$$
$$xz+x+z=c$$

und die Auflöſung dieſer Gleichungen ergiebt die Reſultate

$$x=-1+\sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}}$$
$$y=-1+\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}$$
$$z=-1+\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}$$

Die Aufgabe würde alſo, um rationale Werthe für x, y, z zu liefern, die Determination erhalten müſſen, daß wenn man jede der drei gegebenen Zahlen um 1 vermehrt, das Product dieſen drei

Digitized by Google

Summen eine Quadratzahl sein müßte; dadurch würden alle drei gefundenen Ausdrücke rational werden. Die Determination, welche Diophant giebt, ist insofern zu enge, als sie verlangt, daß jede der drei Summen $a+1$, $b+1$, $c+1$ an und für sich Quadratzahl sei.

Dieser Aufgabe ganz ähnlich ist IV, 40., welche die Bedingungen stellt, daß

$$xy-(x+y)=a$$
$$yz-(y+z)=b$$
$$xz-(x+z)=c$$

Ferner finden wir Gelegenheit, Diophants Gewandtheit in der Annahme der Unbekannten wahrzunehmen bei seiner Behandlung der bestimmten Aufgaben mit vielen Unbekannten. Da in diesen Aufgaben bei jeder beliebigen Annahme die Funktionen für sämmtliche Unbekannte sich als nothwendig ergeben, so behält die Willkühr und das Genie hier weiter keinen Spielraum, als die Auswahl der ursprünglichen Annahme, und die Kunst besteht allein darin, diese Annahme so einzurichten, daß man die verschiedenen Functionen für die gesuchten Zahlen auf möglichst kurzem Wege und in möglichst einfacher Form erhält. Darin ist nun Diophant Meister, und eine große Anzahl von der Aufgabe des ersten Buchs würde vortrefflich geeignet sein, noch heute als Muster in Schulen vorgelegt zu werden. Hier nur einige wenige Beispiele.

Aufgabe I, 12. Eine gegebene Zahl auf zweierlei Weise in zwei andere Zahlen zu zerlegen, so daß eine Zahl der ersten Zerlegung zu einer der zweiten, und ebenso die andere Zahl der zweiten zu der andern der ersten Zerlegung ein gegebenes Verhältniß habe.

Die Zahl 100 auf zweierlei Weise in zwei Zahlen zu zerlegen, so daß die größere Zahl der ersten Zerlegung doppelt so groß sei, als die kleinere Zahl der zweiten Zerlegung; dagegen die größere Zahl der zweiten Zerlegung dreimal so groß als die kleinere Zahl der ersten Zerlegung.

Setze die kleinere Zahl der zweiten Zerlegung x, so wird die größere Zahl der ersten Zerlegung $2x$, also die kleinere Zahl der ersten Zerlegung $100-2x$, folglich die größere Zahl der zweiten Zerlegung $300-6x$ sein. Es ist also nur noch übrig, daß die beiden Zahlen der zweiten Zerlegung zusammen 100 betragen; die Summe derselben ist aber $300-5x$; dieses ist also gleich 100, also $x=40$.

Digitized by

Demnach ſind die beiden Zahlen der erſten Zerlegung 80 und 20, die der zweiten Zerlegung 60 und 40.

Läßt ſich eine einfachere Auflöſung dieſer Aufgabe, in welche ein ungeübter Rechner von vorne herein vier Unbekannte einführen würde, denken? Ebenſo einfach iſt die Auflöſung der folgenden Aufgabe, welche dieſer ganz analog eine ſolche Zerſtückelung einer gegebenen Zahl in drei Paare verlangt. Beſonders glücklich ſind in dieſer Beziehung die Aufgaben 25 — 28. des erſten Buchs. Es werden in denſelben abwechſelnd drei und vier Unbekannte geſucht; weil aber in jeder dieſer Aufgaben ein Datum fehlt, ſo daß ſie nur reſpective zwei und drei Gleichungen zwiſchen drei und vier Unbekannten geben, ſo bleiben die Aufgaben unbeſtimmt, werden aber von Diophant alle dadurch zu beſtimmten erhoben, daß er eine der Unbekannten ſogleich willkührlich als gegeben annimmt. Wir wollen als Beiſpiel die Aufgabe 26. hier ausführen.

Man ſoll vier Zahlen finden, ſo daß, wenn jede derſelben an die nächſtfolgende einen beſtimmten Theil ihrer ſelbſt abgiebt, die vier Reſultate am Ende einander gleich werden. (Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθέν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι.)

Es ſei beſtimmt, daß die erſte Zahl der zweiten ein Drittel, die zweite der dritten ein Viertel, die dritte der vierten ein Fünftel, die vierte der erſten ein Sechſtel abgebe, und daß ſie nach der gegenſeitigen Mittheilung (μετὰ τὴν ἀντίδοσιν) gleich werden.

Man ſetze die erſte Zahl, weil ſie ein Drittel abgeben ſoll, $3x$; die zweite, weil ſie ein Viertel abgeben ſoll, ſei 4. Nachdem alſo die zweite ein Viertel, nämlich 1, abgegeben, und von der erſten ein Drittel, nämlich x, erhalten hat, wird $x+3$. Es wird alſo auch die erſte Zahl, nachdem ſie ein Drittel, nämlich x, abgegeben, und ein Sechſtel der vierten erhalten hat, $x+3$ werden müſſen; wenn ſie aber ein Drittel abgiebt, ſo bleibt $2x$ übrig. Es wird alſo das Sechſtel der vierten nebſt den $2x$ zuſammen $x+3$ betragen müſſen; folglich iſt $3-x$ ein Sechſtel der vierten Zahl; die vierte Zahl iſt alſo $18-6x$. Nun ſoll ferner auch dieſe vierte, nachdem ſie ein Sechſtel abgegeben und ein Fünftel von der dritten erhalten, $x+3$ werden; wenn ſie aber ein Sechſtel ihres Werthes abgiebt, ſo bleibt $15-5x$ übrig; demnach iſt $15-5x$ ſammt dem Fünftel der dritten Zahl gleich $x+3$; demnach iſt ein Fünftel der

Digitized by Google

dritten Zahl $6x-12$; die dritte Zahl also ist $30x-60$. Nun soll auch diese Zahl, nachdem sie ein Fünftel ihrer selbst, nämlich $6x-12$ abgegeben, und ein Viertel der zweiten, nämlich 1, erhalten hat, $x+3$ werden; sie wird dann aber $24x-47$; das ist gleich $x+3$, also wird $x=\frac{50}{23}$. Demnach ist die erste Zahl $\frac{150}{23}$, die zweite $\frac{92}{23}$, die dritte $\frac{120}{23}$, die vierte $\frac{114}{23}$, oder wenn man den Nenner abwirft, werden die gesuchten Zahlen 150, 92, 120, 114.

Wollte man hier die bestimmte Annahme der zweiten Zahl vermeiden, so dürfte man sie nur gleich $4y$ setzen; bliebe die erste $3x$, so fände sich die vierte $18y-6x$, die dritte $30x-60y$, und endlich $x=\frac{5}{23}y$. Man fände also für die vier Zahlen dieselben Verhältnisse, welche Diophant's Auflösung ergiebt, und seine Auflösung ist allgemein, da er sich am Schlusse erlaubt, die gefundenen Werthe mit irgend einer beliebigen Zahl y, hier 23, zu multipliciren.

Bloß andeuten will ich Diophant's Verfahren in folgenden Beispielen:

I, 16. Drei Zahlen zu finden, so daß die Summe von je zweien einer gegebenen Zahl gleich sei.

Die drei gegebenen Summen seien a, b, c; nun setzt Diophant sehr geschickt die Summe der drei Zahlen x, so erhält man jede der Zahlen einzeln, wenn man von dieser Gesammtsumme jede der drei Partialsummen abzieht; daher werden die einzelnen Zahlen $x-a$, $x-b$, $x-c$; dadurch sind die drei Bedingungen der Aufgabe bereits gelöst und es kommt nur noch darauf an, daß die Summe der für die drei Zahlen gefundenen Ausdrücke wirklich x sei, das heißt, es bleibt die Gleichung $3x-(a+b+c)=x$ zu lösen übrig; daraus ergiebt sich $x=\frac{a+b+c}{2}$.

Ebenso löst Diophant die folgende Aufgabe, in welcher vier Zahlen aus den vier Partialsummen von je dreien gesucht werden, indem er die Gesammtsumme x setzt. Ich bemerke nur noch, daß diese beiden Aufgaben einige Ähnlichkeit mit dem Exanthema von Thymaridas haben.

I, 18. Drei Zahlen zu finden, so daß die Summe von je zweien um eine gegebene Zahl größer ist als die dritte.

Bezeichnen wir der Kürze wegen die drei gesuchten Zahlen mit A, B, C, die drei gegebenen mit $2a$, $2b$, $2c$, so soll $A+B$

$= C+2c$, $B+C = A+2a$, $A+C = B+2b$ sein. Die Summe der drei gesuchten Zahlen, also $A+B+C$ sei $= 2x$. Nun war $A+B = C+2c$, also $A+B+C$, d. i. $2x = 2C+2c$, also $C = x-c$; ebenso findet man $B = x-b$, $A = x-a$. Es ist also wieder weiter nichts zu thun, als die Ausdrücke für A, B, C zusammen $= 2x$ zu setzen.

Dieser ganz analog ist wieder die Aufgabe I, 20. Es sollen von vier Zahlen $A+B+C = D+2d$, $B+C+D = A+2a$, $C+D+A = B+2b$, $D+A+B = C+2c$ sein. Diophant setzt $A+B+C+D = 2x$, dann wird wie vorher $D = x-d$, $C = x-c$, $B = x-b$, $A = x-a$; und es bleibt die Gleichung $4x-(a+b+c+d) = x$ zu lösen übrig, welche $x = \frac{a+b+c+d}{3}$ ergiebt.

I, 23. Drei Zahlen zu finden, so daß die größte um einen gegebenen Theil ($\frac{1}{3}$) der kleinsten größer sei als die mittelste, die mittelste um einen gegebenen Theil ($\frac{1}{3}$) der größten größer als die kleinste, die kleinste aber um eine gegebene Zahl (10) größer sei als ein gegebener Theil ($\frac{1}{3}$) der mittelsten.

Nennen wir die drei Zahlen, die größte A, die mittlere B, die kleinste C, so setzt Diophant $C = x+10$; dann ist $x = \frac{1}{3}B$, also $B = 3x$; nach der Aufgabe $B = C+\frac{1}{3}A$, also $\frac{1}{3}A = B-C = 2x-10$, folglich $A = 6x-30$. Endlich soll $A = B+\frac{1}{3}C$ sein, also ist $\frac{1}{3}C = A-B = (6x-30)-3x = 3x-30$, also $C = 9x-90$. Es war aber $C = x+10$; folglich $x+10 = 9x-90$, $x = \frac{25}{2}$.

Wir haben hier eine bedeutende Anzahl bestimmter Aufgaben kennen gelernt, die sich in Diophant's Werk finden, und können daraus auf die Gründlichkeit eines Schriftstellers schließen, welcher behauptet, Diophant habe mit den bestimmten Aufgaben sich gar nicht beschäftigt. Pincenzo Riccati sagt in der Einleitung zu seinen Institutiones analyticae: De problematibus determinatis, quae resolutis aequationibus dignoscuntur, nihil omnino Diophantus: agit duntaxat de eo problematum semideterminatorum genere, quae respiciunt quadrata aut cubos numerorum, quae problemata ut resolvantur, quantitates radicales de industria sunt vitandae. (Bei Cossali T. 1. p. 80.) Und Riccati versichert die Griechen mit großem Eifer gelesen zu haben!

Digitized by Google

Den weiteſten Spielraum aber gewinnt Diophant's Talent in dieſer Annahme der Unbekannten bei den ſchwierigeren unbeſtimmten Aufgaben. Hier beſteht ſeine größte Kunſt darin, den geſuchten Zahlen, oder wenn deren nur eine vorhanden iſt, dieſer gleich durch die Annahme eine ſolche Form zu geben, daß alle Bedingungen der Aufgabe bis auf eine oder höchſtens zwei ohne weitere Rechnung erledigt werden, und nur noch die Erfüllung dieſer einen oder zwei dem Calcul anheimfällt. In einem Beiſpiel V, 21. werden ſogar durch die bloße Annahme alle Bedingungen gelöſt, und anſtatt der beſtimmten Zahlen, welche er ſuchte, erhält Diophant eine Auflöſung in allgemeinen Ausdrücken. Er will nämlich, um den Bedingungen der Hauptaufgabe zu genügen, drei Zahlen ſuchen, ſo daß jede ein um 1 vermindertes Quadrat, die Summe aller aber ein Biquadrat werde. Nun ſetzt er die erſte Zahl $x^4 - 2x^2$, die zweite $x^2 + 2x$, die dritte $x^2 - 2x$, ſo iſt die Aufgabe mit allen vier Erforderniſſen gelöſt; denn jeder dieſer Ausdrücke wird ein Quadrat, wenn man 1 dazu addirt, und die Summe aller drei iſt $= x^4$, alſo ſicher in jedem Falle ein Biquadrat. In den meiſten Fällen bleibt indeß eine Bedingung für die Rechnung übrig, ſeltener zwei, welche dann auf die im vorigen Kapitel erwähnten doppelten Gleichungen führen. Es mögen hier einige Beiſpiele dieſer Methode folgen, welche immer die Sache klarer machen als weitläufige Reflexionen.

II, 33. Drei Zahlen zu finden, ſo daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die folgende Zahl hinzu addirt.

Wollte man hier nach gewöhnlicher Sitte die drei Zahlen x, y, z nennen und die drei aus der Aufgabe hervorgehenden Gleichungen $x^2 + y = m^2$, $y^2 + z = n^2$, $z^2 + x = p^2$ löſen, ſo würde man ſich in nicht geringe Schwierigkeiten verwickeln. Diophant bedenkt dagegen, daß, wenn eine Zahl das um 1 vermehrte Doppelte einer andern iſt, dann das Quadrat der kleinern zu der größern addirt ein Quadrat giebt. Darum ſetzt er die erſte Zahl x, die zweite $2x + 1$, ſo iſt das Quadrat der erſten nebſt der zweiten gewiß ein Quadrat, nämlich $x^2 + 2x + 1$; und ſomit iſt eine von den drei Bedingungen, welche die Aufgabe ſtellte, gelöſt. Aber auf gleiche Weiſe ſetzt er die dritte um 1 größer als die doppelte zweite, alſo $= 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$, ſo iſt das Quadrat der zweiten, wenn man die dritte hinzu addirt, $= 4x^2 + 8x + 4$, alſo ebenfalls

Digitized by

ein Quadrat. Demnach ist auf diese Weise auch die zweite Bedingung erfüllt; es bleibt also nur noch eine Bedingung übrig, die nämlich, daß auch das Quadrat der dritten Zahl, wenn man die erste dazu addirt, ein Quadrat werde; das heißt, es fällt die Gleichung, $16x^2+25x+9=y^2$ der Algebra anheim. Allgemeiner hätte man die Annahme machen können, wenn man die erste Zahl x, die zweite $2mx+m^2$, die dritte $2n(2mx+m^2)+n^2=4mnx+2m^2n+n^2$ gesetzt hätte. Es wären dann ebenfalls die beiden ersten Bedingungen erfüllt, und nur die dritte übrig geblieben in der Gleichung $16m^2n^2x^2+(16m^3n+8mn^3+1)x+(2m^2+n)^2n^2=y^2$, deren Auflösung keine Schwierigkeit hat.

Ähnlich setzt er in der folgenden Aufgabe, in welcher drei Zahlen A, B, C so gesucht werden, daß A^2-B, B^2-C, C^2-A Quadrate werden, $A=x+1$, $B=2A-1=2x+1$, $C=2B-1=4x+1$, so sind bereits die beiden ersten Bedingungen erfüllt, und die Erledigung der letzten wird Gegenstand der Gleichung $16x^2+7x=y^2$.

III, 5. Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat ist, und von denen die Summe je zweier die dritte um eine Quadratzahl übertrifft. (Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τετραγώνῳ.)

Die Summe der drei Zahlen sei x^2+2x+1; das Quadrat, um welches die Summe der ersten und zweiten die dritte übertrifft, sei 1, so wird die dritte Zahl $\frac{1}{2}x^2+x$ sein. Das Quadrat ferner, um welches die Summe der zweiten und dritten die erste übertrifft, sei x^2, so wird die erste $x+\frac{1}{2}$ sein. Folglich ist die erste und dritte zusammen $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$, also die zweite $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$. Es bleibt also nur noch zu erledigen übrig, daß auch die Summe der ersten und dritten, wenn man die zweite davon abzieht, ein Quadrat werde, das heißt, daß $2x$ ein Quadrat werde.

Um die Operationen zu erläutern und zugleich das Verfahren allgemeiner darzustellen, gebe ich folgende Darstellung. Die Aufgabe verlangt, daß die vier Formeln $A+B+C$, $A+B-C$, $A-B+C$, $-A+B+C$ Quadrate werden sollen. Nun sei

$$A+B+C=x^2+2mx+m^2$$
$$A+B-C=\qquad\qquad m^2$$
$$\text{also}\quad 2C=x^2+2mx$$
$$C=\tfrac{1}{2}x^2+mx$$

Digitized by Google

sei ferner $-A+B+C=x^2$, so erhält man, wenn man diese Gleichung von der ersten subtrahirt und zu der zweiten addirt und die Resultate durch 2 dividirt,

$$A = mx+\tfrac{1}{2}m^2$$
$$B = \tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}m^2$$

Es bleibt also übrig, daß $A-B+C$ ein Quadrat werde; aber $A-B+C$ ist $=2mx$, also $2mx=y^2$.

III, 6. giebt eine andere Auflösung dieser Aufgabe. Diophant sucht zuerst drei Quadratzahlen, deren Summe auch eine Quadratzahl ist. Er findet als solche die Zahlen 4, 9, 36. Nun setzt er jede dieser Quadratzahlen als einen der drei quadratischen Überschüsse, so verwandelt sich die gegebene Aufgabe in eine früher gelöste, drei Zahlen zu finden, so daß die Summe von je zweien um eine gegebene Zahl größer sei als die dritte.

III, 7. Drei Zahlen zu finden, so daß die Summe von allen dreien und auch die Summe von je zweien eine Quadratzahl sei.

Diese Aufgabe löst Diophant ungemein einfach auf folgende Weise. Er setzt nämlich

die Summe aller drei Zahlen $=x^2+2x^1+1$
die erste und zweite $=x^2$
so ist die dritte $=2x+1$
Sei ferner die zweite und dritte $=x^2-2x+1$
so wird die erste $=4x$
die zweite $=x^2-4x$

Es bleibt also nur noch übrig, die Summe der ersten und dritten, das ist die Formel $6x+1$ zu einem Quadrat zu machen. Ähnlich ist die Auflösung von III, 10. 11. Es ist übrigens leicht einzusehen, wie auch das hier befolgte Verfahren etwas verallgemeinern könne, wenn man die Summe der drei Zahlen $x^2+2mx+m^2$ setzt und die übrigen Formeln dieser conform bildet.

III, 16. Drei Zahlen zu finden, so daß das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man das Quadrat der dritten Zahl dazu addirt.

Die erste Zahl sei x, die zweite $4x+4$, die dritte 1, so sind zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt, es ist nämlich das Product der ersten und zweiten plus dem Quadrat der dritten ein Quanämlich $4x^2+4x+1$, und ebenfalls das Product der zweiten und dritten plus dem Quadrat der ersten, nämlich x^2+4x+4. Es

Digitized by Google

bleibt also nur übrig, daß auch das Product der ersten und dritten plus dem Quadrat der zweiten, das heißt, der Ausdruck $16x^2+17x+16$ ein Quadrat werde.

IV, 14. Zwei Zahlen zu finden, so daß sowohl jede Zahl für sich, als auch die Summe und der Unterschied beider ein Quadrat werde, wenn man 1 dazu addirt.

„Wenn ich von irgend einem Quadrate 1 subtrahire, so habe ich die erste Zahl. Ich bilde also ein Quadrat von x mit einem beliebigen Coefficienten und der Zahl 1, z. B. von $3x+1$, so ist das Quadrat $9x^2+6x+1$; ich setze also die erste Zahl $9x^2+6x$. Da ferner die Summe beider Zahlen, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden soll, und ebenso die zweite, wenn man 1 dazu addirt; so suche ich irgend ein Quadrat, welches zu $9x^2+6x$ addirt ein Quadrat giebt. Ich nehme zwei Zahlen, deren Product $9x^2+6x$ ist, z. B. $9x+6$ und x; ihr Unterschied ist $8x+6$ und die Hälfte davon $4x+3$, und das Quadrat dieses letzten Ausdrucks wird $16x^2+24x+9$; davon nehme ich 1 weg und setze die zweite Zahl $16x^2+24x+8$; so wird jede Zahl für sich und auch die Summe beider ein Quadrat, wenn man 1 addirt. Es ist also nur noch übrig, daß auch der Unterschied beider, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werde; es soll also $7x^2+18x+9$ einem Quadrate gleich sein, u. s. w.“

Diophant setzt also, um sein Verfahren allgemein zu betrachten, $A=(mx+1)^2-1=m^2x^2+2mx$. Da nun auch B sowohl als $A+B$ ein um 1 vermindertes Quadrat sein soll, so setzen wir vorläufig $B=p^2-1$, so wird $A+B+1=m^2x^2+2mx+p^2$; es fragt sich also, wie muß p^2 beschaffen sein, damit dieser letzte Ausdruck ein Quadrat werde. Nach Euklid's Elem. II, 5. ist aber $ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, das heißt, wenn man zu einem beliebigen Produkt zweier Zahlen das Quadrat der halben Differenz der Zahlen addirt, so ist diese Summe allemal wieder ein Quadrat. Darum zerlegt Diophant den Ausdruck für A in die Factoren x und m^2x+2m, und erhält also $p=\frac{m^2-1}{2}x+m$,

$p^2=\frac{m^4-2m^2+1}{4}x^2+m(m^2-1)x+m^2$, demnach $m^2x^2+2mx+p^2=\frac{(m^2+1)^2}{4}x^2+m(m^2+1)x+m^2$, und somit sind drei Bedingungen der Aufgabe gelöst, und der eigentlichen Berechnung ge-

Digitized by Google

hört nun noch die Erfüllung der vierten an, daß nämlich auch $B-A+1$ ein Quadrat werde; diese Bedingung giebt aber die in jedem Falle leicht zu lösende Gleichung $\frac{m^4-6m^2+1}{4}x^2+m(m^2-3)x+m^2=y^2$.

Mehre sehr elegante Beispiele der Art findet, wer sich die Mühe des Nachlesens geben will, in den Aufgaben II, 14. 24. IV, 15. 17. 21. 22. 23. und unzähligen andern. In dem folgenden Kapitel werden wir sehen, wie besonders die Porismen dazu gedient haben, Diophant eine mehrere Bedingungen der Aufgabe erledigende Annahme zu machen. Hier will ich nur noch einige Beispiele ausführen, in welchen der Gang, den Diophant nimmt, insofern überraschend erscheint, als für die Gleichung gerade diejenige Bedingung aufgespart wird, die man da am wenigsten erwartet hätte.

II, 25. Eine gegebene Zahl in zwei Stücke zu zerlegen und dazu ein Quadrat zu suchen, so daß die Summe dieses Quadrats und jedes Stückes wieder ein Quadrat werde.

Die gegebene Zahl sei 20. Nimm zwei Zahlen, deren Quadrate zusammengenommen kleiner sind als 20, z. B. 2 und 3; legt man zu jeder von beiden x hinzu, so würden die Quadrate dieser Ausdrücke x^2+4x+4 und x^2+6x+9. Wenn ich nun von diesen beiden Ausdrücken x^2 wegnehme, so behalte ich die beiden gesuchten Stücke übrig, welche so beschaffen sind, daß, wenn ich x^2, also ein Quadrat, hinzu addire, Quadrate zur Summe geben. Wenn ich also x^2 von beiden wegnehme, so bleiben die Ausdrücke $4x+4$ und $6x+9$ übrig; die Summe beider muß also 20 sein.

Ähnlich ist die Auflösung von II, 11. Zwei Quadrate zu finden, deren Differenz eine gegebene Zahl sei. Diophant nimmt die Ausdrücke von $x+a$ und x, deren Differenz der gegebenen Zahl 6 gleich soll; diese Differenz ist aber $2ax+a^2$; folglich $2ax+a^2=6$, $x=\frac{6-a^2}{2a}$.

II, 31. Zwei Zahlen zu finden, so daß das Product aus beiden, sowohl wenn man die Summe beider dazu addirt, als wenn man dieselben subtrahirt, ein Quadrat gebe.

Diophant bedenkt, daß die Summe zweier Quadrate, sowohl

wenn man das doppelte Product der Wurzeln addirt, als wenn man es subtrahirt, ein Quadrat wird; daher nimmt er zwei beliebige Zahlen, ax, bx, und ſetzt das Product der beiden geſuchten Zahlen $= (a^2+b^2)x^2$, und zwar die eine Zahl $(a^2+b^2)x$, die andere x. Nun wird $(a^2+b^2)x^2$ ein Quadrat, man mag $2abx^2$ dazu addiren oder davon ſubtrahiren; daher ſetzt er die Summe beider Zahlen $= 2abx^2$. Da er aber vorher die Zahlen ſelbſt $(a^2+b^2)x$ und x geſetzt hatte, ſo iſt ihre Summe $(a^2+b^2+1)x$; folglich muß $(a^2+b^2+1)x = 2abx^2$ ſein.

Indem ich in dieſer Beziehung noch auf die Aufgaben II, 26. 35. 36. II, 1. 2. 3. 4. 23. 24. verweiſe, will ich die Auflöſung von VI, 25. 26., den beiden letzten Diophantiſchen Aufgaben, hier noch kurz andeuten.

VI, 25. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß das Quadrat der Hypotenuſe ein Quadrat ſammt ſeiner Wurzel, wenn man es aber durch eine Kathete dividirt, die Summe eines Kubus und ſeiner Wurzel werde.

Man ſetze die eine Kathete x, die andere x^2, ſo ſind beide Bedingungen der Aufgabe erfüllt; es iſt nämlich das Quadrat der Hypotenuſe $= x^4+x^2$, alſo die Summe eines Quadrats und ſeiner Wurzel, und derſelbe Ausdruck dividirt durch die Kathete x giebt x^3+x, alſo die Summe eines Kubus und ſeiner Wurzel. Es iſt alſo, damit das Dreieck durch rationale Zahlen ausgedrückt werde, nur noch nöthig, daß x^4+x^2 eine Quadratzahl ſei. Demnach behält an dieſer ſcheinbar ſchwierigen Aufgabe die Algebra nichts weiter zu thun, als den Ausdruck x^2+1 zu einem Quadrat zu machen. Hätte man nach der gewöhnlichen Formel die Seiten des Dreiecks m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$ geſetzt, ſo hätte die Aufgabe auf die beiden, wahrlich nicht leicht zu löſenden Gleichungen geführt $m^4+2m^2n^2+n^4 = x^2+x$, und $\frac{m^4+2m^2n^2+n^4}{m^2-n^2}$ oder $\frac{m^4+2m^2n^2+n^4}{2mn} = y^3+y$.

VI, 26. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß die eine Kathete durch eine Kubikzahl, die andere durch die Differenz einer Kubikzahl und ihrer Wurzel, die Hypotenuſe durch die Summe einer Kubikzahl und ihrer Wurzel ausgedrückt ſei.

Die

Digitized by Google

Die Hypotenuſe ſei x^3+x, die zweite Kathete x^3-x, ſo wird die erſte Kathete $2x^2$ (nämlich $=\sqrt{(x^3+x)^2-(x^3-x)^2}$). Es bleibt alſo nur noch übrig, daß $2x^2$ eine Kubikzahl werde.

In allen dieſen Beiſpielen werden von n Bedingungen, deren Erfüllung die Aufgabe fordert, $(n-1)$ gleich durch die Annahme erledigt. Beiſpiele von dem Falle, in welchem nun $(n-2)$ Bedingungen auf dieſe Weiſe abſolvirt werden, führe ich nicht an, weil ſie kein eigenthümliches Intereſſe haben. Wer Beiſpiele der Art haben will, der vergleiche die in dem vorigen Kapitel angeführten Beiſpiele der doppelten Gleichung, welche allemal aus ſolchen Aufgaben hervorgegangen ſind. Ich erwähne hier nur noch, daß Diophant, wenn es ihm möglich iſt, dieſen zweiten Fall vermeidet, und lieber die Annahme ſo ſtellt, daß er nur eine Gleichung übrig behält. So fährt er, nachdem er die Aufgabe II, 12. auf die doppelte Gleichung $x+3=y^2$, $x+2=y_1^2$ geführt und dieſe aufgelöſt hat, alſo fort: ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἰσότητα ἐμπέσῃ δεικτέον οὕτως. Anſtatt die Unbekannte, welche zu 2 und zu 3 addirt in beiden Fällen Quadrate zur Summe gebe, wie vorher x zu ſetzen, ſetzt er ſie x^2-2, wodurch die eine Bedingung bereits erfüllt wird; für die andere bleibt dann nur die Gleichung $x^2+1=y^2$ übrig. Ähnlich II, 14. u. a. m.

2. Methode der Zurückrechnung und Nebenaufgabe.

Nicht immer iſt die Annahme der Unbekannten in ſolcher Form, daß dadurch $(n-1)$ oder wenigſtens $(n-2)$ Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden, ſo einfach und leicht zu bewerkſtelligen, wie in den angeführten Beiſpielen. In ſolchen verwickelteren Fällen bedient ſich Diophant einer ganz eigenthümlichen Methode, welche ihm den Gebrauch allgemeiner Coefficienten erſetzt, und deren Weſen in folgenden Punkten beſteht. Er geht von einer ganz willkührlichen Annahme aus, und läßt ſich durch dieſe entweder auf Schwierigkeiten, deren Löſung nicht in ſeiner Macht ſteht, oder ad absurdum, häufig auf quadratiſche Gleichungen mit irrationalen Wurzeln führen. Dann bleibt er ſtehen und unterſucht, wie die einzelnen Zahlen des ſo gewonnenen ungünſtigen Reſultats entſtanden ſind und wie er die Annahme hätte machen müſſen, damit dieſe Schwierigkeiten wären vermieden worden, wodurch er dann häufig angewieſen wird, erſt eine eigene Aufgabe zu löſen, welche die in der erſten Aufgabe zu ma-

Digitized by Google

chende Annahme bestimmt. Diese Operation nun, welche ganz dieselbe ist, die wir anwenden, indem wir aus einem in allgemeinen Ausdrücken gewonnenen Resultate die Bedingungen untersuchen, welche zwischen den einzelnen Größen stattfinden müssen, nenne ich die Methode der Zurückrechnung; man könnte sie auch mit eben dem Rechte die Methode des falschen Ansatzes nennen, wenn man sich nur hütet, sie mit der in späterer Zeit so berühmt gewordenen regula falsi oder positio falsa, mit der sie gar nichts gemein hat, zu verwechseln. Es macht indeß keinen wesentlichen Unterschied, daß Diophant nicht immer diesen ad absurdum führenden Weg einschlägt, sondern zuweilen, zumal bei leichteren Bedingungen, gleich aus der Betrachtung der Hauptaufgabe ohne Rechnung auf die Nebenaufgabe, von welcher die Bestimmung der Form der Unbekannten abhängt, übergeht. Ich will, um zuerst das Wesen der Methode zu erläutern, mit einem ganz einfachen Beispiele anfangen.

IV, 22. Drei (stetig) proportionirte Zahlen zu finden, so daß der Unterschied von je zweien eine Quadratzahl sei.

Diophant sucht zuerst die drei letzten Bedingungen zu erledigen, um dann die erste, daß die Zahlen stetig proportionirt seien, der Gleichung zu überlassen. Zwei Bedingungen werden offenbar sogleich erfüllt, wenn man die erste Zahl x, die zweite $x+a^2$, die dritte $x+a^2+b^2$ setzt; dann ist die Differenz der ersten und zweiten a^2, der zweiten und dritten b^2. Damit aber auch die Differenz der ersten und dritten eine Quadratzahl sei, ist nöthig, daß a^2+b^2 ein Quadrat sei. Demnach ist die Annahme von a^2 und b^2 nicht willkührlich, sondern man muß diese Zahlen so wählen, daß ihre Summe a^2+b^2 ebenfalls Quadratzahl sei. Vermöge seiner Methode gelangt Diophant zu diesem Resultate auf folgende Weise. Die erste Zahl sei x, die zweite $x+4$, die dritte $x+13$, so sind zwei Bedingungen erfüllt; wenn nun auch der Unterschied der dritten und ersten ein Quadrat wäre, so hätte man den einen Theil der Aufgabe gleich durch die Annahme gelöst. Aber dieser Unterschied ist 13; die Zahl 13 aber ist die Summe zweier Quadratzahlen 4 und 9. Es kommt also zunächst darauf an, zwei Quadrate zu suchen, deren Summe wieder ein Quadrat ist; das ist aber leicht mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks. Zwei Quadratzahlen sind z. B. 9 und 16. Daher setze ich nun die erste Zahl x, die zweite $x+9$, die dritte $x+25$; so sind alle drei Unterschiede Quadrate, nämlich 9, 16, 25.

Digitized by Google

Es bleibt also nur noch zu erfüllen übrig, daß auch die Zahlen in stetiger Proportion stehen, das heißt, daß das Product der ersten und dritten gleich sei dem Quadrate der zweiten.

Dieser Methode nun bedient sich Diophant ungemein oft, und ich möchte sie das Charakteristische seiner ganzen Analysis nennen. Sie ist es, aus der wahrscheinlich seine Determinationen hervorgegangen sind, sie ist es, welche uns über seine Auflösung der quadratischen Gleichungen Licht giebt und aus der wir manchen interessanten Wink über Diophant's Kenntniß der Zahlentheorie erhalten. In den meisten Fällen ergiebt sich die Bedingung der ursprünglichen Annahme nicht so leicht, wie in dem eben dargestellten Beispiele, sondern die Erfüllung derselben erfordert das Einschieben einer eigenen Nebenaufgabe, welche häufig interessanter ist, als die ursprüngliche Aufgabe selbst. Aber eben weil die Methode so sehr oft, in den letzten Büchern fast bei jeder Aufgabe, angewandt wird, so muß ich mich hier bei der Anführung von Beispielen, welche das Wesen derselben erläutern, sehr beschränken, und ich will daher nur einige ganz besonders charakteristische Fälle hervorheben. Zuerst führe ich hier ein einfaches Beispiel an, auf welches ich bei den vorigen Methoden schon hingedeutet habe.

IV, 16. Drei Zahlen zu finden, so daß die Summe von je zweien mit der dritten multiplicirt, eine gegebene Zahl zum Product gebe.

Indem Diophant $(A+B)C=35$, $(B+C)A=27$, $(A+C)B=32$, und $C=x$ setzt, gelangt er, wie wir oben gesehen haben, auf die Gleichung $A+B=\frac{35}{x}$. Nun setzt er willkührlich $A=\frac{10}{x}$, $B=\frac{25}{x}$, so wird $(B+C)A=\left(\frac{25}{x}+x\right)\frac{10}{x}=10+\frac{250}{x^2}$; und $(A+C)B=\left(x+\frac{10}{x}\right)\frac{25}{x}=25+\frac{250}{x^2}$. Diese beiden Producte sind aber gegeben, und es soll $10+\frac{250}{x^2}=27$, $25+\frac{250}{x^2}=32$ sein. Offenbar können diese beiden Gleichungen nicht neben einander bestehen; denn nimmt man ihre Differenz, so gelangt man zu dem Unsinn $15=5$. Diophant sagt nun so: Nun ist der Unterschied von 32 und 27 gleich 5; daher sollte der Unterschied von $25+\frac{250}{x^2}$ und $10+\frac{250}{x^2}$ ebenfalls 5 sein. Aber die 25 rühren her von der Annahme für die zweite Zahl, die 10 von der Annahme für die

erſte; wir müſſen alſo dieſe beiden Zahlen ſo annehmen, daß ihr Unterſchied 5 wird. Dieſe beiden Zahlen ſind aber nicht willkührlich, ſondern ihre Summe iſt 35. Daher muß man 35 in zwei Theile theilen, ſo daß ihr Unterſchied 5 iſt. Die eine iſt alſo 15, die andere 20. Jetzt ſetze ich die erſte Zahl $\left(\text{ſtatt } \frac{10}{x}\right) = \frac{15}{x}$, die zweite $\left(\text{ſtatt } \frac{25}{x}\right) = \frac{20}{x}$ u. ſ. w.

IV, 9. Man ſoll zu einem Kubus und zu ſeiner Wurzel dieſelbe Zahl addiren, und beide ſollen dieſelbe Eigenſchaft behalten. (Κύβῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά.)

Die Zahl, welche man addiren ſoll, ſei x, die Wurzel des Kubus aber x mit irgend einem Coefficienten, z. B. $2x$, ſo iſt der Kubus $8x^3$; demnach erhalte ich nach der Addition die Ausdrücke $3x$ und $8x^3+x$ und der erſtere ſoll die Kubikwurzel der letztern ſein; alſo iſt $8x^3+x = 27x^3$ und $19x^3 = x$ oder $19x^2 = 1$. Aber 1 iſt ein Quadrat; wenn nun auch $19x^2$ ein Quadrat wäre, ſo ließe ſich die Gleichung löſen. Aber die 19 ſind aus der Differenz der beiden Kubikzahlen $27x^3$ und $8x^3$ entſtanden; und $27x^3$ iſt der Kubus von $3x$, $8x^3$ der Kubus von $2x$; daher iſt 19 entſtanden aus der Differenz der Kubi von $3x$ und $2x$. Aber die $2x$ ſind beliebig angenommen, der Coefficient von $3x$ aber immer um 1 größer als der angenommene Coefficient von x. Es kommt alſo darauf an (ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν), zwei um 1 verſchiedene Zahlen zu ſuchen, ſo daß die Differenz ihrer Kubi ein Quadrat iſt. Die eine dieſer Zahlen ſei x, die andere $x+1$, ſo wird die Differenz ihrer Kubi $3x^2+3x+1$ ſein; dieſes ſei gleich dem Quadrate von der Wurzel $1-2x$, ſo wird $x=7$. Demnach wird die eine Zahl 7, die andere 8 ſein. Ich komme jetzt zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und nenne die Zahl, welche man addiren ſoll, x, die Wurzel des Kubus aber $7x$, ſo wird der Kubus $343x^3$; addirt man zu beiden x, ſo wird der erſte Ausdruck $8x$, der zweite $343x^3+x$; dieſes ſoll der Kubus von $8x$ ſein. Demnach iſt $512x^3 = 343x^3+x$, und es wird $x = \frac{1}{13}$; u. ſ. w.

IV, 25. Eine gegebene Zahl in zwei andere zu zerlegen, ſo daß das Product beider der Unterſchied zwiſchen einem Kubus und ſeiner Wurzel werde.

Die gegebene Zahl ſei 6; die erſte der geſuchten Zahlen ſei x,

Digitized by Google

so ist die andere $6-x$; ihr Product $6x-x^2$ soll also die Differenz zwischen einem Kubus und seiner Wurzel sein. Ich bilde den Kubus von einer Wurzel, welche x mit irgend einem Coefficienten weniger 1 ist, z. B. von $2x-1$; der Kubus weniger der Wurzel macht $8x^3-12x^2+4x$, und soll $=6x-x^2$ sein. Wenn nun die Coefficienten von x auf beiden Seiten gleich wären, so würde x nur in der zweiten und dritten Potenz übrig bleiben und x würde rational werden (καὶ εἰ ἦσαν οἱ ςςοὶ ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸς ἐγίνετο ἰσῶσαι κύβους ἴσους δυνάμεσι, καὶ ὁ ςὸ ἦν ῥητός). Aber die $4x$ sind die Differenz von $2x$ und dreimal $2x$; wenn man aber $2x$ von dreimal $2x$ abzieht, so bleiben zweimal $2x$; die Zahl 6 aber ist nach der Voraussetzung gegeben. Es kommt also darauf an, eine Zahl zu suchen statt der obigen $2x$, so daß ihr doppelter Coefficient 6 ist; eine solche Zahl ist $3x$. Nun suche ich wieder $6x-x^2$ gleich einem Kubus weniger seiner Wurzel zu machen, und setze die Wurzel des Kubus $3x-1$, so wird der Kubus weniger der Wurzel $27x^3-27x^2+6x$; und das ist gleich $6x-x^2$, und x wird $=\frac{26}{27}$. Demnach sind die gesuchten Zahlen $\frac{26}{27}$ und $\frac{136}{27}$.

Um Diophant's Verfahren zu veranschaulichen, wiederhole ich es hier kurz in allgemeinen Ausdrücken. Die gegebene Zahl sei a, die gesuchten seien x und $a-x$, so ist ihr Product $ax-x^2$. Setzt man nun die Seite des Kubus $mx-1$ (1, damit dieses Glied, welches dem Kubus und der Wurzel gemeinschaftlich bleibt, bei der Subtraction sich weghebe), so wird der Kubus $m^3x^3-3m^2x^2+3mx-1$, also die Differenz zwischen Kubus und Wurzel $m^3x^3-3m^2x^2+2mx=ax-x^2$. Damit hier die ersten Potenzen sich wegheben, muß er so genommen werden, daß $2m=a$ wird; und gerade das ist auch das Resultat von Diophant's Untersuchung.

IV, 26. Eine gegebene Zahl in drei andere zu zerlegen, so daß das Product aus allen dreien eine Kubikzahl werde, deren Wurzel gleich ist der Summe der Unterschiede zwischen je zweien.

Die gegebene Zahl sei 4, und da das Product aus allen ein Kubus sein soll, so setze ich dasselbe $=8x^3$; die Kubikwurzel ist $2x$. Wenn man aber drei ungleiche Zahlen hat, so ist die Summe der

Digitized by Google

Unterſchiede von je zweien gleich dem doppelten Unterſchiede der größten und kleinſten. Demnach iſt $2x$ der doppelte, alſo x der einfache Unterſchied der größten und kleinſten der drei Zahlen. Die kleinſte ſei z. B. $2x$, ſo iſt die größte $3x$. Und da das Product aus allen dreien $8x^3$, das Product aus der größten und kleinſten aber $6x^2$ iſt, ſo iſt die mittlere $\frac{4}{3}x$. Wenn nun dieſe mittlere größer als die kleinſte, und kleiner als die größte wäre, ſo wäre die Aufgabe gelöſt. Aber die mittlere entſtand dadurch, daß wir 8 dividirten durch das Product der größten und kleinſten; dieſe erſte und zweite ſind aber nicht beliebig, ſondern um 1 verſchieden. Darum bin ich darauf hingeführt, zwei um 1 verſchiedene Zahlen zu ſuchen, ſo daß der Quotient, der entſteht, wenn ich 8 durch das Product beider dividire, kleiner als die größere und größer als die kleinere von beiden Zahlen werde. Die kleinere Zahl ſei x, ſo iſt die größere $x+1$, alſo die mittlere $\frac{8}{x^2+x}$. Dieſer Ausdruck ſoll alſo größer als x und kleiner als $x+1$ ſein. Da der Unterſchied beider 1 iſt, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen $\frac{8}{x^2+x}$ und x kleiner als 1; daher iſt $\frac{8}{x^2+x}+1$ größer als $x+1$, oder $\frac{x^2+x+8}{x^2+x} > x+1$ und $x^2+x+8 > x^3+2x^2+x$ oder $8 > x^3+x^2$. Ich bilde einen Kubus, welcher die Glieder x^3+x^2 enthält; ſeine Wurzel iſt $x+\frac{1}{3}$. Da nun 8 größer iſt als x^3+x^2 und auch $(x+\frac{1}{3})^3$ größer größer iſt als x^3+x^2, ſo ſetze ich $8=(x+\frac{1}{3})^3$, ſo ſind auch die Kubikwurzeln einander gleich, alſo $x+\frac{1}{3}=2$, und $x=\frac{5}{3}$. Gehe ich nun auf die Annahme zurück, ſo wird die kleinſte Zahl $\frac{5}{3}$, die größte $\frac{8}{3}$, die mittlere alſo (8 dividirt durch $\frac{40}{9}$, das iſt) $\frac{9}{5}$; oder wenn ich alle mit 15 multiplicire, wird die erſte 40, die zweite 27, die dritte 25. Der gemeinſchaftliche Diviſor 15 iſt nämlich weggeworfen, und es ſind drei Zahlen gefunden worden, ſo daß das Product derſelben eine Kubikzahl iſt, welches die Summe ihrer Unterſchiede zur Wurzel hat. Jetzt ſetze ich die erſte Zahl $40x$, die zweite $27x$, die dritte $25x$, ſo iſt auch das Product dieſer ein Kubus, deſſen Wurzel die Summe der drei Unterſchiede iſt. Die drei Zahlen ſollen aber zuſammen der gegebenen Zahl 4 gleich ſein. Daher bleibt die Gleichung $92x=4$ übrig, und x iſt $=\frac{1}{23}$.

Nennen wir die drei Zahlen A, B, C, ſo daß $A>B$, $B>C$, ſo verlangt die Aufgabe, daß 1) $A+B+C=a$, 2) ABC gleich einem Kubus, z. B. $8x^3$, und 3) $(A-B)+(B-C)+(A-C)$

das ist $2(A-C)=\sqrt[3]{8x^3}=2x$, also $A-C=x$ sei. Nun setzt Diophant $C=mx$, also $A=(m+1)x$, so wird $B=\frac{8x}{m(m+1)}$; und es kommt also zunächst darauf an, daß $\frac{8}{m(m+1)}$ größer als m und kleiner als $m+1$ ist. In der sehr geistreichen Erfüllung dieser Bedingung ist Diophant's Vortrag nicht ganz vollständig. Zuerst soll $\frac{8}{m^2+m}>m$, also $8>m^3+m^2$ sein. Nun bildet Diophant einen Kubus, der die beiden Glieder m^3+m^2 enthält, dessen Wurzel also $m+\frac{1}{3}$ ist, so ist dieser Kubus $m^3+m^2+\frac{1}{3}m+\frac{1}{27}$, also jedenfalls größer als m^3+m^2; da nun auch $8>m^3+m^2$ sein sollte, so setzt er $8=(m+\frac{1}{3})^3$, also $2=m+\frac{1}{3}$. Es sollte aber auch $\frac{8}{m^2+m}<m+1$, also $8<m^3+2m^2+m$ werden. Nun war $8=m^3+m^2+\frac{1}{3}m+\frac{1}{27}$; dieser Ausdruck soll also $<m^3+2m^2+m$, folglich $m^2+\frac{2}{3}m>\frac{1}{27}$ werden; diese Bedingung aber wird durch die obige Annahme $2=m+\frac{1}{3}$ oder $m=\frac{5}{3}$ erfüllt. Der Werth $m=\frac{5}{3}$ in die obigen Ausdrücke $A=(m+1)x$, $B=\frac{8x}{m^2+m}$, $C=mx$ eingesetzt, giebt das Verhältniß der drei gesuchten Zahlen zu einander, und der Umstand, daß die Summe aller drei gleich a sein soll, giebt die Zahlen selbst.

IV, 29. Zwei Zahlen zu finden, so daß ihr Product ein Kubus wird sowohl wenn man die Summe beider dazu addirt, als auch wenn man diese Summe subtrahirt.

Da das Product, wenn man die Summe dazu addirt, eine Kubikzahl sein soll, so setze man diese gleich 64. Da ferner das Product weniger der Summe eine Kubikzahl sein soll, so setze man diese gleich 8. Die Differenz dieser beiden Kubikzahlen, 56, wird also der doppelten Summe der Zahlen, die Summe also gleich 28 sein. Die Summe und das Product zusammen aber sind 64, also das Product 36. Es kommt also darauf an, zwei Zahlen zu finden, deren Product 36 und deren Summe 28 ist. Die Zahlen seien $14+x$ und $14-x$, so ist ihre Summe 28; ihr Product aber ist $196-x^2$; also $196-x^2=36$, und $x^2=160$. Wäre nun 160 eine Quadratzahl, so wäre die Aufgabe gelöst. Aber 160 ist der Unterschied von 196 und 36; 196 ferner ist das Quadrat von 14, und 14 ist die Hälfte von 28; daher ist 196 das Qua-

Digitized by

drat der Hälfte von 28. Aber 28 ist die Hälfte von 56, also 14 ein Viertel von 56; 56 aber ist die Differenz der beiden Kubikzahlen 64 und 8. Die 36 aber sind die halbe Summe beider Kubikzahlen. Demnach bin ich dahin geführt worden, zwei Kubikzahlen zu finden, so daß, wenn der vierte Theil ihres Unterschiedes aufs Quadrat erhoben und von diesem Quadrate die halbe Summe subtrahirt wird, der Rest eine Quadratzahl sei. Die Wurzeln der beiden Kubikzahlen seien $x+1$ und $x-1$, so sind die Kubi selbst x^3+3x^2+3x+1 und x^3-3x^2+3x-1, ein Viertel ihres Unterschiedes $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$, das Quadrat davon $\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$. Die halbe Summe der Kubikzahlen ist x^3+3x; diese von dem Quadrate subtrahirt giebt $\frac{9}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{1}{4}$; dieser Ausdruck, oder wenn man alles mit 4 multiplicirt, $9x^4-4x^3+6x^2-12x+1$ soll ein Quadrat sein. Über die Auflösung dieser Gleichung haben wir oben gesprochen. Diophant setzt die gefundene Formel gleich dem Quadrate von $3x^2-6x+1$ und findet $x=\frac{9}{8}$. Demnach sind die Wurzeln der beiden Kubikzahlen $\frac{17}{8}$ und $\frac{1}{8}$, also die Kubikzahlen selbst, welche statt 64 und 8 am Anfange zu substituiren sind, $\frac{4913}{512}$ und $\frac{1}{512}$. Das Übrige versteht sich von selbst und gehört nicht hieher.

IV, 44. Drei Zahlen zu finden, so daß die Summe aller drei in die erste multiplicirt eine dreieckige Zahl, in die zweite multiplicirt eine Quadratzahl, in die dritte multiplicirt eine Kubikzahl gebe.

In diesem Beispiele, welches zu den interessantesten der ganzen Sammlung gehört, setzt Diophant die Summe der drei Zahlen x^2; die erste sei ein quadratischer Bruch, dessen Zähler eine dreieckige Zahl ist (δυναμοστὸν μονάδων τριγωνικῶν), z. B. $\frac{6}{x^2}$; die zweite ein quadratischer Bruch, dessen Zähler eine Quadratzahl ist, z. B. $\frac{4}{x^2}$; die dritte ein quadratischer Bruch, dessen Zähler eine Kubikzahl ist, z. B. $\frac{8}{x^2}$. Durch diese Annahme wird erlangt, daß die Producte jeder der drei Zahlen in die Summe derselben die verlangte Eigenschaft haben; es bleibt also nur noch übrig, daß die Summe der Zahlen wirklich $=x^2$ ist. Die Summe ist aber $\frac{18}{x^2}$. Demnach haben wir $\frac{18}{x^2}=x^2$, oder $x^4=18$. Es sollte also 18 eine Bi-

Digitized by Google

quadratzahl ſein. Aber 18 iſt die Summe einer dreieckigen, einer Quadrat- und einer Kubikzahl. Ich bin demnach dahin geführt worden, eine Biquadratzahl zu finden, welche die Summe einer dreieckigen, einer Quadrat- und einer Kubikzahl iſt. Die Biquadratzahl ſei x^4; die Quadratzahl x^4-2x^2+1; der Reſt $2x^2-1$ ſoll alſo die Summe einer dreieckigen und einer Kubikzahl ſein. Die Kubikzahl ſei 8; ſo ſoll der Reſt $2x^2-9$ eine dreieckige Zahl ſein. Aber jede dreieckige Zahl giebt, wenn man ſie mit 8 multiplicirt und zu dem Producte 1 addirt, ein Quadrat. Demnach ſoll $16x^2-71$ ein Quadrat ſein. Diophant bildet das Quadrat von der Seite $4x-1$, ſo wird $x=9$. Die dreieckige Zahl iſt alſo 153, die Quadratzahl 6400, die Kubikzahl 8. Nun kehrt er zu dem Anfange zurück, verwirft die urſprüngliche Annahme, und ſetzt die erſte Zahl $\frac{153}{x^2}$, die zweite $\frac{6400}{x^2}$, die dritte $\frac{8}{x^2}$, ſo wird ihre Summe $\frac{6561}{x^2}$ und dieſe ſoll gleich x^2 ſein; es iſt alſo $x^4=6561$, $x^2=81$, $x=9$, woraus ſich die drei Zahlen ergeben.

Wenn irgend eine, ſo iſt dieſe Aufgabe, deren Ausdruck unüberwindliche Schwierigkeiten herbeizuführen drohte, überraſchend gelöſt; freilich nicht ohne einige willkührliche Annahmen. Setzen wir mit Diophant die Biquadratzahl x^4, die Quadratzahl $(x^2-m^2)^2=x^4-2m^2x^2+m^4$, und die Kubikzahl p^3, ſo bleibt für die dreieckige Zahl der Ausdruck $2m^2x^2-m^4-p^3$ übrig; demnach muß nach dem angeführten Satze $16m^2x^2-8m^4-8p^3+1$ ein Quadrat werden. Da hier in Folge der Annahme für die Quadratzahl der Coefficient von x^2 eine Quadratzahl iſt, ſo hat im Allgemeinen die Auflöſung dieſer Gleichung keine Schwierigkeit; aber nicht jeder Werth von x iſt hier brauchbar; ſondern die Auflöſung muß ſo genommen werden, daß der Ausdruck für die dreieckige Zahl eine ganze Zahl werde, weil ein Bruch hier keinen Sinn geben würde. Hätten wir alſo für m und p ganze Zahlen angenommen, ſo müßte x entweder auch eine ganze Zahl oder ein Bruch ſein, deſſen Nenner m oder ein Theiler von m iſt, damit auch $2m^2x^2$ eine ganze Zahl wird. Setzen wir alſo $16m^2x^2-8m^4-8p^3+1=(4mx-q)^2=16m^2x^2-8mqx+q^2$, ſo wird $x=\frac{8m^4+8p^3+q^2-1}{8mq}$; demnach ſind die Zahlen m, p, q ſo anzunehmen, daß $8m^4+8p^3+q^2-1$ durch $8q$ theilbar iſt. Hieraus folgt im Allgemeinen, daß q eine ungerade Zahl ſein müſſe; dann läßt ſich q^2-1, folg-

Digitized by Google

lich der ganze Ausdruck für x durch 8 dividiren; die näheren Bestimmungen hängen von der Beschaffenheit der in jedem Falle willkührlich gewählten Zahlen ab.

VI, 6. Ein rechtwinkliches Dreieck zu finden, so daß die Summe der Fläche und der einen Kathete einer gegebenen Zahl gleich werde.

Die gegebene Zahl sei 7. Man nehme an, das Dreieck sei der Form nach gegeben und habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$, so verlangt die Aufgabe, daß $6x^2+3x=7$ sei. Wenn man nun zu dem halben Coefficienten von x den siebenfachen Coefficienten von x^2 addirt, so muß ein Quadrat herauskommen. Das geschieht aber nicht. Daher muß man ein rechtwinkliches Dreieck suchen, so daß das Quadrat einer halben Kathete zu dem siebenfachen Inhalt addirt ein Quadrat giebt. Die eine Kathete sei x, die andere 1, so soll $\frac{7}{2}x+\frac{1}{4}$, oder $14x+1$ ein Quadrat sein. Damit wir aber das Dreieck in rationalen Zahlen erhalten, muß auch x^2+1 ein Quadrat sein. Die Differenz beider Ausdrücke ist x^2-14x, welche die Factoren x und $x-14$ hat. Die Hälfte ihres Unterschiedes auf das Quadrat erhoben giebt 49, welches dem kleineren Ausdrucke gleich zu setzen ist; und es wird $x=\frac{24}{7}$. Ich setze also die eine Kathete des Dreiecks $\frac{24}{7}$, die andere 1, oder (da diese Annahme bloß die Form des Dreiecks bestimmen soll) die eine $24x$, die andere $7x$; die Hypotenuse wird dann $25x$, und die Summe des Inhalts und der zweiten Kathete $84x^2+7x=7$, woraus $x=\frac{1}{4}$ gefunden wird. Ähnlich sind die nächstfolgenden Aufgaben.

So interessant es wäre, mehre Beispiele der Art aus Diophant's Werk zusammenzustellen, weil die große Mannigfaltigkeit seiner Darstellung fast in jedem Beispiele eine ganz neue Anwendung dieser Methode zeigt, so sehe ich mich doch genöthigt, den Zweck dieses Werks im Auge haltend, mir hier Schranken zu setzen, in welche das innige Wohlgefallen an den Äußerungen des Genie's sich so ungern fügt. Ich muß mich begnügen, hier auf folgende noch besonders ausgezeichnete Aufgaben zu verweisen: IV, 19. 46. V, 18. 20. 21. VI, 3. 4. 5. 8. In einigen Beispielen, welche ich Behufs der weiter zu erwähnenden Methoden werde anführen müssen, werden wir noch Gelegenheit haben, auch die hier besprochene zu beobachten. Ich kann aber hier diejenigen Aufgaben nicht ganz stillschweigend übergehen, in welchen diese Methode der Zurückrechnung zweimal und öfter gewissermaßen in einander geschachtelt vorkommt.

Digitized by Google

Hieher gehören besonders die Aufgaben IV, 43. 45. V, 33. VI, 13., von denen ich die letzte der Anschaulichkeit wegen hier ausführen will.

VI, 13. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, so daß der Inhalt desselben ein Quadrat wird, wenn man jede der Katheten dazu addirt.

„Man nehme das Dreieck als der Gestalt nach gegeben an; es habe die Seiten $5x$, $12x$, $13x$; so soll zuerst $30x^2+12x$ ein Quadrat sein; es sei $=36x^2$, so wird $x=2$. Für denselben Werth von x soll aber auch $30x^2+5x$ ein Quadrat sein; das geschieht aber nicht. Darum kommt es darauf an, ein Quadrat zu suchen, so daß, wenn man 30 davon abzieht und den Rest in 12 dividirt, dann den Quotienten auf das Quadrat erhebt, dieses mit 30 multiplicirt und dazu den fünffachen Quotienten addirt, diese Summe ein Quadrat werde. Das gesuchte Quadrat sei x^2. Wenn man davon 30 abzieht, und den Rest in 12 dividirt, wird der Quotient $\frac{12}{x^2-30}$, das Quadrat davon $\frac{144}{x^4-60x^2+900}$, dieses mit 30 multiplicirt $\frac{4320}{x^4-60x^2+900}$, und dazu fünfmal $\frac{12}{x^2-30}$ addirt, giebt $\frac{60x^2+2520}{x^4-60x^2+900}$. Dieser Ausdruck soll Quadrat werden; der Nenner aber ist ein Quadrat; daher muß auch $60x^2+2520$ ein Quadrat werden, das heißt, man soll ein Quadrat finden, welches mit 60 multiplicirt, und zu 2520 addirt, ein Quadrat giebt. Hätten wir nun das Dreieck so gebildet, das $60+2520$ eine Quadratzahl geworden wäre, so hätten wir die Aufgabe gelöst. Aber 60 entsteht aus dem Product der beiden Katheten; 2520 aber aus dem Product der größern Kathete, des Überschusses der beiden Katheten, und des Inhalts. Wir kommen also darauf hin, ein rechtwinkliges Dreieck zu suchen, so daß das Product der beiden Katheten addirt zu dem Product aus der größern Kathete, dem Überschusse der Katheten und dem Inhalt, ein Quadrat giebt. Wenn wir nun für die größere Kathete eine Quadratzahl annehmen, und alles durch dieselbe dividiren, so haben wir die Aufgabe, daß die kleinere Kathete addirt zu dem Producte des Überschusses der Katheten in den Inhalt ein Quadrat werde. Und dann kommt es nur darauf an, zu zwei gegebenen Zahlen, dem Inhalt und der kleinen Kathete, ein Quadrat zu suchen, welches mit einer der gegebenen Zahlen multiplicirt und zu der andern addirt ein Quadrat giebt. Das ist aber

ſchon oben gezeigt worden, und das Dreieck hat die Seiten 3, 4, 5. Ich mache dieſe Zahlen zu Coefficienten von x (τάσσω αὐτὸν ἐν ϛϛοῖς), und es kommt darauf an, die Ausdrücke $6x^2+4x$ und $6x^2+3x$ zu Quadraten zu machen. Wenn wir die erſte Gleichung löſen, ſo wird $x=\frac{4}{m^2-6}$, alſo $x^2=\frac{16}{m^4-12m^2+36}$, folglich $6x^2+3x=\frac{12m^2+24}{m^4-12m^2+36}$. Dieſes ſoll ein Quadrat ſein. Man hat alſo ein Quadrat ſuchen, welches mit der kleinern gegebenen Zahl multiplicirt und zu der größern addirt ein Quadrat giebt. Ein ſolches Quadrat iſt 25; demnach iſt $m^2=25$, $m=5$. Wenn wir alſo $6x^2+4x$ zu einem Quadrat machen wollen, ſetzen wir es gleich $25x^2$, ſo wird $x=\frac{4}{19}$; die Seiten des geſuchten Dreiecks ſind alſo $\frac{12}{19}$, $\frac{16}{19}$, $\frac{20}{19}$."

Wir wollen den Gang, den Diophant genommen hat, Schritt für Schritt verfolgen. Diophant nimmt das geſuchte Dreieck als in den Seiten $5x$, $12x$, $13x$ der Form nach gegeben an; der Inhalt iſt alſo $30x^2$, und die Aufgabe führt auf die doppelte Gleichung $30x^2+12x=y^2$, $30x^2+5x=y_1^2$. Setzt man $y=nx$, ſo wird $x=\frac{12}{n^2-30}$; alſo $30x^2=\frac{4320}{(n^2-30)^2}$, $5x=\frac{60}{n^2-30}$ $=\frac{60n^2-1800}{(n^2-30)^2}$, folglich $\frac{60n^2+2520}{(n^2-30)^2}=y_1^2$. Es kommt alſo darauf an, den Zähler dieſes Bruchs zu einem Quadrat zu machen. Diophant verwirft die Formel als unauflösbar, weil $60+2520$ kein Quadrat iſt. Um nun eine andere Form des Dreiecks zu finden, welche auf eine auflösbare Gleichung führt, unterſucht er zunächſt durch ſeine Zurückrechnung, wie die Zahlen 60 und 2520 entſtanden ſind. Hätten wir die Katheten kx, k^1x, die Hypotenuſe hx genannt, ſo wäre der Inhalt $\frac{1}{2}kk^1x^2$; alſo ergäbe die Aufgabe die doppelte Gleichung $\frac{1}{2}kk^1x^2+kx=y^2$, $\frac{1}{2}kk^1x^2+k^1x^2=y_1^2$. Setzen wir nun $y=nx$, ſo erhalten wir aus der erſten Gleichung $x=\frac{k}{n^2-\frac{1}{2}kk^1}$, demnach $\frac{1}{2}kk^1x^2=\frac{\frac{1}{2}k^3k^1}{(n^2-\frac{1}{2}kk^1)^2}$,

$$k^1x=\frac{kk^1}{n^2-\frac{1}{2}kk^1}=\frac{kk^1n^2-\frac{1}{2}k^2k^{1\,2}}{(n^2-\frac{1}{2}kk^1)^2},$$

alſo $y_1^2=\frac{kk^1n^2+\frac{1}{2}kk^1(k-k^1)k}{(n^2-\frac{1}{2}kk^1)^2}$. Was alſo oben 60 war, der Coefficient von n^2, iſt das Product der beiden Katheten, die obigen 2520 aber, das abſolute Glied, iſt das Product aus der größern

Digitized by Google

Kathete k, dem Überschusse der Katheten $k-k^1$, und dem Inhalt $\frac{1}{2}kk^1$. Dieses Resultat, welches uns die Formel geradezu verräth und welches Diophant durch Belauschung des Ganges, den die Rechnung genommen, herausgebracht hat, giebt nun die Bedingung an die Hand, wie man das Verhältniß der Seiten des gesuchten Dreiecks bestimmen müsse, damit die Gleichung sich lösen lasse; unter den verschiedenen Bedingungen aber, welche die Gleichung $Mx^2+N=y^2$ auflösbar machen, wählt Diophant diejenige aus, daß $M+N$ eine Quadratzahl sei; er vereinfacht aber die Formel dadurch, daß er den beiden Producten gemeinschaftlichen Factor k bereits als Quadratzahl annimmt. Dann bleibt nur übrig, das $k^1+\frac{1}{2}kk^1(k-k^1)$ ein Quadrat sei. Hier nun macht Diophant in seiner Darstellung einen Sprung, indem er sagt: es kommt nur noch darauf an, zu zwei gegebenen Zahlen k^1 und $\frac{1}{2}kk^1$ ein Quadrat zu suchen, welches mit einer der gegebenen Zahlen multiplicirt und zu der andern addirt ein Quadrat mache. Dieser Übergang setzt voraus, daß auch $k-k^1$ ein Quadrat sei. Offenbar bezieht er sich hier auf die vorhergehende zwölfte Aufgabe, in welcher er gelehrt hatte, ein rechtwinkliges Dreieck so zu finden, daß sowohl k als $k-k^1$, als auch $k^1+\frac{1}{2}kk^1$ Quadratzahlen seien. Ist nämlich außer k auch noch $k-k^1$ Quadratzahl, so hat die Auflösung der Gleichung $k^1+\frac{1}{2}kk^1(k-k^1)=y^2$ keine Schwierigkeit, wenn man nach Aufg. 12. annimmt, daß die Summe der Coefficienten $k^1+\frac{1}{2}kk^1$ ebenfalls Quadratzahl ist. Ein Dreieck, welches diesen Forderungen genügt, ist das aus den Seiten 3, 4, 5 gebildete und jedes ihm ähnliche. Hier ist nämlich $k=4$, $k-k^1=1$, $k^1+\frac{1}{2}kk^1=9$, also alle drei in Rede stehende Größen Quadrate. Nun kehrt Diophant zu dem ursprünglichen Ansatze zurück, und bildet das Dreieck aus den Seiten $3x$, $4x$, $5x$, welche ihm die doppelte Gleichung, $6x^2+4x=y^2$, $6x^2+3x=y_1^2$ geben. Setzt er nun $y=nx$, so wird $x=\frac{4}{n^2-6}$, und $y_1^2=\frac{12n^2+24}{(n^2-6)^2}$. Da hier $12+24=36$, also Quadratzahl ist, so giebt es nach dem Lemma VI, 12. unzählige Werthe für n, welche die Formel $12n^2+24$ zu einem Quadrate machen; es muß aber n so gefunden werden, daß $n^2>6$ ist, weil $x=\frac{4}{n^2-6}$ war; darum ist der erste Werth $n=1$ unbrauchbar, und Diophant nimmt $n=5$, also $x=\frac{4}{19}$.

Digitized by

3. Gebrauch des Symbols für die Unbekannte in verschiedenen Bedeutungen.

Schon die vorige Methode führte häufig die Unbequemlichkeit mit sich, daß in zwei in einander gefügten Aufgaben das nämliche Zeichen ς° in ganz verschiedener Bedeutung gebraucht wurde; indeß hatten wir es da doch immer mit zwei zwar in einander geschobenen, aber doch leicht von einander zu trennenden Aufgaben zu thun. Auffallender und unbequemer wird dieser mehrdeutige Gebrauch des Zeichens, wenn dasselbe in der nämlichen Aufgabe, in einer und derselben Operation zwei Bedeutungen hat, die nur in Gedanken von einander können geschieden werden. Es finden sich nämlich Aufgaben, in welchen Diophant die Einführung zweier Unbekannten nicht hat vermeiden können; weil er nun aber zur Bezeichnung derselben nur ein Symbol hat, so tritt der Übelstand ein, daß beide Unbekannte durch dasselbe Zeichen ausgedrückt erscheinen. Dieses geschieht entweder successive, wo es dann weniger Unbequemlichkeit verursacht, oder implicite, so daß sogar eine Unbekannte als Function der andern, das heißt, x durch x ausgedrückt erscheint. Beide Arten der Anwendung dieser Methoden will ich an Beispielen erläutern.

Beispiele der ersten Art.

I, 22. Eine gegebene Zahl in drei andere zu zerlegen, so daß jede der beiden äußersten zu der mittelsten addirt, ein gegebenes Verhältniß zu der dritten habe.

Es sei aufgegeben, die Zahl 100 in drei Zahlen zu zerlegen, so daß die Summe der ersten und zweiten das Dreifache der dritten, die Summe der zweiten und dritten das Vierfache der ersten sei. Die dritte Zahl sei x, so ist die Summe der ersten und zweiten $3x$, alle drei zusammen also $4x$; die drei Zahlen zusammen sind aber 100; daher ist x, das ist, die dritte Zahl, $= 25$; die erste und zweite zusammen also 75. Da ferner die Summe der zweiten und dritten das Vierfache der ersten ist, so wird, wenn man die erste x nennt, die Summe der zweiten und dritten $4x$ sein; die drei Zahlen zusammen also $5x$; sie sind aber auch gleich 100; demnach ist x, die erste Zahl, $= 20$. Es ist also die erste 20, die dritte 25; die zweite also wird 55 sein.

Digitized by Google

Diese Methode mit der vorigen vereinigt, so daß x oder vielmehr ς^{o} in nicht weniger als vier verschiedenen Bedeutungen vorkommt, finden wir in der Aufgabe.

III, 18. Drei Zahlen zu finden, so daß das Product von je zweien zu der Summe derselben beiden addirt, ein Quadrat giebt.

Die erste Zahl sei x, die zweite 3; so soll, wenn man ihr Product zu ihrer Summe addirt, $4x+3$ ein Quadrat werden, z. B. $= 25$; dann wird $x = 5\frac{1}{4}$. Die erste Zahl ist also $5\frac{1}{4}$, die zweite 3, und eine der Bedingungen ist gelöst; denn ihr Product sammt ihrer Summe macht ein Quadrat. Es soll aber auch das Product sammt der Summe der zweiten und dritten, und ferner das Product sammt der Summe der ersten und dritten ein Quadrat machen. Sei nun die dritte x, so wird das Product und die Summe der zweiten und dritten wiederum $4x+3$; das Product und die Summe der ersten und dritten wird $\frac{13}{2}x+\frac{11}{2}$, und beide Ausdrücke sollen Quadrate werden. Da aber in der einen Formel die Anzahl der Zahlen (d. i. der Coefficient von x) und der Einheiten größer ist als in der andern, und sie sich auch nicht wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten, so ist die gemachte Annahme unpassend. Wir sind also darauf hingewiesen, zwei Zahlen zu finden, so daß nicht nur ihr Product zu ihrer Summe addirt ein Quadrat giebt, sondern auch noch die um 1 vermehrten Zahlen sich zu einander wie zwei Quadratzahlen verhalten. (Nennt man nämlich die erste a, die zweite b, die dritte x, so soll erstens $ab+a+b$ ein Quadrat sein; ferner aber soll $ax+a+x$, d. i. $(a+1)x+a$, und ebenso auch $(b+1)x+b$ ein Quadrat sein; damit beide letzteren Bedingungen erfüllt werden können, müssen sich die Zahlen $a+1$ und $b+1$ wie Quadratzahlen zu einander verhalten.) Da nun, wenn eine Zahl um 3 größer als das Vierfache einer andern ist, die um 1 vermehrten Zahlen sich wie Quadratzahlen zu einander verhalten, so setze ich die erste Zahl x, die zweite $4x+3$; so soll, wenn man das Product dieser Zahlen zu ihrer Summe addirt, ein Quadrat herauskommen. Aber ihr Product zu ihrer Summe addirt giebt $4x^2+8x+3$; dieses soll also ein Quadrat sein. Ich bilde das Quadrat von $2x-3$, so wird es $4x^2-12x+9$, und x wird $\frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$. Daher wird die erste Zahl $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{42}{10}$ oder $\frac{21}{5}$ sein. Dadurch ist nun eine

Digitized by Google

Forderung der Aufgabe erfüllt. Es sind nun noch die beiden andern übrig. Ich setze jetzt die dritte Zahl x; so wird Product und Summe der zweiten und dritten $\frac{26}{3}x+\frac{21}{3}$; das soll ein Quadrat sein, z. B. $=25$. Ferner ist Product und Summe der ersten und dritten $\frac{13}{10}x+\frac{3}{10}$; das soll ebenfalls ein Quadrat sein, z. B. 100. Ich multiplicire den ersten Ausdruck mit 25, so soll $130x+105$ ein Quadrat sein; und den zweiten Ausdruck multiplicire ich mit 100, so soll auch $130x+30$ ein Quadrat sein. Die Differenz beider ist 75, und die Auflösung der doppelten Gleichung giebt $x=\frac{7}{10}$. Demnach sind die drei Zahlen $\frac{3}{10}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{7}{10}$. (Diophant hat nämlich 75 in die Factoren 3 und 25 zerlegt, und $130x+105=196$ oder $130x+30=121$ gesetzt.)

Diophant setzt also, um einen kurzen Rückblick zu thun, zuerst die erste der gesuchten Zahlen x, die zweite 3, und findet $x=\frac{11}{2}$. Nun setzt er die dritte Zahl x. Da ihn dieses aber zu keinem Resultate führt, so setzt er von Neuem die erste Zahl x, die zweite $4x+3$ (allgemeiner hätte er die zweite $n^2x\pm n^2-1$ setzen können) und findet daraus die erste $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{21}{3}$; und nun setzt er abermals die dritte Zahl $=x$, die sich dann gleich $\frac{7}{10}$ ergiebt.

Man könnte diese Auflösung vermittelst einer successiven doppelten Annahme des Symbols für die Unbekannte eine Auflösung in zwei Hieben, à deux coups, nennen. Die verschiedenen unbekannten Zahlen werden nicht, in einander complicirt, durch ein und dasselbe Verfahren gefunden, sondern aus mehren von einander abgesonderten Operationen gehen sie nach einander einzeln hervor.

Übrigens ließe die letzte Aufgabe sich sehr leicht allgemein lösen. Nennt man nämlich die drei Zahlen x, y, z, so hat man die drei Gleichungen zu lösen:

$$xy+x+y=a^2$$
$$xz+x+z=b^2$$
$$yz+y+z=c^2$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergiebt sich $y=\frac{a^2-x}{x+1}$, $z=\frac{b^2-x}{x+1}$. Substituirt man diese beiden Werthe in die dritte Gleichung, so erhält man

$$\frac{(a^2-x)(b^2-x)}{(x+1)^2}+\frac{a^2+b^2-2x}{x+1}=b^2$$

oder $$\frac{(a^2-x)(b^2-x)+(a^2+b^2-2x)(x+1)}{(x+1)^2}=b^2$$

Da

Da der Nenner ein Quadrat ist, so kommt es nur noch darauf an, den Zähler zu einem Quadrate zu machen. Wenn wir die angedeuteten Rechnungen ausführen, so ergiebt sich die Gleichung

$$a^2b^2+a^2+b^2-2x-x^2=m^2$$

und nach x aufgelöst $x=-1+\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2-m^2+1}$

Nimmt man nun zwei dieser Größen beliebig an, z. B. a und b, so ist es in jedem bestimmten Fall nicht schwer, unendlich viele Werthe für die dritte zu finden, welche x rational machen; es ist dabei nur zu beachten, daß keine der drei gesuchten Zahlen negativ werde. Setzen wir z. B. $a^2=9$, $b^2=16$, so wird $x=-1+\sqrt{170-m^2}$. Hier kann m^2 allein in ganzen Zahlen die Werthe 1, 49 und 121 haben. Ist nun

$$\begin{aligned} m^2 &= 1 \quad \text{so ist} \quad x=12 \\ &= 49 \quad \text{“} \quad \text{“} \quad =10 \\ &=121 \quad \text{“} \quad \text{“} \quad =6 \end{aligned}$$

Da nun $y=\frac{9-x}{x+1}$, $z=\frac{16-x}{x+1}$, so würde für die beiden zuerst gefundenen Werthe für x die Zahl y negativ werden; demnach ist nur der letzte brauchbar; drei Zahlen der Art sind also außer den Diophantischen noch 6, $\frac{3}{7}$, $\frac{10}{7}$.

Beispiele der zweiten Art.

Wenn eine Gleichung von der Form $Ax^2+Bx=y^2$ die einzige oder wenigstens die letzte Bedingung ist, welche das gesuchte x erfüllen soll, so setzt Diophant y gleich irgend einem bestimmten Vielfachen von x, dividirt dann die Gleichung durch x und findet x aus einer Gleichung des ersten Grades. Soll er z. B. IV, 23. den Ausdruck $x^2+\frac{5}{2}x$ zu einem Quadrate machen, so setzt er $x^2+\frac{5}{2}x=4x^2$, so wird $x+\frac{5}{2}=4x$, also $x=\frac{5}{6}$. Wir haben aber bei den vorhergehenden Darstellungen schon mehrmals solche Fälle gefunden, in denen die Auflösung der Gleichung $Ax^2+Bx=y^2$ nicht die letzte Bedingung für x war, sondern es sollte der aus dieser Gleichung gefundene Werth für x noch in eine andere substituirt und auch dieser genügt werden. Ich habe mich bisher des Mittels bedient, in dem Falle $y=mx$, also $Ax^2+Bx=m^2x^2$ zu setzen, woraus sich $x=\frac{B}{m^2-A}$ ergiebt. Es fragt sich, wie drückt Diophant in diesem Falle den unbestimmten Coefficienten m aus, für den er kein neues Symbol hat? Er drückt m ebenfalls

durch x aus. Da es aber, wenn beide x als verschiedene Größen betrachtet werden, ihm nicht möglich ist, $x^2 \cdot x^2$ auszudrücken, weil $\delta^{\upsilon}\delta^{\upsilon}$ bei ihm x^4 bedeutet, also die Identität beider x voraussetzen würde, so behält er den unbestimmten Coefficienten so lange im Sinne, bis er aus der Formel den Werth für x entwickelt hat, und substituirt für denselben erst das Zeichen, nachdem die Entwickelung geschehen ist. Sein Verfahren ist demnach folgendes. Wenn Ax^2+Bx ein Quadrat werden soll, so setze ich es gleich x^2 mit irgend einem quadratischen Coefficienten; dann wird x gleich B dividirt durch ein um A vermindertes Quadrat, also $x = \frac{B}{x^2-A}$, und diesen Werth setzt er dann für x in die zweite Gleichung ein, wie folgende Beispiele beweisen mögen.

VI, 23. In dieser Aufgabe wird Diophant auf die beiden Gleichungen $2x^2+2x=y^2$, $x^3+2x^2+x=y_1^3$ geführt. Nun fährt er fort: den Ausdruck $2x^2+2x$ zu einem Quadrat zu machen ist ganz leicht; denn wenn ich 2 durch ein um 2 vermindertes Quadrat dividire, so habe ich x. Aber dieses muß so gefunden werden, daß auch der zweiten Gleichung ein Genüge geschieht. Nun ist x gleich 2 dividirt durch x^2-2 (das ist $x = \frac{2}{x^2-2}$; über diese Art Brüche mit zusammengesetztem Nenner zu bezeichnen, habe ich im siebenten Kapitel gesprochen); also der Kubus $\frac{8}{(x^2-2)^3}$ (ὁ δὲ κύβος γίνεται $\mu^{\tilde{o}}\overline{\eta}$ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ $\delta^{\tilde{\upsilon}}\overline{\alpha}$ λείψει $\mu^{\tilde{o}}\overline{\beta}$ κύβῳ), und das doppelte Quadrat wird $\frac{8}{(x^2-2)^2}$ (καὶ οἱ δύο ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι γίνονται $\mu^{\tilde{o}}\overline{\eta}$ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ $\delta^{\tilde{\upsilon}}\overline{\beta}$ λείψει $\mu^{\tilde{o}}\overline{\beta}$ τετραγώνῳ) u. s. w. Ich habe dieses Beispiel zuerst gewählt, weil Diophant hier noch am umständlichsten ist, und das Zusammentreffen beider Zeichen dadurch vermeidet, daß er in der weiteren Entwickelung die erste ursprüngliche Unbekannte durch Worte ausdrückt. Eben so sagt er am Ende, als er das zweite $x = \frac{2}{1}\frac{7}{6}$, also $x^2 = \frac{7}{2}\frac{2}{3}\frac{9}{6}$ gefunden hat: καὶ ἐὰν δυάδα μερίσωμιεν εἰς τὸν τούτου δυάδι ἐλάσσονα, εὑρήσομεν τὸν ς'' $\overline{\varphi\iota\beta}^{\sigma\iota\tilde{\varsigma}}$, „und wenn wir 2 durch eine um 2 kleinere Zahl, als dieses Quadrat ist, dividiren, finden wir $x = \frac{5}{2}\frac{1}{1}\frac{2}{7}$. In den andern Beispielen ist er weniger ausführlich.

IV, 17. 18. In beiden Aufgaben soll x in allgemeinen Aus-

Digitized by Google

drücken so gefunden werden, daß $13x$ ein Quadrat wird; er sagt: ἔστω τετραγωνικῶν $\delta^{\tilde{\upsilon}}\overline{\rho\xi\gamma}$, καὶ γίνεται ὁ $\varsigma^{\acute{o}}$ $\delta^{\tilde{\upsilon}}\overline{\iota\gamma}$. Das heißt, man setze $13x$ gleich x^2 mit einem quadratischen Coefficienten, z. B. $= 169x^2$, so ist $x = 13x^2$. Um nun im fernern Verlauf der Rechnung Mißverständnisse und Verwirrungen zu vermeiden, setzt er sogleich in die Functionen für sämmtliche Unbekannte, die durch das erste x ausgedrückt waren, den durch das zweite x ausgedrückten Werth dafür. Der Anschaulichkeit wegen will ich das Beispiel IV, 17. kürzlich durchführen.

Drei Zahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl ist, und die außerdem die Eigenschaft haben, daß das Quadrat einer jeden zu der folgenden Zahl addirt eine Quadratzahl giebt.

Die mittlere Zahl sei x mit irgend einem Coefficienten, z. B. $4x$ (τετάχθω ὁ μέσος $\varsigma\tilde{\varsigma}$ ὅσων δήποτε, ἔστω $\varsigma\tilde{\varsigma}\,\overline{\delta}$). Da das Quadrat der ersten Zahl, wenn man die zweite dazu addirt, ein Quadrat werden soll, so suche ich ein Quadrat, welches zu $4x$ addirt ein Quadrat giebt. Die erste Zahl ist also $x - 1$. So ist die erste Bedingung erfüllt. Da nun auch das Quadrat der zweiten zu der dritten addirt ein Quadrat geben soll, so werde ich die dritte Zahl haben, wenn ich $16x^2$ von irgend einem Quadrat, z. B. von $16x^2 + 8x + 1$, subtrahire; dann ist die dritte Zahl $8x + 1$. So sind zwei Bedingungen erfüllt. Nun soll auch die Summe der drei Zahlen eine Quadratzahl sein. Die Summe ist aber $13x$; das soll ein Quadrat sein. Ich setze $13x$ gleich x^2 mit irgend einem quadratischen Coefficienten, z. B. gleich $169x^2$, so ist $x = 13x^2$. Kehre ich nun zu den Annahmen zurück, so wird die erste Zahl $13x^2 - 1$, die zweite $52x^2$, die dritte $104x^2 + 1$ sein. So habe ich in allgemeinen Ausdrücken drei Bedingungen erfüllt (λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων). Es ist nur noch übrig, daß auch das Quadrat der dritten Zahl, wenn man die erste dazu addirt, ein Quadrat werde. Es soll also $10816x^4 + 221x^2$, oder durch x^2 dividirt, $10816x^2 + 221$ ein Quadrat werden, und zwar gleich dem Quadrate von der Wurzel $104x + 1$, so wird $x = \frac{5}{3}\frac{3}{4}$. Diesen Werth nun substituirt er in die Ausdrücke für die drei Zahlen $13x^2 - 1$, $52x^2$, $104x^2 + 1$. Ganz ähnlich ist die Aufgabe IV, 18.

VI, 13. 14. 15. Von diesen drei einander ziemlich confor-

men Aufgaben, deren jede darauf führt, eine doppelte Gleichung von der Form $Ax^2+Bx=y^2$, $A_1x^2+B_1x=y_1^2$ zu lösen, haben wir die erste oben weitläufiger behandelt, weshalb ich hier nur das hieher Gehörige kurz wiederholen will. Die aus dem ersten Theile der Rechnung gefundene Annahme des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks in der Form $3x$, $4x$, $5x$ führte auf die doppelte Gleichung $6x^2+4x=y^2$ und $6x^2+3x=y_1^2$. Nun sagt Diophant: Und wenn wir die größere (das Glied $4x$ enthaltende) Gleichung auflösen, so wird $x=\frac{4}{x^2-6}$, γίνεται ὁ ϛ̊ μ̃ο̄δ̄ ἐν μορίῳ δ̃ῦ ᾱ φ μ̃ο̄ ϛ̄. Hier ist das x^2 im Nenner dieselbe Größe, welche wir oben m^2 genannt haben, nämlich der Coefficient von x^2, welcher für y^2 substituirt ward. Indem nun Diophant den gefundenen Ausdruck $\frac{4}{x^2-6}$ in die zweite Gleichung $6x^2+3x=y_1^2$ substituirt, und dann diese Gleichung auflöst, findet er das zweite x, das heißt, unser m; und nun kehrt er zu der ersten Gleichung zurück, und setzt $6x^2+4x=$ dem Quadrate eines Vielfachen von x, dessen Coefficient das zweite, durch die zweite Gleichung bestimmte x ist. Die folgende vierzehnte Aufgabe verlangt,

Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, so daß der Inhalt ein Quadrat wird, wenn man jede Kathete davon abzieht.

Wie in der vorigen Aufgabe, so wird man auch hier darauf geführt, das gesuchte Dreieck dem Dreiecke 3, 4, 5 ähnlich anzurechnen. Seien also die Seiten des gesuchten Dreiecks $3x$, $4x$, $5x$ (τετάχθω οὖν ἐν ἀριθμοῖς), so verlangt die Aufgabe, daß $6x^2-4x=y^2$, $6x^2-3x=y_1^2$ sei. Also zuerst $6x^2-4x=y^2$. „Und wenn wir das Quadrat (nämlich y^2) kleiner als $6x^2$ annehmen, so wird x gleich 4, dividirt durch den Überschuß, um welchen 6 größer ist als ein Quadrat. Nehmen wir nun als dieses Quadrat x^2 an, so soll, wie auch x beschaffen sein mag, $6x^2-3x$ ein Quadrat werden. Aber das sechsfache Quadrat ist $\frac{96}{x^4-12x^2+36}$, die dreifache Wurzel aber $\frac{12}{6-x^2}$, das ist $\frac{72-12x^2}{x^4-12x^2+36}$ (τουτέστι μ̃ο̄ οβ̄ λείψει δ̃ῦ ιβ̄ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ). Wenn wir dieses subtrahiren von 96 mit demselben Nenner so bleibt $\frac{12x^2+24}{x^4-12x^2+36}$. Der Nenner ist Quadrat; daher muß auch $12x^2+24$ einem Quadrat

Digitized by Google

gleich werden; das geſchieht, wenn $x = 1$ iſt. Darum ſetze ich $6x^2 - 4x = x^2$, ſo wird $x = \frac{4}{5}$. Demnach ſind die Seiten des geſuchten Dreiecks $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$, 4.“ Aus dieſem Beiſpiele erhellt recht klar, wie die angewandte Operation bloß dazu gedient hat, wenn wir in der Gleichung $6x^2 - 4x = y^2$, $y^2 = m^2x^2$ geſetzt hätten, das m ſo zu finden, daß der aus dieſer Annahme $6x^2 - 4x = m^2x^2$ hervorgehende Werth von x zugleich der zweiten Gleichung $6x^2 - 3x = y_1^2$ genüge. Diophant hat das zweite x, das iſt m, gleich 1 gefunden, darum ſetzt er $6x^2 - 4x = x^2$, woraus ſich $x = \frac{4}{5}$ ergiebt. Setzen wir dieſen Werth in der zweiten Gleichung, ſo wird $6 \cdot \frac{16}{25} - 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{96}{25} - \frac{12}{5} = \frac{96}{25} - \frac{60}{25} = \frac{36}{25}$, alſo wird auch dieſe Bedingung erledigt. Aber außer 1 kann m auch noch unzählige andere Werthe haben. Um einen ſolchen zu finden, braucht Diophant daſſelbe Symbol noch einmal in einer dritten Bedeutung. Es heißt nämlich: „Wenn man aber die Einheit nicht anwenden will, ſo ſetze man die Wurzel des Quadrats $x + 1$, ſo daß das dreifache Quadrat nebſt der Zahl 6 wird $3x^2 + 6x + 9$; und dieſes iſt leicht zu einem Quadrate zu machen; und man findet x nicht größer als $\frac{13}{9}$, aber die Wurzel des geſuchten Quadrats, nämlich $x + 1$, nicht größer als $\frac{22}{9}$. Das ſo gefundene Quadrat von 6 abgezogen macht x rational.“ Diophant hat ſich hier einige Sprünge erlaubt, zu deren Erklärung Folgendes hinreichen wird. Es ſollte, um das zweite x oder das m zu beſtimmen, $12x^2 + 24$ ein Quadrat werden, was, da $12 + 24$ ein Quadrat, alſo der Werth $x = 1$ ſogleich gegeben iſt, keine Schwierigkeit hat. Man ſetzt nämlich $x = x_1 + 1$, ſo wird $12x^2 + 24 = 12x_1^2 + 48x_1 + 36$. So erſcheint aber die Formel bei Diophant nicht. Da nämlich der Ausdruck $12x^2 + 24$ durch das Quadrat 4 theilbar iſt, ſo kommen wir zu demſelben Ziel in kleineren Zahlen, wenn wir $\frac{12x^2 + 24}{4}$, das iſt $3x^2 + 6$ zu einem Quadrate machen. Dann ergiebt die Subſtitution von $x_1 + 1$ für x die Formel $3x_1^2 + 6x_1 + 9$. Nun muß aber x^2, weil es von 6 abgezogen werden ſoll, kleiner als 6, alſo $x < \sqrt{6}$ ſein. Dieſe Quadratwurzel beſtimmt Diophant näherungsweiſe ſo, daß er 6 mit 81 multiplicirt und dividirt, ſo muß $x < \sqrt{\frac{486}{81}}$ ſein. Aber 484 iſt das Quadrat von 22, demnach geht man ſicher, wenn man $x < \frac{22}{9}$, alſo x_1, welches $x - 1$ iſt, kleiner $\frac{13}{9}$ nimmt. Setzt man nun $3x_1^2 + 6x_1 + 9$

$= (3 - nx_1)^2$, so wird $x_1 = \frac{6n+6}{n^2-3}$; es ist also n so anzunehmen, daß $\frac{6n+6}{n^2-3} < \frac{13}{9}$ wird. Wie daraus die Grenze für n zu ermitteln ist, hat Diophant bei andern Gelegenheiten gezeigt; es ergiebt sich, daß $n > \frac{27+\sqrt{1938}}{13}$, oder, da $1936 = 44^2$, $n > 5\frac{6}{13}$ sein müsse. Nehmen wir Beispiels halber $n = 6$ an, so wird $x_1 = \frac{4}{11}$, also das zweite x oder unser $m = x_1 + 1 = \frac{25}{11}$; wir finden also einen Werth für das erste x, welcher den beiden Gleichungen $6x^2 - 4x = y^2$ und $6x^2 - 3x = y_1^2$ genügt, wenn wir $y = \frac{25}{11}x$ setzen; nämlich $x = \frac{484}{101}$, welcher Werth $6x^2 - 3x = \frac{1258884}{10201} = \left(\frac{1122}{101}\right)^2$ macht. In dieser Aufgabe hat also das Zeichen x oder das Diophantische ς° drei verschiedene Bedeutungen; erstens bedeutet es den gemeinschaftlichen Factor, in welchen die Seiten des seiner Form nach aus früheren Betrachtungen gegebenen Dreiecks multiplicirt werden müssen, damit es den Forderungen gegenwärtiger Aufgaben angepaßt werden könne. Setzt man nun $6x^2 - 4x = m^2x^2$, so bedeutet dasselbe Zeichen zweitens den Factor m. Dieser Factor ist so zu bestimmen, daß auch $6x^2 - 3x$ ein Quadrat werde; die Substitution des aus der ersten Gleichung gefundenen und durch m ausgedrückten Werthes für x ergiebt die Bedingung, daß $12m^2 + 24$ oder $3m^2 + 6$ ein Quadrat sein müsse; da hier der Werth $m = 1$ bekannt ist, so erhält man neue Werthe für m, wenn man $m = z + 1$ setzt; und so bedeutet Diophant's Zeichen drittens die Größe z; und dasselbe Zeichen wäre viertens für die oben mit n bezeichnete Größe verwandt worden, wenn Diophant die Auflösung, die er bloß andeutet, durchgeführt hätte.

VI, 15. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, so daß der Flächeninhalt, sowohl wenn man eine Kathete, als auch, wenn man die Hypotenuse subtrahirt, ein Quadrat giebt.

Auch in dieser Aufgabe, welche aus der Annahme der Seiten $3x$, $4x$, $5x$ auf die doppelte Gleichung führt $6x^2 - 3x = y^2$, $6x^2 - 5x = y_1^2$, wird x durch x ausgedrückt, indem wir vorher y gleich einem unbestimmten Vielfachen von x gesetzt wird, als dessen Coefficient Diophant nach der Entwickelung x substituirt;

Digitized by Google

nur faßt er sich hier ganz kurz, indem er sagt: καὶ ἐὰν ποιήσω δ^υ ϛ̄ ϕ ς ς̃ γ̄ ἴσα τετραγώνῳ, γίνεται ὁ ς^ὸ μ^ο γ̄ ἐν μορίῳ μ^ο ϛ̄ ϕ δ^υ α, d. i. „und wenn ich $6x^2 - 3x$ zu einem Quadrate mache, so wird $x = \frac{3}{6 - x^2}$." Die fernere Auflösung dieser Aufgabe ist im Griechischen Texte leider verstümmelt, weshalb ich mich nicht länger dabei aufhalten will, zumal die Methode, auf deren Erläuterung es mir hier allein ankommt, aus den bisher angeführten Beispielen hinlänglich klar vor Augen liegt.

4. Methode der Grenzen.

Da Diophant häufig Zahlen sucht, welche in einer gewissen Reihenfolge von der größeren zur kleineren fortschreiten, wie in dem oben ausgeführten Beispiel IV, 26.; da er ferner keine negative Auflösung gestattet, so sieht er sich häufig in die Nothwendigkeit versetzt, die zuerst und auf directem Wege gefundene Auflösung zu verwerfen und statt derselben eine andere zu suchen, welche entweder die Unbekannte selbst oder irgend eine Function derselben innerhalb gewisser Grenzen giebt. Ich habe es oben nicht vermeiden können, Beispiele der Art schon zu berühren. Da aber diese Untersuchungen zum Theil zu den scharfsinnigsten Partieen unsers Auctors gehören, so will ich noch mehre der Art hier umständlicher erörtern. Die einzelnen Kunstgriffe, die er dabei anwendet, haften aber zu sehr an der individuellen Beschaffenheit jedes einzelnen Falles, als daß sich bestimmte Regeln mit einigem Nutzen aufstellen ließen. Ich will mich daher begnügen, einzelne charakteristische Beispiele durchzuführen und, wenn es nöthig scheint, zu erläutern.

Ein sehr einfacher Fall dieser Methode ist der, wenn irgend eine Potenz x^n innerhalb vorgeschriebener Grenzen, zwischen zwei gegebenen Zahlen gesucht wird. Will man nämlich x so finden, daß x^n größer als a und kleiner als b ist, so multiplicire man a und b zuerst mit 2^n, dann mit 3^n und so fort, bis zwischen zwei solchen Producten sich irgend eine n^{te} Potenz findet; gesetzt nun, es liegt zwischen ap^n und bp^n die Zahl c^n, so wird der Forderung genügt, wenn man $x = \frac{c}{p}$ setzt; denn dann ist $x^n = \frac{c^n}{p^n}$; da nun $c^n > ap^n$, so ist $\frac{c^n}{p^n} > a$, und da $c^n < bp^n$, so ist $\frac{c^n}{p^n} < b$.

Digitized by

Sucht man z. B. ein Quadrat, welches zwiſchen 10 und 11 liegen ſoll, ſo multiplicire man 10 und 11 ſucceſſive mit 4, 9, 16 u. ſ. w. ſo lange, bis zwiſchen beide Producte eine Quadratzahl fällt; die Multiplication mit 4 und 9 giebt kein Reſultat, denn weder zwiſchen 40 und 44, noch zwiſchen 90 und 99 liegt eine Quadratzahl; dagegen giebt die Multiplication mit 16 die Grenzen 160 und 176 und zwiſchen beiden liegt die Quadratzahl 169; demnach liegt x^2 innerhalb der erforderten Grenzen, wenn wir es gleich $\frac{169}{16}$, alſo $x = \frac{13}{4}$ ſetzen. Von dieſem einfachſten Falle der Grenzmethoden finden ſich bei Diophant folgende Beiſpiele.

IV, 34. Man ſoll die Zahl 1 in zwei Stücke zerlegen und zu jedem Stücke eine gegebene Zahl addiren, und das Product der beiden Summen ſoll ein Quadrat ſein.

Die beiden gegebenen Zahlen ſeien 3 und 5. Das eine Stück ſei $x-3$, ſo iſt das andere $4-x$. Legt man zu dem erſten 3 hinzu, ſo erhält man x, legt man aber zu dem zweiten 5 hinzu, ſo erhält man $9-x$; demnach ſoll $9x-x^2$ ein Quadrat ſein. Es ſei gleich $4x^2$, ſo wird $x=\frac{9}{5}$. Wenn ich dieſen Werth in die obigen Ausdrücke ſubſtituiren will, ſo kann ich 3 von x nicht ſubtrahiren; x muß alſo größer als 3 und kleiner als 4 werden. Wir haben aber x gefunden, indem wir 9 durch 5 dividirten, und 5 iſt ein um 1 vermehrtes Quadrat; wenn nun 9 durch ein um 1 vermehrtes Quadrat dividirt einen Quotienten geben ſoll, welcher größer als 3 iſt, ſo muß der Diviſor kleiner als 3 ſein; es ſoll alſo ein um 1 vermehrtes Quadrat kleiner als 3, alſo das Quadrat kleiner als 2 ſein. Ferner ſoll aber der Quotient auch kleiner als 4 ſein; demnach muß der Diviſor größer als $2\frac{1}{4}$ ſein; aber der Diviſor iſt ein um 1 vermehrtes Quadrat; folglich muß das Quadrat größer ſein als $1\frac{1}{4}$; das Quadrat ſoll aber auch kleiner als 2 ſein. Ich muß alſo ein Quadrat ſuchen, welches größer als $1\frac{1}{4}$ und kleiner als 2 iſt. Ich verwandele beide Ausdrücke in Brüche mit quadratiſchem Nenner (ἀναλύω ταῦτα εἰς μόρια τετραγωνικά), z. B. 64; ſo werden ſie 80 und 128. Das erſte iſt leicht, und es iſt das Quadrat $\frac{100}{64}$ oder $\frac{25}{16}$. Nun komme ich zu der urſprünglichen Aufgabe; ich ſuchte $9x-x^2$ zu einem Quadrat zu machen; ich ſetze es gleich dem gefundenen, nämlich $\frac{25}{16}x^2$, ſo wird

Digitized by Google

$x = \frac{144}{41}$. — Um also ein Quadrat zu finden, das zwischen $\frac{5}{4}$ und 2 liegt, multiplicirt Diophant beide Ausdrücke mit 64; er wäre einfacher zu demselben Resultate gelangt, wenn er mit 16 multiplicirt hätte; er hätte die Grenzen 20 und 32 erhalten; da zwischen beiden die Quadratzahl 25 liegt, so ist $\frac{25}{16}$ ein Quadrat, welches größer als $\frac{5}{4}$ und kleiner als 2 ist. Hätte er mit 36 multiplicirt, so hätte er die Grenzen 45 und 72, und zwischen beiden die Quadratzahlen 49 und 64 gefunden; demnach konnte er $9x - x^2$ auch gleich $\frac{49}{36}x^2$ und gleich $\frac{64}{36}x^2$ oder $\frac{16}{9}x^2$ setzen. Die von ihm angeordnete Multiplication mit 64, welche die Grenzen 80 und 128 gab, gestattete außer $\frac{100}{64}$ auch die Werthe $\frac{81}{64}$ und $\frac{121}{64}$; man ersieht also, wie man unendlich viele Werthe für x finden kann, welche alle innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen liegen.

VI, 2. sucht Diophant einen Kubus, der zwischen den Grenzen 2 und 4 liegt; hier ergiebt sogleich die Multiplication mit $8 = 2^3$ ein erwünschtes Resultat; es liegt nämlich zwischen 16 nnd 32 die Kubikzahl 27, demnach ist $\frac{27}{8}$ ein zwischen 2 und 4 liegender Kubus. Die Multiplication mit 27 hätte die Grenzen 54 und 108 gegeben; da zwischen beiden die Kubikzahl 64 liegt, so wäre auch $\frac{64}{27}$ ein brauchbarer Kubus gewesen; ebenso $\frac{343}{125}$ u. s. w.

VI, 23. wird eine sechste Potenz, ein Kubokubus, gesucht zwischen den Grenzen 8 und 16. Nun sind die sechsten Potenzen der ersten natürlichen Zahlen 64, 729, 4096, 15625, 46656 u. s. w. Multiplicirt man also die Grenzen 8 und 16 mit 64, so erhält man 512 und 1024; da zwischen beiden 729 liegt, so ist $\frac{729}{64}$ ein der Forderung entsprechender Kubokubus. Die Multiplication mit 729 ergäbe dagegen kein Resultat; denn 8mal 729 ist 5832, 16mal 729 ist 11664 und zwischen beiden liegt keine sechste Potenz.

Ein complicirteres Beispiel habe ich oben schon gelegentlich erörtert. In der Aufgabe **IV**, 26. wurde nämlich verlangt, x so zu finden, daß $\frac{8}{x^2+x}$ größer als x und kleiner als $x+1$ werde. Da ich Diophants Verfahren dort weitläufig auseinandergesetzt habe, so will ich es hier nicht wiederholen, sondern zu einigen andern Beispielen dieser geistreichen Methode übergehen.

V, 33. Diese im Original in Versen ausgedrückte Aufgabe lautet nach Schulz's Übersetzung so:

Digitized by Google

Zweierlei Wein, acht Drachmen das Maaß, und ſchlechtern zu fünf nur
Miſchte der gütige Herr ſeinen Bedienten zum Feſt.
Was er als Preis für beides bezahlt, war eine Quadratzahl;
Legſt du zu dem Quadrat aber noch Sechzig hinzu,
Siehe ſo haſt du ein zweites Quadrat; nun merke, die Wurzel
Zeigt dir, wie viel Maaß jener im Ganzen gekauft.
Und nun ſage mir an, wie viel des beſſeren Weines,
Und wie viel zu fünf, wurde zuſammen gemiſcht?

Diophant's Auflöſung iſt wörtlich dieſe: „Der Sinn dieſes Epigramms iſt folgender. Es hat Jemand zwei Fäſſer Wein gekauft; von dem einen koſtet das Maaß 8 Drachmen, von dem andern 5 Drachmen. Der Preis, den er für alles zuſammen bezahlt hat, iſt eine Quadratzahl; und wenn man dazu 60 addirt, ſo wird das wieder eine Quadratzahl, deren Wurzel die Anzahl der Maaße angiebt. Wie viel war da zu acht, wie viel zu fünf Drachmen? — Die Anzahl der Maaße ſei x, ſo iſt der Preis x^2-60; und es ſoll x^2-60 eine Quadratzahl ſein; ihre Wurzel muß man gleich x weniger einer gewiſſen Zahl ſetzen. Aber x^2-60 iſt zuſammengeſetzt aus zwei Zahlen, dem Preiſe des Weins zu 8 Drachmen und dem Preiſe des Weins zu 5 Drachmen; und ein Fünftel des letztern iſt die Anzahl der Maaße zu 5 Drachmen, ein Achtel des erſtern die Anzahl der Maaße zu 8 Drachmen; und da die Anzahl der Maaße beider Arten x ſein ſoll, ſo kommt es darauf an, x^2-60 in zwei Zahlen zu zerlegen, ſo daß ein Fünftel der einen und ein Achtel der andern zuſammengenommen x ausmacht. Das iſt aber nicht anders möglich, als wenn x größer als ein Achtel von x^2-60 und kleiner als ein Fünftel von x^2-60 iſt; es wird alſo x^2-60 größer als $5x$ und kleiner als $8x$ ſein. Da nun x^2-60 größer als $5x$ ſein ſoll, ſo addire man auf beiden Seiten 60, ſo wird x^2 größer als $5x+60$, alſo x^2 größer als $5x$ plus einer Zahl, welche größer als 60 iſt; daher wird x größer oder wenigſtens nicht kleiner ſein müſſen als 11. Da ferner x^2-60 kleiner als $8x$ iſt, ſo addire man auf beiden Seiten 60, ſo wird x^2 gleich ſein $8x$ plus einer Zahl, welche kleiner als 60 iſt, woraus folgt, daß x nicht größer als 12 ſein müſſe. Es iſt aber gezeigt worden, daß es auch nicht kleiner als 11 ſein dürfe. Daher wird x größer als 11 und kleiner als 12 werden müſſen. Wenn wir aber x^2-60 zu einem Quadrate machen ſollen, ſo bilden wir die Wurzel dieſes Quadrats von x weniger einer gewiſſen Zahl, und

Digitized by Google

es entſteht x, wenn wir zu dem Quadrate einer Zahl 60 addiren, und die Summe durch das Doppelte derſelben Zahl dividiren. Wir müſſen alſo eine Zahl ſuchen, ſo daß, wenn man zu ihrem Quadrate 60 addirt und die Summe durch die doppelte Zahl dividirt, der Quotient größer als 11, aber kleiner als 12 wird. Nennen wir die geſuchte Zahl x, ſo ſoll $\frac{x^2+60}{2x}$ größer als 11 und kleiner als 12 werden. Zuerſt alſo ſoll $\frac{x^2+60}{2x} > 11$ werden, alſo $x^2+60 > 22x$; $22x$ iſt alſo gleich x^2 plus einer Zahl, welche kleiner iſt als 60; daher darf x nicht kleiner als 19 ſein. Ferner ſoll $\frac{x^2+60}{2x} < 12$, alſo $x^2+60 < 24x$ werden; daher iſt $24x$ gleich x^2 plus einer Zahl, welche größer als 60 iſt; folglich muß x kleiner als 21 ſein; es muß aber auch größer ſein als 19. Wenn wir alſo x^2-60 zu einem Quadrate machen, ſo müſſen wir die Wurzel dieſes Quadrats gleich $x-20$ ſetzen. Daraus ergiebt ſich $x = 11\frac{1}{2}$, x^2 alſo $= 132\frac{1}{4}$. Ziehe ich davon 60 ab, ſo bleibt $72\frac{1}{4}$ übrig. Wir müſſen alſo $72\frac{1}{4}$ in zwei Zahlen zerlegen, ſo daß ein Fünftel der erſten und ein Achtel der zweiten zuſammen $11\frac{1}{2}$ ausmachen. Ein Fünftel der erſten Zahl ſei x, ſo iſt ein Achtel der zweiten $11\frac{1}{2}-x$; die Zahlen ſelbſt alſo ſind $5x$ und $92-8x$, und ihre Summe ſoll $72\frac{1}{4}$ ſein; x wird alſo $= 7\frac{9}{12}$ werden. Demnach iſt die Anzahl der Maaße zu fünf Drachmen $7\frac{9}{12}$, die Anzahl der Maaße zu acht Drachmen $5\frac{7}{12}$, und das Übrige iſt klar."

Sehr geſchickt wählt Diophant die Anzahl der Maaße beider Sorten Wein als die durch x auszudrückende Unbekannte. Da der Geſammtpreis eine Quadratzahl ſein, und wenn man zu dieſer 60 addirt, das Quadrat der Anzahl Maaße, alſo x^2 herauskommen ſoll, ſo iſt der Geſammtpreis gleich x^2-60, und das ſoll Quadratzahl ſein. Sei nun die Anzahl der Maaße zu 8 Drachmen m, die Anzahl derer zu 5 Drachmen n, ſo iſt $m+n=x$, und $8m+5n=x^2-60$. Es iſt alſo $n=x-m$, $5n=5x-5m$, alſo $8m+5n=5x+3m=x^2-60$, alſo $x+\frac{3}{5}m=\frac{x^2-60}{5}$; da man alſo zu x noch etwas hinzulegen muß, damit es $=\frac{x^2-60}{5}$ werde, ſo muß $x < \frac{x^2-60}{5}$ ſein. Ferner iſt $m=x-n$, $8m = 8x-8n$, alſo $8m+5n = 8x-3n = x^2-60$, und $x-\frac{3}{8}n$

Digitized by Google

$= \frac{x^2-60}{8}$; folglich iſt $x > \frac{x^2-60}{8}$. Dieſe beiden Bedingungen geben Diophant die Grenzen für x. Da nämlich $x^2-60 > 5x$, oder $x^2-5x > 60$ ſein ſoll, ſo muß $x > \frac{5+\sqrt{265}}{2}$, oder $x > 10{,}6394$ ſein. Die zweite Bedingung $x^2-60 > 8x$ oder $x^2-8x > 60$, giebt $x > 4+\sqrt{76}$, oder $x > 12{,}7178$. Ich habe bei einer andern Gelegenheit darauf aufmerkſam gemacht, was es bedeute, wenn aus dieſen Reſultaten Diophant den Schluß zieht: alſo darf x nicht kleiner als 11 und nicht größer als 12 ſein. Wenn wir nun x^2-60 zu einem Quadrate machen ſollen, ſo ſetzen wir den Ausdruck $= (x-p)^2 = x^2-2px+p^2$; dann wird $x = \frac{p^2+60}{2p}$. Welchen Werth wir nun auch für p ſetzen, ſo wird x immer ſo beſchaffen ſein, daß x^2-60 ein Quadrat wird. Aber p muß hier ſo gewählt werden, daß x innerhalb der eben gefundenen Grenzen 11 und 12 liegt. Es darf alſo zuerſt $\frac{p^2+60}{2p}$ nicht kleiner als 11, alſo p^2+60 nicht kleiner als $22p$ werden; demnach p nicht kleiner als $11+\sqrt{61}$, das heißt, nicht kleiner als $18{,}81\cdots$, oder nach Diophant's Vorſtellung nicht kleiner als 19. Ferner darf aber auch $\frac{p^2+60}{2p}$ nicht größer als 12, alſo p^2+60 nicht größer als $24p$, folglich p nicht größer als $12+\sqrt{84}$, das heißt, nicht größer als $21{,}165\cdots$, oder nach Diophant nicht größer als 21 ſein. Wir werden alſo einen paſſenden Werth für x erhalten, wenn wir p innerhalb der gefundenen Grenzen, alſo etwa gleich 20 annehmen; da wir aber p auch gleich 19 und gleich 21 und gleich jedem Bruche innerhalb dieſer Grenzen annehmen können, ſo erhellt daraus, daß die Aufgabe unzählige Auflöſungen zuläßt. Setzen wir nun mit Diophant $p = 20$, ſo wird $x = \frac{400+60}{40} = \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2}$, und das iſt der Vorausſetzung gemäß die Anzahl der gekauften Maaße. Der dafür bezahlte Preis war aber x^2-60, das iſt alſo $\frac{529}{4}-50 = \frac{289}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4}$. Somit haben wir nur noch m und n aus den beiden Gleichungen $m+n = \frac{23}{2}$, $8m+5n = \frac{289}{4}$ zu beſtimmen. Diophant ſetzt nun

Digitized by Google

$n = x$, so wird $m = \frac{23}{2} - x$, also $8m + 5n = 92 - 3x$ und das ist gleich $\frac{289}{4}$, also $x = \frac{79}{12}$.

IV, 45. Drei Zahlen zu finden, so daß der Überschuß der größten über die mittlere zu dem Überschuß der mittlern über die kleinste ein gegebenes Verhältniß habe, außerdem aber je zwei zusammengenommen ein Quadrat zur Summe geben.

Die Auflösung dieser Aufgabe, in welcher fast alle bisher erwähnten Methoden sich gegenseitig die Hand bieten, gehört zu den schönsten, aber auch zu den schwierigsten, welche Diophant's Werk uns darbietet, weshalb ich sie in ihrem ganzen Umfange darstellen will.

Diophant nimmt an, daß der Überschuß der größten Zahl über die mittelste das Dreifache des Überschusses der mittelsten über die kleinste sein soll. Es soll also, wenn wir die drei gesuchten Zahlen in ihrer Reihenfolge von der größten zur kleinsten A, B, C nennen, $A - B = 3(B - C)$, außerdem aber sollen die drei Summen $A + B$, $B + C$, $A + C$ Quadrate sein. Nun setzt Diophant $B + C$ willkührlich gleich 4. Da $B > C$, so ist $B > 2$, $C < 2$; darum setzt er $B = 2 + x$, $C = 2 - x$, so ist $B - C = 2x$, also $A - B = 6x$, $A = 6x + B = 7x + 2$. Nun sollen auch noch $A + B$ und $A + C$ Quadrate sein; das führt auf die doppelte Gleichung $8x + 4 = y^2$, $6x + 4 = y_1^2$. Weil hier die bestimmten Zahlen Quadrate sind, so ist, sagt Diophant, die Auflösung ganz leicht. Es ist nämlich $y^2 - y_1^2 = 2x$. Damit man nun sowohl in dem Ausdruck für y^2 als für y_1^2 das Glied 4 erhalte, muß man $y + y_1 = \frac{1}{2}x$, $y - y_1 = 4$ setzen; dann wird $y = \frac{1}{4}x + 2$, $y_1 = \frac{1}{4}x - 2$; also $x = 112$. Nun war aber $C = 2 - x$, es würde also, da $x = 112$ ist, C negativ werden. Darum verwirft Diophant diese Auflösung, und sucht eine andere, welche x kleiner als 2 giebt. Ist aber $x < 2$, so ist $6x + 4$ kleiner als 16. Wenn wir also die drei Quadrate $8x + 4$, $6x + 4$ und 4 betrachten, so werden sie folgenden Bestimmungen unterliegen müssen: das mittlere, $6x + 4$, muß kleiner sein als 16, und damit die Differenzen der Zahlen A, B, C, aus denen sie entstanden sind, dieselben Verhältnisse behalten, müssen die Differenzen dieser drei Quadrate auch dieselben Verhältnisse zu einander behalten; nun ist die Differenz des größten und

mittlern $2x$, die Differenz des mittlern und kleinsten $6x$, also das Dreifache der Differenz der beiden größten. Demnach müssen wir zu dem Quadrate 4 zwei andere größere finden, so daß das mittlere kleiner als 16, und die Differenz der beiden größern ein Drittel von der Differenz der beiden kleinern ist.

Diophant setzt nun die Wurzel des zweiten Quadrats, welches die Form $6x+4$ haben soll, $m+2$, damit das Quadrat m^2+4m+4 größer als 4 werde. (Für m aber nimmt Diophant wieder dasselbe Zeichen, welches wir durch x ausdrückten.) Demnach ist die Differenz der beiden kleinern Quadrate m^2+4m, also ein Drittel davon $\frac{1}{3}m^2+\frac{4}{3}m$; folglich muß das größte Quadrat um $\frac{1}{3}m^2+\frac{4}{3}m$ größer sein als das mittlere; das mittlere aber ist m^2+4m+4, also das größte $\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m+4$, und dieser Ausdruck, oder wenn man ihn mit $\frac{9}{4}$ multiplicirt, $3m^2+12m+9$ soll Quadrat werden. Aber das mittlere Quadrat, nämlich m^2+4m+4 soll kleiner als 16, also seine Wurzel $m+2$ kleiner als 4 sein, demnach muß m kleiner als 2 sein. Setzt man nun $3m^2+12m+9 = (3-pm)^2 = 9-6pm+p^2m^2$, so wird $m=\frac{12+6p}{p^2-3}$, und dieser Ausdruck soll kleiner sein als 2. (Nachdem Diophant diese Formel im Kopfe ausgerechnet hat, setzt er p wieder $=x$; die Stelle lautet bei ihm so: *γέγονε οὖν μοι δ^ῦ γ̅·ςς^οὺς ιβ̅. μ^ο̅ θ̅ ἴσνς ποιῆσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τετράγωνόν τινα ἀπὸ μ^ο̅ γ̅ λειπόντων ςς^ούς τινας, καὶ γίνεται ὁ ς^ὸ ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου, καὶ προσλαβόντος τὸν ιβ̅, τουτέστι τῆς ἰσώσεως τοὺς ςς^οὺς ιβ̅. καὶ μερισθέντος εἰς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ς^οῦ τετράγονως τῶν δυνάμεων τῶν ἐν τῇ ἰσώσει τριῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τινὰ ς̏, ὃς ἑξάκις γενόμενος καὶ προσλαβὼν μ^ο̅ ιβ̅, μεριζόμενος εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τετράγωνος τριάδος, ποιεῖ τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μ^ο̅ β̅. ἔστω ὁ ζητούμενος ς^οῦ α̅.* etc.) Da also $\frac{12+6p}{p^2-3}$ kleiner als 2 sein soll, so muß $6p+12$ zu p^2-3 ein kleineres Verhältniß haben als 2 zu 1; die Producte der äußern und innern Glieder sind also einander ungleich, und es ist $6p+12$ kleiner als $2p^2-6$; und wenn man auf beiden Seiten 6 addirt, so ist $2p^2$ größer als $6p+18$. Die Art, wie Diophant diese Gleichung auflöst, haben wir gehörigen Orts näher beleuchtet, und es findet sich, daß p größer als

Digitized by Google

$\frac{3+\sqrt{45}}{2}$, also größer als 4, 854, oder wie Diophant sich immer ausdrückt, nicht kleiner als 5 sein darf. Setzen wir nun $p=5$, also $3m^2+12m+9=(3-5m)^2$, so wird $m=\frac{21}{11}$. Nun war die Wurzel des zweiten Quadrats $m+2$, also $=\frac{43}{11}$, das zweite Quadrat selbst also $\frac{1849}{121}$; dieses zweite Quadrat war aber auch $6x+4$; folglich haben wir $6x+4=\frac{1849}{121}$, also $x=\frac{1365}{726}=\frac{455}{242}$. Nun waren die drei Zahlen $7x+2$, $2+x$, $2-x$; sie sind also $\frac{3669}{242}$, $\frac{939}{242}$, $\frac{29}{242}$, oder wenn man gleich den Nenner quadratisch einrichten will, $\frac{7338}{484}$, $\frac{1878}{484}$, $\frac{58}{484}$.

Das einzige, was bei dieser Darstellung vielleicht dunkel geblieben ist, ist bei der Betrachtung der drei Quadrate $8x+4$, $6x+4$, 4 die Forderung, diese Quadrate so zu finden, daß der Überschuß des größten über das zweite ein Drittel des Überschusses des zweiten über das kleinste werden müsse, damit das Verhältniß der Überschüsse der ursprünglich gesuchten drei Zahlen A, B, C erhalten werde. Die Sache ist aber ganz einfach, wenn wir bedenken, daß nach der Annahme $A-B=3(B-C)$ sein sollte, nach der Entwickelung aber $8x+4=A+B$, $6x+4=A+C$, $4=B+C$ ist. Ist nun

$$A-B=3B-3C$$

so ist $A+B=5B-4C$

und $A+C=4B-2C$

da nun $B+C=B+C$

so ist $(A+B)-(A+C)=B-C$

$(A+C)-(B+C)=3B-3C$

folglich $(A+B)-(A+C)=\frac{1}{3}(A+C)-\frac{1}{5}(B+C)$.

Wird also die eine Bedingung erfüllt, so wird die andere zugleich mit erledigt. Es war also, um allen Bedingungen der Aufgabe zu genügen, weiter nichts nöthig, als das eine Quadrat 4, das andere kleiner als 16, aber in der Form $6x+4$, und das dritte um ein Drittel des Unterschiedes dieser beiden größer als das zweite zu machen.

V, 13. Die Zahl 1 in zwei Stücke zu zerlegen, so

Digitized by Google

daß, wenn man jedem Stücke eine andere gegebene Zahl addirt, die beiden Summen Quadrate werden.

Die beiden gegebenen Zahlen seien 2 und 6. Diese Aufgabe ist die einzige, in welcher Diophant sich einer geometrischen Betrachtung bedient. Man nehme, sagt er, eine Einheit AB, die der Aufgabe gemäß in C geschnitten ist; dann lege man dem Stücke AC zwei Einheiten AD und dem Stücke CB sechs Einheiten BE zu, so werden CD und CE Quadrate sein. Da nun AB eine Einheit, AD und BE zusammen aber acht Einheiten sind, so ist die ganze Linie DE gleich neun Einheiten. Man hat also die Zahl 9 in zwei Quadrate zu zerlegen; da aber eines dieser Quadrate, nämlich CD größer als AD, aber kleiner als BD ist, so stellt die Aufgabe sich so: die Quadratzahl 9 in zwei Quadrate zu zerlegen, so daß das eine zwischen 2 und 3 fällt. Ist auf diese Weise CD gefunden, so ist auch AC gegeben, da $AD=2$ gegeben ist; und wenn man AC von der Einheit AB abzieht, so hat man das andere Stück CB. Das eine Quadrat, welches zwischen 2 und 3 liegen soll, sei x^2, so ist das andere $9-x^2$. Dieser Ausdruck soll Quadrat sein. Das ist zwar leicht zu bewerkstelligen, aber man soll x so finden, daß x^2 zwischen 2 und 3 fällt. Wir nehmen zwei Quadrate, deren eines größer als 2, das andere kleiner als 3 ist, z. B. $\frac{289}{144}$ und $\frac{361}{144}$. Wenn wir nun x^2 so finden können, daß es zwischen diesen beiden Quadraten liegt, so haben wir die Aufgabe gelöst. Es muß also auch die Wurzel von x^2, nämlich x, größer als $1\frac{7}{12}$ und kleiner als $1\frac{9}{12}$ sein. Wollen wir aber $9-x^2$ zu einem Quadrate machen, so setzen wir die Wurzel dieses Quadrats gleich $3-mx$ (diese Operation ist bei Diophant auf die gewöhnliche Weise umschrieben), und finden $x=\frac{6m}{m^2+1}$. Dieser Ausdruck soll größer als $1\frac{7}{12}$ und kleiner als $1\frac{9}{12}$ sein. Es soll also zuerst $\frac{6m}{m^2+1}>1\frac{7}{12}$, also $72m>17m^2+17$ sein, demnach muß $m<\frac{36+\sqrt{1007}}{17}$, oder $m<\frac{67{,}73\cdots}{17}$, oder nach Diophant's Weise m nicht größer als $6\frac{7}{17}$ sein. Ferner soll $\frac{6m}{m^2+1}<1\frac{9}{12}$, also $72m<19m^2+19$ sein, folglich muß $m>\frac{36+\sqrt{935}}{19}$, oder $>\frac{67{,}57\cdots}{19}$, oder

Digitized by Google

oder nicht kleiner als $\frac{6}{17}\frac{8}{9}$ sein. Nun ist $\frac{6}{17}\frac{7}{7} = 3\frac{1}{17}\frac{6}{7}$, $\frac{6}{17}\frac{6}{9} = 3\frac{9}{17}$; daher nimmt Diophant für m den zwischen beiden Grenzen liegenden liegenden Werth $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, dann wird $x = \frac{84}{53}$, woraus sich die gesuchten Stücke, in welche 1 zu theilen war, leicht ergeben.

Ich will dieser Auflösung nur die Bemerkung hinzufügen, daß das Verfahren, zwei Quadrate wie $\frac{289}{144}$ und $\frac{361}{144}$ zu finden, die zwischen den gegebenen Grenzen 2 und 3 liegen, ganz dasselbe ist, welches ich oben für ein Quadrat angegeben habe. Man multiplicirt die beiden Zahlen 2 und 3 so lange mit der Reihe der Quadratzahlen, bis zwischen zwei solcher zusammengehöriger Producte zwei Quadratzahlen fallen. Die folgende Tabelle wird zeigen, daß Diophant seine Grenzen für x in viel kleinern Zahlen hätte finden können.

n^2	$2n^2$	$3n^2$	Dazwischen liegende Quadrate.			
36	72	108	81,	100		
49	98	147	100,	121,	144	
64	128	192	144,	169		
81	162	243	169,	196,	225	
100	200	300	225,	256,	289	
121	242	363	256,	289,	324,	361
144	288	432	289,	324,	361,	400

Selbst wenn er, wie es scheint, solche Quadrate suchte, die bei gemeinschaftlichen Nennern in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, so hätte die zweite Reihe ihm die viel kleinern und den beiden Grenzen ziemlich nahe liegenden Quadrate $\frac{100}{49}$ und $\frac{144}{49}$ geboten, so daß er also x zwischen $\frac{10}{7}$ und $\frac{12}{7}$ hätte zu suchen gehabt, wodurch überdieß die Grenzen für x etwas weiter geworden wären.

Von ganz besonderem Interesse aber ist in dieser Methode der Grenzen eine Operation, welche Diophant παρισότης oder παρισότητος ἀγωγή, **Methode der Beinahegleichheit**, nennt, und die zum Zweck hat, zwei oder drei Quadrate zu finden, deren Summe einer gegebenen Zahl gleich ist, und die alle einer und derselben Zahl, also auch einander möglichst nahe liegen. Ich will diese höchst sinn-

reiche Methode an den beiden auch noch in anderer Beziehung interessanten Beispielen, in denen wir sie dargestellt finden, nämlich V, 12. 14., entwickeln.

V, 12. Die Zahl 1 in zwei Stücke zu zerlegen, so daß, wenn man zu jedem Stücke dieselbe gegebene Zahl addirt, beide Summen Quadrate werden.

Ich übergehe bei dieser, wie bei der folgenden Aufgabe die Determination, von der ich bei einer andern Gelegenheit sprechen werde, und stelle gleich Diophant's Auflösung dar.

Die gegebene Zahl sei 6; nennen wir nun vorläufig die beiden Theile der Zahl 1 A und B, so sollen $A+6$ und $B+6$ Quadrate werden. Sei $A+6=m^2$, $B+6=n^2$, so ist ihre Summe $A+B+12$, das ist, da $A+B=1$ ist, $13=m^2+n^2$. Es kommt also darauf hinaus, die Zahl 13, welche die Summe der Quadrate 9 und 4 ist, in zwei andere Quadrate m^2 und n^2 zu zerlegen, deren jedes größer als 6 ist, damit nämlich $A=m^2-6$ $B=n^2-6$ positiv werden. Wenn ich also, sagt Diophant, die Zahl 13 in zwei Quadrate zerlege, deren Differenz kleiner als 1 ist, so habe ich die Aufgabe gelöst. Nun schlägt Diophant folgenden eigenthümlichen Weg ein. Er nimmt die Hälfte von 13, nämlich $6\frac{1}{2}$, und untersucht, welchen quadratischen Bruch man zu $6\frac{1}{2}$ addiren müsse, damit die Summe ein Quadrat werde. Es ist also die Gleichung $6\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}$, oder $26+\frac{4}{x^2}$, oder $26x_1^2+1$ zu einem Quadrate zu machen ($x_1=\frac{1}{2}x$ gesetzt). Diophant setzt $26x_1^2+1=(5x_1+1)^2$ und findet $x_1=10$, also $x=20$; demnach wird $\frac{13}{2}+\frac{1}{400}=\frac{2601}{400}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$. Die Annahme des $5x_1+1$ war aber nicht willkührlich, sondern der Coefficient von x_1 mußte so genommen werden, daß $\frac{1}{x_1}$ ein ächter und wo möglich kleiner Bruch wurde. Hätten wir also $26x_1^2+1$ allgemein $=(px_1+1)^2=p^2x_1^2+2px_1+1$ gesetzt, so hätten wir $x_1=\frac{2p}{26-p^2}$ gefunden. Es mußte also $26-p^2<2p$, oder $p^2+2p>26$, also $p>-1+\sqrt{27}$; demnach ist in ganzen Zahlen 5 der kleinste Werth, den p haben konnte. Da wir nun das Quadrat $\frac{2601}{400}$ gefunden haben, welches nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als $6\frac{1}{2}$, so kommt es darauf an,

Digitized by Google

13 in zwei Quadrate zu zerlegen, deren jedes dem Quadrate $\frac{2601}{400}$ möglichſt nahe kommt; folglich werden die Wurzeln der geſuchten Quadrate der Wurzel des gefundenen, $\frac{51}{20}$, möglichſt nahe kommen müſſen. Nun ſind die Wurzeln der beiden Quadrate, aus welchen 13 von Natur zuſammengeſetzt iſt, 2 und 3; und zwar iſt 2 um $\frac{11}{20}$ kleiner und 3 um $\frac{9}{20}$ größer als $\frac{51}{20}$. Wollte man nun die Wurzel des einen geſuchteu Quadrats $2+\frac{11}{20}$, die des andern $3-\frac{9}{20}$ ſetzen, ſo würde die Summe ihrer Quadrate genau $\frac{2\cdot 2601}{400}$, alſo um $\frac{1}{2\,0\,0}$ größer als 13 wurden. Darum ſetzt Diophant die Wurzel des einen Quadrats $2+11x$, die des zweiten $3-9x$, wo x begreiflicher Weiſe einen Werth haben wird, der nicht genau $\frac{1}{2\,0}$ iſt, aber dieſem Bruche nahe kommt. Nun ſetzt er die Summe der Quadrate dieſer beiden Ausdrücke gleich 13, woraus ſich der Werth für x ergiebt. Es iſt nämlich $(2+11x)^2 = 4+44x+121x^2$, $(3-9x)^2 = 9-54x+81x^2$, alſo ihre Summe $13-10x+202x^2 = 13$, alſo $x = \frac{5}{101}$. Demnach ſind die Wurzeln der beiden Quadrate, in welche man 13 zu theilen hatte, $\frac{257}{101}$ und $\frac{258}{101}$, ihre Quadrate $\frac{66049}{10201}$ und $\frac{66564}{10201}$, und wenn man von jedem derſelben 6 ſubtrahirt, ſo erhält man die beiden Theile, in welche die Einheit getheilt werden ſollte, nämlich $\frac{4843}{10201}$ und $\frac{5358}{10201}$.

Ich glaube in dieſer Darſtellung die Methode von jeder Undeutlichkeit befreit zu haben. Bei Diophant, der ſich hier wider ſeine Gewohnheit an manchen Stellen ungebührlich kurz faßt, iſt Manches nicht ganz einſichtlich dargeſtellt; ſo ſcheint mir die Annahme von $2+11x$ und $3-9x$ für die Wurzeln der beiden Quadrate bei ihm nicht hinlänglich motivirt zu ſein. Er ſagt nämlich, nachdem er das zu $\frac{13}{2}$ zu addirende Quadrat $\frac{2601}{400} = \left(\frac{51}{20}\right)^2$ gefunden hat, ganz kurz: „Wenn man alſo 13 in zwei Quadrate zerlegen will, ſo muß man die Wurzel eines jeden möglichſt nahe an $\frac{51}{20}$ nehmen; und ich ſuche, was von 3 ſubtrahirt und zu 2 addirt dieſe Zahl, nämlich $\frac{51}{20}$, giebt. Daher ſetze ich die Wurzel des ei-

Digitized by

nen Quadrats $11x+2$, die des andern $3-9x$, so ist die Summe ihrer Quadrate u. s. w." Dieser Auflösung ganz ähnlich ist

V, 14. Die Zahl 1 in drei Stücke zu zerlegen, so daß, wenn man zu jedem Stücke dieselbe gegebene Zahl addirt, die drei Summen Quadrate werden.

Die gegebene, zu jedem der Stücke zu addirende Zahl sei 3. Nennen wir nun wieder die drei Stücke A, B, C, so soll $A+3=m^2$, $B+3=n^2$, $C+3=p^2$, also ihre Summe $A+B+C+9=m^2+n^2+p^2$ sein; aber $A+B+C$ ist $=1$, also $10=m^2+n^2+p^2$. Demnach soll man die Zahl 10 in drei Quadrate zerlegen, so jedoch, daß jedes größer als 3 wird, damit die drei gesuchten Zahlen A, B, C positiv ausfallen können. Wir nehmen von 10 ein Drittel, das ist $3\frac{1}{3}$, und untersuchen, welchen quadratischen Bruch wir zu $3\frac{1}{3}$ addiren müssen, damit die Summe ein Quadrat werde. Wir nehmen Alles neunfach, und suchen, welchen quadratischen Bruch wir zu 30 addiren müssen, damit die Summe ein Quadrat werde. Der Bruch sei $\frac{1}{x^2}$, so soll $30+\frac{1}{x^2}$, oder $30x^2+1$ ein Quadrat werden. Diophant setzt $30x^2+1=(5x+1)^2$, und findet $x=2$, also $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$. Wenn man also zu 30 den Bruch $\frac{1}{4}$ zu addiren hat, so hat man zu $3\frac{1}{3}$ den Bruch $\frac{1}{3\,6}$ zu addiren, und die Summe giebt das Quadrat $\frac{121}{36}$, dessen Wurzel $\frac{11}{6}$ ist. Aber 10 besteht aus den beiden Quadraten 9 und 1, 1 aber aus den Quadraten $\frac{16}{25}$ und $\frac{9}{25}$, demnach ist 10 zusammengesetzt aus den Quadraten 9, $\frac{16}{25}$ und $\frac{9}{25}$, deren Wurzeln 3, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ sind. Nun muß man die Wurzeln der gesuchten drei Quadrate der Zahl $\frac{11}{6}$ nahe zu bringen suchen. Diophant bringt also diese Zahlen auf den gleichen Nenner 30, so sind die drei Wurzeln $\frac{90}{30}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{18}{30}$, und $\frac{11}{6}$ wird $\frac{55}{30}$. Nun ist 3 oder $\frac{90}{30}$ um $\frac{35}{30}$ größer, dagegen $\frac{24}{30}$ um $\frac{31}{30}$, und $\frac{18}{30}$ um $\frac{37}{30}$ kleiner als $\frac{55}{30}$. Wollte man also die Wurzeln der drei gesuchten Quadrate $3-\frac{35}{30}$, $\frac{4}{5}+\frac{31}{30}$, $\frac{3}{5}+\frac{37}{30}$ setzen, so würde jedes dieser Quadrate genau $\frac{121}{36}$, ihre

Digitized by Google

Summe also $\frac{363}{36}$, also um $\frac{1}{12}$ größer als 10 werden. Darum setzt Diophant wieder, wie vorher statt des Nenners 30 das Symbol x, und bildet die drei Wurzeln $3-35x$, $\frac{4}{5}+31x$, $\frac{3}{5}+37x$, wo x also nicht genau, aber beinahe $\frac{1}{350}$ sein wird, und setzt nun wieder die Summe der drei Quadrate gleich 10; diese Summe ist aber $10-116x+3555=10$, woraus $x=\frac{116}{3555}$ gefunden wird, also um $\frac{1}{1842}$ kleiner als $\frac{1}{350}$. Die Wurzeln der drei Quadrate sind demnach $\frac{1321}{711}$, $\frac{1288}{711}$, $\frac{1285}{711}$, also die Quadrate $\frac{1745041}{505521}$, $\frac{1658944}{505521}$, $\frac{1651225}{505521}$. Zieht man von jedem dieser Quadrate 3 ab, so erhält man die drei gesuchten Stücke der Einheit, nämlich 228478, 142381, 134662, alle drei dividirt durch 505521. Diophant bricht übrigens seine Rechnung ab, nachdem er den Werth für x gefunden hat.

Bei dieser Aufgabe, wie bei der vorigen kommt es darauf an, daß, wenn wir $30x^2+1$ zu einem Quadrat machen, x größer als 1 gefunden werde. Setzen wir nun $30x^2+1=(px+1)^2$, so wird $x=\frac{2p}{30-p^2}$. Es muß also $2p>30-p^2$, also $p^2+2p>30$, demnach $p>-1+\sqrt{31}$ werden. Demnach ist auch hier 5 die kleinste ganze Zahl, welche für p gesetzt werden darf, nicht aber, wie Schulz in den Anmerkungen zu V, 12. sagt, zugleich die größte. Denn da von x nur das Quadrat gebraucht wird, so ist es von keinem Belange, wenn der Werth für x negativ ausfällt, und es wäre in dem Falle nur $(px-1)^2$ statt $(px+1)^2$ zu denken, und Diophant hätte sicher auch $30x^2+1=(px-1)^2$ gesetzt, wenn er Grund gehabt hätte, mit dem Werthe $p=5$ unzufrieden zu sein.

Bei der Aufgabe V, 16. 17. führt Diophant die Auflösung auch auf die eben erörterte Operation der παρισότης zurück, begnügt sich aber damit, bloß den Gang des Verfahrens anzudeuten und die Ausführung, als aus den vorhergehenden Aufgaben bekannt, dem Leser zu überlassen.

5. Auflösung durch bloße Reflexion.

Es finden sich in Diophant's Werk einige Aufgaben, welche ohne alle Rechnung durch bloße Betrachtung und Benutzung der sich

Digitized by

gestaltenden Verhältnisse gelöst werden. Ganz rein indeß erscheint diese Methode nur in zwei einander sehr ähnlichen Beispielen IV, 31. 32., in welchen sie auf eine einfache und überraschende Weise zum Resultate führt. Außerdem werden mit Hilfe der Reflexion häufig Aufgaben auf früher gelöste, oder auch auf in frühern Aufgaben gelehrte Methoden zurückgeführt. Beide Anwendungen dieser sinnreichen Auflösungsart will ich durch Beispiele belegen.

IV, 31. Vier Quadratzahlen zu finden, so daß ihre Summe zu der Summe ihrer Wurzeln addirt eine gegebene Zahl giebt.

Die Auflösung lautet wörtlich so: „Die gegebene Zahl sei 12. Da, wenn man zu der Summe eines Quadrats und seiner Wurzel $\frac{1}{4}$ addirt, ein Quadrat herauskommt, dessen Wurzel, wenn man $\frac{1}{2}$ davon subtrahirt, die Wurzel des ursprünglichen Quadrats giebt; da ferner die vier Zahlen zu ihren Quadratwurzeln addirt gleich 12, und wenn man noch die vier Viertel addirt, 12 und $\frac{4}{4}$, das ist 13 geben: so muß man die Zahl 13 in vier Quadrate zerlegen. Wenn ich dann von der Wurzel eines jeden $\frac{1}{2}$ subtrahire, so habe ich die Wurzeln der gesuchten vier Quadrate. Die Zahl 13 besteht nun aber aus den beiden Quadraten 4 und 9; jedes von diesen läßt sich wieder in zwei Quadrate zerlegen, nämlich in $\frac{64}{25}$, $\frac{36}{25}$, $\frac{144}{25}$ und $\frac{81}{25}$. Wenn ich nun die Wurzel eines jeden, nämlich $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{9}{5}$ nehme, und von jeder $\frac{1}{2}$ subtrahire, so erhalte ich als die Wurzeln der gesuchten vier Quadrate $\frac{11}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{10}$, $\frac{13}{10}$; die Quadrate selbst also sind $\frac{121}{10}$, $\frac{49}{100}$, $\frac{361}{100}$, $\frac{169}{100}$."

Die Sache ist also, in Gleichungen dargestellt, ganz einfach folgende:

$$(w^2+w)+(x^2+x)+(y^2+y)+(z^2+z)=12$$

also

$$(w^2+w+\tfrac{1}{4})+(x^2+x+\tfrac{1}{4})+(y^2+y+\tfrac{1}{4})+(z^2+z+\tfrac{1}{4})=13$$

$$(w+\tfrac{1}{2})^2+(x+\tfrac{1}{2})^2+(y+\tfrac{1}{2})^2+(z+\tfrac{1}{2})^2=13.$$

Zerlegt man nun 13 in vier Quadrate, z. B. $\frac{64}{25}$, $\frac{36}{25}$, $\frac{144}{25}$, $\frac{81}{25}$, und setzt $(w+\frac{1}{2})^2=\frac{64}{25}$, $(x+\frac{1}{2})^2=\frac{36}{25}$, $(y+\frac{1}{2})^2=\frac{144}{25}$, $(z+\frac{1}{2})^2$

Digitized by Google

$= \frac{81}{25}$, so wird $w = \frac{8}{5} - \frac{1}{2} = \frac{11}{10}$, $x = \frac{6}{5} - \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$, $y = \frac{12}{5} - \frac{1}{2}$ $= \frac{19}{10}$, $z = \frac{9}{5} - \frac{1}{2} = \frac{13}{10}$. Ebenso ist die folgende Aufgabe gelöst.

IV, 32. Vier Quadratzahlen zu finden, so daß ihre Summe um die Summe ihrer Wurzeln vermindert eine gegebene Zahl giebt.

Diophant nimmt an, die gegebene Zahl sei 4. Da $w^2 - w + \frac{1}{4}$ ebenso wie $w^2 + w + \frac{1}{4}$ ein Quadrat ist, so hat man wiederum nur die um 1 vermehrte gegebene Zahl in vier Quadrate zu zerlegen, dann aber zu der Wurzel eines jeden $\frac{1}{2}$ zu addiren; so erhält man die Wurzeln der vier gesuchten Quadrate. Diophant wählt in beiden Aufgaben die gegebene Zahl so, daß die um 1 größere, welche in vier Quadrate zerlegt werden soll, zuerst in zwei Quadrate zerlegbar ist. Da das aber nicht nöthig ist, weil jede Zahl ohne Ausnahme sich als die Summe von vier Quadraten darstellen läßt, so sind beide Aufgaben für jede gegebene Zahl ohne Ausnahme möglich. Ferner ist für die zweite Aufgabe jede beliebige Zerlegung der um 1 vermehrten gegebenen Zahl zulässig; bei der ersten Aufgabe dagegen hat man darauf zu achten, daß keins der Quadrate, in welche die Zahl zerlegt wird, kleiner als $\frac{1}{4}$ werde, weil man von der Wurzel $\frac{1}{2}$ abziehen soll.

Die übrigen Beispiele, welche durch bloßes Raisonnement aufgelöst sind, sind nicht so vollständig durchgeführt, als die beiden vorliegenden. Indem Diophant die Auflösung einer Aufgabe entweder auf eine schon erklärte Aufgabe, oder auf eine bekannte Operation zurückführt, bricht er entweder hier ganz ab, oder er setzt mit Zahlen, welche durch die erwähnte Operation gefunden werden können, die Auflösung weiter fort. Ein Beispiel der zweiten Art ist

III, 16. Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat ist, und von denen je zwei zusammen genommen die dritte um ein Quadrat übertreffen.

Ich suche zuerst drei Quadratzahlen, deren Summe ein Quadrat ist. Wenn ich aber die beiden Quadrate 4 und 9 addire, und nun suche, welche Quadratzahl zu 13 addirt ein Quadrat giebt, so finde ich 36. So sind diese drei Quadratzahlen zusammen auch eine Quadratzahl. Nun bin ich dahin geführt, drei Zahlen zu suchen, von denen je zwei die dritte um eine gegebene Zahl übertreffen, und zwar die Summe der ersten und zweiten die dritte um 4,

Digitized by

die Summe der zweiten und dritten die erste um 9, die Summe der dritten und ersten die zweite um 36. Das ist aber schon gelehrt worden (nämlich in der Aufgabe I, 18.), und die erste Zahl ist 20, die zweite $6\frac{1}{4}$, die dritte $22\frac{1}{4}$.

Wir haben diese Auflösung schon einmal in einer andern Beziehung und mit einer andern Auflösung betrachtet. Ist nämlich

$$A+B+C=a^2$$
$$A+B-C=b^2$$
$$A-B+C=c^2$$
$$-A+B+C=d^2$$

so folgt aus den drei letzten Gleichungen $A+B+C=b^2+c^2+d^2$; folglich muß $b^2+c^2+d^2=a^2$ sein. Indem Diophant also zuerst drei Quadratzahlen, b^2, c^2, d^2 sucht, deren Summe eine Quadratzahl, a^2, ist, verwandelt er die Auflösung seiner Aufgabe in die der bestimmten Aufabe: drei Zahlen zu finden, von denen der Überschuß der Summe je zweier über die dritte gegeben ist. Diese Aufgabe ist ganz leicht; man darf nämlich nur, um die einzelnen Zahlen A, B, C zu finden, von den drei letzten Gleichungen je zwei zu addiren, so wird $A=\frac{b^2+c^2}{2}$, $B=\frac{b^2+d^2}{2}$, $C=\frac{c^2+d^2}{2}$. Diese Auflösung beruht auf den früheren Aufgaben II, 11. und I, 18.

Einige hübsche Beispiele der zweiten Art, in denen die Auflösung zwar nicht ganz durchgeführt, aber der Gang der Rechnung vollständig und klar angegeben wird, bietet uns das fünfte Buch in den Aufgaben 15. 16. 17. 23. 27. 28. 29. Ich will von diesen einige ganz verschiedenartige auswählen.

V, 17. Eine gegebene Zahl in vier Zahlen zu theilen, so daß die Summe von je dreien eine Quadratzahl wird.

„Die gegebene Zahl sei 10. Da nun die drei ersten eine Quadratzahl machen, und ebenso die drei folgenden von der zweiten an, ferner die drei folgenden von der dritten, und ebenso die drei folgenden von der vierten an, so machen die vier Zahlen dreimal genommen vier Quadrate aus. Aber die vier Zahlen dreimal genommen machen 30. Ich muß also 30 in vier Quadrate zerlegen, so daß jedes kleiner als 10 ist. Das läßt sich so machen: wenn ich durch die Methode der Beinahegleichheit jedes Quadrat dem Werthe von $7\frac{1}{2}$ nähere, und dann jedes von 10 abziehe, so finde

Digitized by Google

ich die gesuchten Zahlen. Wenn ich aber bedenke, daß 30 zusammengesetzt ist aus den Quadraten 16, 9, 4, 1, so nehmen wir 9 und 4 als zwei der gesuchten an, da beide kleiner als 10 sind. Es bleibt dann noch übrig, die Zahl 17 in zwei Quadrate zu theilen, so daß jedes kleiner als 10 ist. Wenn ich aber 17, wie ich früher gelehrt habe, in zwei Quadrate theile, so daß eines von ihnen größer als $8\frac{1}{2}$ und kleiner als 10 ist, so werden beide kleiner als 10 sein. Wenn wir dann jedes der beiden Quadrate von 10 abziehen, so finden wir die beiden übrigen gesuchten Zahlen; zwei nämlich, 6 und 1, hatten wir schon gefunden; und so ist die Aufgabe gelöst."

Diophant giebt hier also zwei Wege an, auf denen die Zahl 30 in vier Quadrate zerlegt werden kann; der eine ist die Anwendung der V, 12. gelehrten Methode der Beinahegleichung, der zweite die V, 13. auseinandergesetzte Methode, eine Zahl in zwei Quadrate zu theilen, die innerhalb gewisser Grenzen liegen. Setzt man $4-x$ als die Wurzel eines dieser Quadrate, so ist das andere Quadrat $17-(4-x)^2 = 1+8x-x^2$. Dieser Ausdruck soll Quadrat werden, was an und für sich leicht ist, wenn man ihn $=(mx-1)^2$ setzt; aber beide Quadrate, in welche 17 getheilt, wird, sollen innerhalb der Grenzen $\frac{17}{2}$ und 10 liegen. Die daraus entstehende Bedingungsgleichung für m zeigt, daß 4 die einzige ganze Zahl ist, welche für m gesetzt werden darf. Setzt man nun $1+8x-x^2 = (4x-1)^2$, so wird $x = \frac{16}{17}$, also $4x-1 = \frac{47}{17}$, $4-x = \frac{52}{17}$, die Quadrate dieser Wurzeln sind $\frac{2209}{289}$ und $\frac{2704}{289}$, also, wenn man dieselben von 10 subtrahirt, sind die beiden noch übrigen gesuchten Zahlen $\frac{681}{289}$ und $\frac{186}{289}$.

V, 23. **Einen gegebenen Bruch in drei andere Brüche zu zerlegen, so daß diese Quadrate werden, wenn man den Kubus der Summe davon abzieht.**

„Der gegebene Bruch sei $\frac{1}{4}$, und man soll $\frac{1}{4}$ in drei Brüche theilen, so wie die Aufgabe besagt. Daher wird jeder von ihnen, wenn man $\frac{1}{64}$ davon abzieht, ein Quadrat werden müssen. Wenn man also von der Summe aller drei $\frac{3}{64}$ abzieht, so wird man drei Quadrate erhalten. Wenn man dann zu jedem dieser Quadrate $\frac{1}{64}$ addirt, so hat man die gesuchten Brüche. Das ist aber ganz

Digitized by Google

leicht; denn es kommt darauf hinaus, den Bruch $\frac{3}{64}$ in drei Quadrate zu zerlegen, was ganz leicht ist."

Nennt man die drei Brüche x, y, z, so ist $x+y+z=\frac{1}{4}$, und es soll $x-\frac{1}{64}=m^2$, $y-\frac{1}{64}=n^2$, $z-\frac{1}{64}=p^2$, also $x+y+z-\frac{3}{64}=m^2+n^2+p^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{64}=\frac{13}{64}$ sein. Nennt man also den gegebenen Bruch $\frac{1}{a}$, so kommt es darauf an, $\frac{1}{a}-\frac{3}{a^3}$ oder $\frac{a^2-3}{a^3}$ in drei Quadrate zu zerlegen. Ob das immer möglich ist, werden wir in dem folgenden Kapitel untersuchen.

In den einander ähnlichen Aufgaben V, 27—29. begnügt Diophant sich bloß zu sagen, wie jede dieser Aufgaben auf eine der drei unmittelbar vorher dagewesenen zurückzuführen sei; z. B. 27.

Drei Quadratzahlen zu finden, so daß das Product von je zweien ein Quadrat bleibt, wenn man 1 dazu addirt.

„Da ich verlange, daß das Product der ersten und zweiten, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat wird, so wird, wenn ich alles mit der dritten, die auch Quadratzahl ist, multiplicire, das Product aller drei zu der dritten addirt ein Quadrat sein müssen; wie auch, wenn man dieses Product zu der ersten und zu der zweiten addirt. Diese Aufgaben haben wir aber schon gezeigt; darum lösen die dort gefundenen Zahlen auch diese Aufgabe.

Es dürfte hier der rechte Ort sein, über eine bedeutende Lücke einige Worte zu sprechen, auf welche wir durch die Zurückführung einer Aufgabe auf eine vorgeblich schon gelöste aufmerksam gemacht werden. Wir lesen nämlich V, 22. folgende Aufgabe und Auflösung.

Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat ist, so daß der Kubus ihrer Summe, wenn man jede der drei Zahlen davon abzieht, ein Quadrat zum Rest läßt.

„Und hier haben wir wieder die Zahl 2 wie vorher zu zerlegen. Auch ist der Kubus von 2 gleich 8. (Im Texte steht: καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τοῦ δευτέρου ηοῦ κῦ μονάδας η̄.) Es sollen also, wenn man jede der Zahlen von 8 abzieht, Quadrate übrig bleiben. Daher muß man die Zahl 22 in drei Quadrate zerlegen, deren jedes größer als 6 ist. Wenn wir dann jedes von diesen von 8 abziehen, so finden wir die drei gesuchten Zahlen. Es ist aber früher gezeigt worden, wie man 26 (muß 22 heißen) in drei Quadrate zerlegen müsse, so daß jedes von ihnen größer als 6 wird."

Digitized by Google

Zuerſt iſt zu bemerken, daß die hier etwas dunkel, aber doch verſtändlich angedeutete Auflöſung nicht zu der Aufgabe paßt; die Auflöſung ſetzt nämlich, unter Beibehaltung der drei letzten Bedingungen, als erſte voraus, daß die Summe der drei Zahlen einer gegebenen Zahl 2 gleich, nicht, wie es in der Aufgabe heißt, daß die Summe eine Quadratzahl ſei. Daher haben auch Bachet und Schulz in ihren Überſetzungen die Worte der Aufgabe demgemäß geändert, wenngleich der erſtere, was zu loben iſt, den Griechiſchen Text ſo gegeben hat, wie er ihn gefunden.

Zweitens aber iſt keine Aufgabe vorhergegangen, auf welche ſich die erſten Worte der Auflöſung beziehen könnten, welche im Texte heißen: καὶ γίνεται ἡμῖν πάλιν τὸν $\overline{\beta}$ διελεῖν ὡς καὶ πρότερον. Vergleichen wir aber dieſe Aufgabe mit der vorhergehenden und nachfolgenden, ſo zeigt ſich, daß die vorhergehende 21. der in den Worten des Griechiſchen Textes und in meiner Überſetzung ausgedrückten, dagegen die folgende 23. der in der Auflöſung vorausgeſetzten ganz analog iſt. Die Aufgabe 21. ſagt nämlich:

Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat iſt, ſo daß der Kubus der Summe, wenn man jede der Zahlen dazu addirt, ein Quadrat giebt.

Dagegen lautet die Aufgabe 23., die wir ſchon oben erwähnt haben, folgendermaßen:

Einen gegebenen Bruch in drei andere Brüche zu zerlegen, ſo daß jeder derſelben, wenn man den Kubus der Summe davon abzieht, ein Quadrat wird.

Dieſe Erſcheinung macht es wahrſcheinlich, daß der Raum von der 21. bis zu der 23. Aufgabe, der jetzt von drei Aufgaben ausgefüllt wird, von denen die mittlere aus zweien zuſammengefloſſen iſt, urſprünglich ſechs Aufgaben umfaßt habe. Nennen wir nämlich die drei geſuchten Zahlen x, y, z, die Summe derſelben, wenn ſie Quadratzahl ſein ſoll, q^2, wenn ſie einer gegebenen Zahl gleich ſein ſoll, a, ſo wird die Verſtümmelung des Textes vollkommen klar werden, wenn wir folgende ſechs Aufgaben zuſammenſtellen und betrachten.

1. $x+y+z=q^2$, $q^6+x=m^2$, $q^6+y=n^2$, $q^6+z=p^2$.
2. $x+y+z=q^2$, $q^6-x=m^2$, $q^6-y=n^2$, $q^6-z=p^2$.
3. $x+y+z=q^2$, $x-q^6=m^2$, $y-q^6=n^2$, $z-q^6=p^2$.
4. $x+y+z=a$, $a^3+x=m^2$, $a^3+y=n^2$, $a^3+z=p^2$.

Digitized by Google

5. $x+y+z=a$, $a^3-x=m^2$, $a^3-y=n^2$, $a^3-z=p^2$.
6. $x+y+z=a$, $x-a^3=m^2$, $y-a^3=n^2$, $z-a^3=p^2$.

Die erſte dieſer Aufgaben iſt vollſtändig ausgeſprochen und gelöſt in der Aufgabe 21., die ſechſte ebenſo in der Aufgabe 23. Die zweite iſt ausgeſprochen in den Worten der Aufgabe 22., aber durch ein Verſehen des Abſchreibers iſt mit Überſpringung eines Stücks des Textes ſtatt ihrer eigenen die Auflöſung der fünften beigefügt worden. Uns fehlt alſo das Stück von der Auflöſung der zweiten bis zu den Tesworten der fünften inclusive. Wenn wir das Fehlende durch Einſchaltung andeuten, ſo verhält ſich das Vorhandene zu dem Fehlenden folgendermaßen:

1. Aufgabe. Auflöſung.
2. Aufgabe. (Auflöſung).
3. (Aufgabe. Auflöſung).
4. (Aufgabe. Auflöſung).
5. (Aufgabe). Auflöſung.
6. Aufgabe. Auflöſung.

Nehmen wir nun an, daß die zweite und dritte Aufgabe der erſtern analog durch Algebra gelöſt worden ſeien, und überlaſſen wir dieſelben ihrem Schickſal, daß dagegen die ganz fehlende vierte ſich an die folgenden beiden angeſchloſſen habe, ſo war ihre Auflöſung vielleicht folgender Art:

Da $x+y+z=a$, $a^3+x=m^2$, $a^3+y=n^2$, $a^3+z=p^2$, ſo iſt, wenn man die drei letzten Gleichungen addirt, $3a^3+x+y+z$, das iſt $3a^3+a=m^2+n^2+p^2$. Nun iſt $x=m^2-a^3$, $y=n^2-a^3$, $z=p^2-a$. Nun kommt es darauf an, die gegebene Zahl $3a^3+a$ in drei Quadrate m^2, n^2, p^2 zu zerlegen, deren jedes größer als a^3, aber kleiner als a^3+a iſt, (weil jede der drei Zahlen x, y, z kleiner als a werden muß). Diophant hat, wie aus der Auflöſung der Aufgabe 22. erhellt, $a=2$ geſetzt. Demnach führt ſeine Aufgabe darauf hinaus, die Zahl 26 in drei Quadrate zu zerlegen, ſo daß jedes größer als 8, aber kleiner als 10 iſt, was nach den früher gelehrten Methoden ſich leicht bewerkſtelligen läßt. Die Zahl 26 iſt nämlich die Summe der Quadrate $16+9+1$, von denen 9 bereits für dieſen Zweck brauchbar iſt, weil es zwiſchen 8 und 10 liegt. Es iſt alſo nur noch übrig, den Reſt 17 in zwei Quadrate zu theilen, die innerhalb derſelben Grenzen liegen.

Laſſen wir nun in Gedanken dieſe Auflöſung vorausgehen, ſo

Digitized by Google

wird die Auflösung der Aufgabe 22., wenn wir ihr als Aufgabe die fünfte der aufgestellten zutheilen, völlig verständlich. Auch hier ist $a=2$ angenommen; es soll also $x+y+z=2$, $8-x=m^2$, $8-y=n^2$, $8-z=p^2$ sein. Die drei letzten Bedingungen ergeben $3\cdot 8-(x+y+z)$, das ist $22=m^2+n^2+p^2$. Nun ist $x=8-m^2$, $y=8-n^2$, $z=8-p^2$, aber $x+y+z=2$. Demnach hat man die Zahl 22 in drei Ausdrücke zu zerlegen, so daß jedes derselben kleiner als 8, aber größer als 6 werde, damit nämlich die Differenzen $8-m^2$ u. s. w. kleiner als 2 werden.

Diesen ganz analog ist dann die Auflösung der Aufgabe 23., in welcher nur statt der Zahl a, welche in drei andere zerlegt werden soll, ein Bruch substituirt ist, weil, wenn $x+y+z=a$, und $x-a^3$, $y-a^3$, $z-a^3$ Quadrate sein sollen, diese letztern Bedingungen nur möglich sind, wenn a, x, y, z Brüche sind. Die Auflösung selbst habe ich oben schon mitgetheilt.

Ich muß noch erwähnen, daß schon Bachet die Lücke an dieser Stelle bemerkt und die drei fehlenden Aufgaben in seinem Commentar zu V, 22. gelöst hat. Aber er sowohl als Schulz stellt die Sache so dar, als wären zwischen V, 21. und 22. drei vollständige Aufgaben mit ihrer Auflösung ausgefallen. Keinen von Beiden haben die Textesworte in der Aufgabe 22. auf die Erklärung der Entstehung dieser Lücke hingeführt. Der Fehler ist, wie gesagt, so entstanden, daß der Abschreiber, nachdem er die nach V, 21. folgende Aufgabe richtig hingeschrieben, aus Versehen dazu die Auflösung einer spätern stellte, und nach dieser wieder regelmäßig weiter schrieb.

6. Auflösung in allgemeinen Ausdrücken.

Wir haben oben schon ein Beispiel berührt, in welchem Diophant gleich durch die Form, welche er den durch das Symbol der Unbekannten ausgedrückten gesuchten Zahlen gab, alle erforderlichen Bedingungen der Aufgabe löste. Er suchte nämlich V, 21. drei Zahlen, deren jede eine um 1 verminderte Quadratzahl und deren Summe eine Biquadratzahl sein sollte. Indem er die eine Zahl x^4-2x^2, die zweite x^2+2x, die dritte x^2-2x setzte, hatte er bereits die ganze Aufgabe gelöst. Denn jede der drei Zahlen ist ein um 1 vermindertes Quadrat, und die Summe von allen dreien ist x^4, also eine Biquadratzahl. Eine solche Auflösung nennt Dio-

Digitized by Google

phant eine unbeſtimmte, und er ſagt bei dieſem Beiſpiel, in welchem eine Auflöſung der Art gar nicht einmal ſein Zweck war: καὶ ἐν ἀορίστοις ἀριθμοῖς λέλυται τὸ ζητούμενον. Aber weder ſind die hier gefundenen Ausdrücke die ganz allgemeine Form dreier Zahlen, welche die verlangten Bedingungen erfüllen, noch hat überhaupt Diophant eine klare Vorſtellung von einer ganz allgemeinen Auflöſung, das heißt, von der Auffindung der Unbekannten in einer völlig erſchöpfenden, alle mögliche Zahlen in ſich ſchließenden Formel. So wie es ihm bei der gewöhnlichen Auflöſung genügt, irgend welche Zahlen gefunden zu haben, die das Verlangte leiſten, ſo iſt es ihm bei der Auflöſung ἐν τῷ ἀορίστῳ völlig hinreichend, überhaupt eine Formel gefunden zu haben, welche die Auflöſung löſt, unbekümmert darum, ob es nicht etwa noch Zahlen gebe, die ebenfalls die Auflöſung löſen, ohne die von ihm aufgeſtellte Form zu haben. Auch liegt der Sinn, den wir mit einer allgemeinen Auflöſung verbinden, gar nicht in den Worten, mit denen er die allgemeine Auflöſung definirt. Es heißt nämlich IV, 20. am Ende: τὸ γὰρ ἀορίστως ζητεῖν ἐστὶν ἵνα ἡ ὑπόστασις τοιαύτη ᾖ, ἵνα ὅσου τις θέλει τὸν ἀριθμὸν εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας σώῃ τὸ ἐπίταγμα. „Denn das heißt eine Aufgabe unbeſtimmt löſen, wenn der Ausdruck für die geſuchte Zahl ſo beſchaffen iſt, daß, welchen Werth man auch der Unbekannten geben mag, dieſer in die allgemeinen Ausdrücke eingeſetzt immer die Aufgabe löſt.“ Und IV, 37. am Ende: τὸ δὲ ἐν τῇ ἀορίστῳ τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τὸν ἀριθμὸν ὅσων ἄν τις θέλει μονάδων εἶναι ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. „Die Auflöſung in unbeſtimmten Ausdrücken iſt eine ſolche, daß die Unbekannte in den Ausdrücken für die geſuchten Zahlen jeden beliebigen Werth bekommen kann.“ Die ganz allgemeine Formel kann Diophant ſchon darum nicht geben, weil er die gegebenen Größen nicht durch Symbole bezeichnen kann. Indeß giebt er in ſeinen Beiſpielen wenigſtens die allgemeine Regel, nach welcher die Formel in jedem einzelnen Falle zu finden iſt. Es ſind die an und für ſich leichten Aufgaben IV, 37. 39. 41. und die etwas ſchwierigere IV, 20. Wir wollen ſehen, wie Diophant bei der Aufſuchung ſeiner allgemeiner Formeln zu Werke geht.

IV, 37. Zwei unbeſtimmte (allgemeine) Zahlenausdrücke zu finden, ſo daß das Product zu ihrer Summe addirt eine gegebene Zahl ausmacht.

Die gegebene Zahl ſei 8. Die eine der geſuchten Zahlen ſei

Digitized by Google

x, die andere 3, so ist das Product beider sammt ihrer Summe $4x+3$, und das ist gleich 8; daher wird $x=\frac{5}{4}$. Die erste Zahl ist also $\frac{5}{4}$, die zweite 3. Jetzt bedenke ich, wie es gekommen ist, daß $x=\frac{5}{4}$ wurde. Offenbar daher, daß ich 5 durch 4, den Coefficienten von x, dividirt habe. Aber 5 ist der Überschuß von 8 über 3; 4 dagegen ist die um 1 größere Zahl als die zweite der gesuchten. Wenn ich also die zweite Zahl ganz beliebig annehme, und sie von 8 subtrahire, und den Rest durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl dividire, so werde ich die erste erhalten. Sei z. B. die zweite Zahl $x-1$; dieses subtrahire ich von 8, so bleibt $9-x$; dieses dividire ich durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl, das ist durch x, so wird $\frac{9-x}{x}$ die erste Zahl. Und wir haben in unbestimmten Ausdrücken (ἐν τῇ ἀορίστῳ) zwei Zahlen gefunden, so daß ihr Product zu ihrer Summe addirt 8 ausmacht.

IV, 39. Zwei allgemeine Zahlenausdrücke zu finden, so daß ihr Product weniger ihrer Summe eine gegebene Zahl ausmacht.

Die gegebene Zahl sei 9. Die erste der gesuchten sei x, die zweite 3, so ist ihr Product weniger ihrer Summe $2x-3=8$, also $x=5\frac{1}{2}$. Daher ist die erste Zahl $5\frac{1}{2}$, die zweite 3. Ich untersuche nun wieder, woher $x=5\frac{1}{2}$ geworden ist. Offenbar, weil ich 11 durch 2 dividirt habe. Aber 11 ist die Summe der gegebenen und der zweiten gesuchten Zahl; 2 aber ist die um 1 verminderte zweite Zahl. Wenn ich also die zweite Zahl ganz beliebig annehme, dazu die gegebene Zahl addire, und diese Summe durch die um 1 verminderte zweite Zahl dividire, so werde ich die erste finden. Sei die zweite Zahl $x+1$, dieses zu 8 addirt giebt $x+9$; dieses dividire ich durch die um 1 verminderte zweite, das ist, durch x, so wird $\frac{x+9}{x}$ die erste Zahl. Wir haben dann in unbestimmten Ausdrücken zwei Zahlen gefunden, so daß ihr Product weniger ihrer Summe gleich 8 ist.

IV, 41. Zwei allgemeine Zahlenausdrücke zu finden, so daß ihr Product zu ihrer Summe ein gegebenes Verhältniß hat.

Es sei bestimmt, daß das Product das Dreifache der Summe sein soll. Die erste Zahl sei x, die zweite 5, so ist ihr Product $5x$; das soll das Dreifache von $x+5$ sein; daher ist $3x+15=5x$, also $x=7\frac{1}{2}$. Die erste Zahl ist also $7\frac{1}{2}$, die zweite 5.

Digitized by Google

Ich unterſuche nun, wie das Reſultat $x = 7\frac{1}{4}$ entſtanden iſt; es kommt her von der Diviſion der 15 durch 2. Aber 15 iſt das Product der zweiten Zahl in den Exponenten des gegebenen Verhältniſſes (ἀλλ' οἱ $\overline{\iota\varepsilon}$ ὁ δευτέρου πολλαπλασίων ἐστὶν ἐπὶ τὸν λόγον); die 2 aber iſt der Überſchuß der zweiten Zahl über den Exponenten. Wenn ich alſo die zweite Zahl ganz beliebig nehme, und ſie in den Exponenten des Verhältniſſes multiplicire, und das Product durch den Überſchuß der zweiten Zahl über den Exponenten dividire, ſo erhalte ich die erſte Zahl. Die zweite ſei x; dieſe in den Exponenten multiplicirt, giebt $3x$; wenn ich dieſes dividire durch den Überſchuß der zweiten Zahl über den Exponenten, nämlich durch $x-3$, ſo wird die erſte Zahl $\frac{3x}{x-3}$.

In allen drei Beiſpielen iſt alſo die Regel, welche Diophant giebt, ganz allgemein und für jede gegebene Zahl geltend, und es iſt nur ein Mangel ſeiner Symbolik, daß er die Regel in ihrer Allgemeinheit nicht in eine Formel überſetzen kann. Die Regel IV, 37. ſagt: Wenn die eine Zahl $x-1$ iſt, ſo iſt die andere $\frac{a-x+1}{x}$. Die Regel IV, 39.: Wenn die eine Zahl $x+1$ iſt, ſo iſt die andere $\frac{a+x+1}{x}$. Bei dem dritten Beiſpiel iſt zu bedenken, daß Diophant durchgehends unter dem Verhältniß immer das Vielfache verſteht, das heißt, daß er nur Verhältniſſe ſtatuirt, deren Exponenten ganze Zahlen ſind. Er nimmt alſo an, das Product der beiden Zahlen verhalte ſich zu ihrer Summe, wie $m:1$; iſt dann die eine Zahl x, ſo iſt die andere $\frac{x-m}{mx}$. Setzten wir allgemeiner das Verhältniß $m:n$, und die erſte Zahl x, ſo würde die zweite $\frac{mx}{nx-m}$ werden.

Etwas complicirter, aber darum nicht weniger allgemein gelöſt iſt das Beiſpiel

IV, 20. Drei Zahlen in allgemeinen Ausdrücken zu finden, ſo daß das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu addirt.

„Da ich verlange, daß das Product der erſten und zweiten um 1 vermehrt eine Quadratzahl werde, ſo werde ich dieſes Product haben, wenn ich von irgend einem Quadrate 1 abziehe. Ich bilde das Quadrat von x mit irgend einem Coefficienten (πλάσσω τετρά-

τετράγωνον ἀπὸ ϛ̄ ὅσων δήποτε) und der Zahl 1, z. B. $x+1$, so ist das Quadrat x^2+2x+1; wenn ich davon 1 abziehe, so wird der Rest x^2+2x das Product der ersten und zweiten Zahl sein. Die zweite Zahl sei x, so ist die erste $x+2$. Da ich ferner verlange, daß das Product der zweiten und dritten Zahl um 1 vermehrt eine Quadratzahl werde, so werde ich, wenn ich von irgend einer Quadratzahl 1 subtrahire, das Product der zweiten und dritten haben. Ich bilde das Quadrat von $3x+1$, welches $9x^2+6x+1$ ist, so wird das Product der zweiten und dritten Zahl $9x^2+6x$. Die zweite Zahl ist aber x; also die dritte $9x+6$. Da ich endlich will, daß auch das Product der ersten und dritten Zahl ein Quadrat werden soll, wenn man 1 addirt, so muß $9x^2+24x+13$ ein Quadrat sein." — Hätte nun Diophant nicht eine allgemeine, sondern eine gewöhnliche Auflösung in bestimmten Zahlen verlangt, so wäre nichts leichter, als diesen Ausdruck zu einem Quadrate zu machen. Nun aber wendet er die Methode der Zurückrechnung an, um durch eine neue Annahme statt der oben willkührlich gewählten Quadrate von $x+1$ und von $3x+1$ auf einen Endausdruck zu gelangen, der schon seiner Form nach Quadrat ist. Er fährt also so fort: „Nun ist zwar der Coefficient von x^2 ein Quadrat (καὶ ἔχω τὰς δυνάμεις τετραγωνικὰς); wenn nun auch die bestimmte Zahl (13) ein Quadrat, und das doppelte Product der Wurzeln beider Quadratzahlen (des Coefficienten von x^2 und der bestimmten Zahl) dem Coefficienten von x gleich wäre, so wären die drei Bedingungen allgemein gelöst. Aber die 13 sind entstanden aus dem Product der 6 und der 2, zu welchem 1 addirt ist. Die 2 aber rührt her von dem doppelten Product des x in 1, die 6 von dem doppelten Product von $3x$ in 1. Ich will also, daß der doppelte Coefficient von x in der einen Wurzel mit dem doppelten Coefficienten von x in der andern Wurzel multiplicirt und um 1 vermehrt ein Quadrat gebe (θέλω οὖν δὶς τοὺς ϛ ς^οὺς ἐπὶ δὶς τοὺς ϛ ς^οὺς μετὰ μ^ο ᾱ ποιεῖν τετράγωνον). Aber das Doppelte mit dem Doppelten multiplicirt ist das Vierfache. Ich will also, daß das vierfache Product der Coefficienten um die Einheit vermehrt ein Quadrat gebe. Wenn man aber zu dem vierfachen Producte irgend zweier Zahlen das Quadrat ihres Unterschiedes addirt, so erhält man ein Quadrat. Wenn ich also das Quadrat des Unterschiedes gleich 1 setze, so wird das vierfache Product der Zahlen, um 1 vermehrt, ein Quadrat sein. Wenn aber das

Quadrat des Unterſchiedes 1 iſt, ſo iſt der Unterſchied ſelbſt 1. Darum muß man die obigen Quadrate ſo bilden, daß die Coeffi-cienten von x in den Wurzeln zwei zunächſt auf einander folgende Zahlen ſind, z. B. von $x+1$ und von $2x+1$. Das Quadrat von $x+1$ iſt x^2+2x+1, alſo das Product der erſten und zweiten Zahl x^2+2x; die zweite Zahl ſei x, ſo iſt die erſte $x+2$. Ferner da das Quadrat von $2x+1$ gleich $4x^2+4x+1$ iſt, ſo iſt das Product der zweiten und dritten Zahl $4x^2+4x$; die zweite iſt aber x, alſo die dritte $4x+4$. Es iſt alſo in allgemeinen Ausdrücken erlangt, daß das Product von je zweien um die Ein-heit vermehrt ein Quadrat iſt, und man kann x annehmen wie man will.

Es hat bei dieſer Auflöſung den Anſchein, als ob Diophant eine der Bedingungen, welche nöthig iſt, um die Formel $9x^2+24x+13$ in eine quadratiſche Form zu verwandeln, vernachläſſigt habe. Es muß nämlich, damit dieſer Ausdruck ein allgemeines Quadrat ſei, zuerſt ſtatt 13 eine Quadratzahl erlangt werden, und ſodann muß ſtatt 24 das doppelte Product der Wurzeln der ſtatt 9 und und 13 zu ſubſtituirenden Quadrate in die Formel kommen. Von dieſer letzten Bedingung ſpricht Diophant gar nicht, dagegen führt er einen ſcheinbar willkührlichen Satz ein, nach welchem die An-nahme ſo zu machen iſt, daß man für 13 eine Quadratzahl er-halte. Indeß iſt nur ſein Vortrag inſofern fehlerhaft, als er die Einführung dieſes Satzes und die dadurch zugleich bewirkte Erfül-lung der zweiten Bedingung nicht gehörig motivirt; die Sache aber iſt ganz richtig, wie die Ausführung in allgemeinen Zeichen beweiſt. Nennen wir die drei geſuchten Zahlen, A, B, C, und ſetzen $AB+1=(mx+1)^2$, $BC+1=(nx+1)^2$, und $B=x$, ſo wird $A=m^2x+2m$, $C=n^2x+2n$. Nun ſoll auch noch $AC+1$ ein Quadrat werden. Aber $AC+1$ wird $=m^2n^2x^2+2mn(m+n)x+4mn+1$. Damit dieſer Ausdruck die allgemeine Form eines Quadrats habe, muß 1) $4mn+1=p^2$, 2) $2mn(m+n)=2mnp$, alſo $m+n=p$ ſein. Demnach muß $4mn+1=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$, alſo $1=m^2-2mn+n^2$, folglich $m-n$ oder $n-m=1$, $n=m+1$ ſein. Das iſt aber eben das Reſultat, welches Diophant herausgebracht hat. Setzen wir alſo $B=x$, $A=m^2x+2m$, ſo wird $C=(m\pm1)^2x+2(m\pm1)$.

Fragen wir nun, welchen Zweck dieſe vereinzelten allgemein gelöſten Aufgaben haben, ſo ergiebt ſich die Antwort hierauf ſofort,

Digitized by Google

wenn wir die Stellung, welche diese Aufgaben einnehmen, berücksichtigen. Alle diese hier erörterten Aufgaben sind als Hilfsaufgaben für zusammengesetztere in Zahlen zu lösende zu betrachten, welche den Zweck haben, für die folgende Aufgabe die Annahme so zu bestimmen, daß von den n Bedingungen $(n-1)$ sogleich durch die Annahme erledigt werden. Die eben betrachtete Aufgabe IV, 20. lehrt in allgemeinen Ausdrücken drei Zahlen finden, so daß das Product von je zweien um 1 vermehrt ein Quadrat wird. Die nächstfolgende Aufgabe verlangt, vier Zahlen unter derselben Bedingung zu finden. Auf die vorhergelöste Aufgabe gestützt nun setzt Diophant $AB+1=(x+1)^2$, $AC+1=(2x+1)^2$, $AD+1=(3x+1)^2$, und $A=x$, so wird $B=x+2$, $C=4x+4$, $D=9x+6$, und es sind außer den drei hingeschriebenen Bedingungen, der vorigen Aufgabe gemäß, auch noch die beiden erledigt, daß $BC+1$ und $CD+1$ Quadrate sind. Es bleibt also nur noch übrig, daß auch $BD+1$ Quadratzahl werde. Aber $BD+1$ ist $=9x^2+24x+13$; dieser Ausdruck ist also noch zu einem Quadrate zu machen, wodurch der Werth von x bestimmt wird. Ganz ähnlich verhält es sich mit den drei übrigen Aufgaben dieser Art. Alle drei setzten sich vor, zwei Zahlen unter gewissen Bedingungen zu suchen; die die nächstfolgende Aufgabe verlangt dann drei Zahlen unter denselben Bedingungen. Die sechs Aufgaben IV, 37—42. sind demnach folgende:

37. In allgemeinen Ausdrücken: $AB+A+B=a$; Resultat: $B=x-1$, $A=\frac{a-x+1}{x}$.

38. In Zahlen: $AB+A+B=a$, $BC+B+C=b$, $AC+A+C=c$. Sei $B=x-1$, so ist $A=\frac{a-x+1}{x}$, $C=\frac{b-x+1}{x}$, und die beiden ersten Bedingungen sind erfüllt, die dritte bleibt zur Bestimmung des x übrig.

39. In allgemeinen Ausdrücken: $AB-A-B=a$; Resultat: $B=x+1$, $A=\frac{a+x+1}{x}$.

40. In Zahlen: $AB-A-B=a$, $BC-B-C=b$, $AC-A-C=c$. Sei $B=x+1$, so ist $A=\frac{a+x+1}{x}$, $C=\frac{b+x+1}{x}$, und zwei Bedingungen sind erfüllt; die dritte giebt x.

Digitized by

41. In allgemeinen Ausdrücken: $AB = m(A+B)$. Es wird $B = x$, $A = \frac{mx}{x-m}$.

42. In Zahlen: $AB = m(A+B)$, $BC = n(B+C)$, $AC = p(A+C)$. Sei $B = x$, so ist $A = \frac{mx}{x-m}$, $C = \frac{nx}{x-n}$, und zwei Bedingungen sind erfüllt; die dritte giebt x.

Außer diesen vier vollständigen Aufgaben aber finden wir dieselbe Methode häufig innerhalb anderer Aufgaben angewandt, und wir haben in den bisher bei verschiedenen Gelegenheiten mitgetheilten Beispielen bereits Fälle kennen gelernt, in denen Diophant die in den Nebenaufgaben concret gefundenen Zahlen in x multiplicirte, wenn die Natur der Aufgabe es mit sich brachte, daß jede Zahlen in dem gefundenen Verhältnisse dasselbe leisteten. Wir haben z. B. oben die Aufgabe IV, 26. betrachtet. Sie befahl, eine gegebene Zahl in drei andere zu zerlegen, so daß das Product aus allen dreien ein Kubus wird, dessen Wurzel der Summe der Unterschiede von je zweien gleich ist. Wenn nun drei Zahlen, a, b, c, die Eigenschaft haben, daß ihr Product abc ein Kubus ist, dessen Wurzel die Summe der Unterschiede $(a-b)+(b-c)+(a-c)$ oder $2(a-c)$ ist, so haben jede drei Zahlen, die sich wie a, b, c verhalten, dieselbe Eigenschaft. Denn wenn $abc = 8(a-c)^3$ ist, und man substituirt ma, mb, mc für a, b, c, so ist das Product derselben m^3abc; der Kubus der Summe der Unterschiede aber $8(ma-mc)^3 = 8m^3(a-c)^3$; da aber $abc = 8(a-c)^3$ war, so ist auch $m^3nbc = 8m^3(a-c)^3$. Nun findet Diophant, daß die Zahlen $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{5}$ und $\frac{5}{3}$, dieser Forderung genügen; daher auch jedes gleichartige Vielfache derselben. Zuerst nun schafft er die Nenner weg, indem er alle drei Zahlen mit 15 multiplicirt; dann werden noch die Zahlen 40, 27, 25 dieselbe Eigenschaft haben. Nun sollen aber die drei Zahlen nicht bloß diese Eigenschaft haben, es soll auch ihre Summe einer gegebenen Zahl, 4, gleich sein. Um noch diese Bedingung erfüllen zu können, betrachtet Diophant die drei gefundenen Zahlen als Coefficienten von x, und setzt nun die gesuchten Zahlen $40x$, $27x$, $25x$, wie wir oben gesehen haben. — Sehr oft findet sich dieses Verfahren in dem sechsten Buche angewandt, dessen Aufgaben über die rechtwinkligen Dreiecke zum großen Theil der Art sind, daß einen Theil den in der Aufgabe bestimmten Bedingungen alle ähnlichen Dreiecke gemein

Digitized by Google

haben. Es kommt da also zunächst darauf an, die Form des gesuchten Dreiecks zu bestimmen. Ist die gefunden, so sagt Diophant: τάσσω τὸ τρίγωνον ἐν ἀριθμοῖς, d. h. ich multiplicire die gefundenen Seiten des Dreiecks in x. Ich will von diesem an und für sich einfachen Verfahren keine Beispiele weiter ausführen, sondern begnüge mich auf die Aufgaben VI, 3. 4. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 13. 15. 17. zu verweisen.

7. Willkührliche Bestimmungen und Annahmen.

Wenn ich hier von willkührlichen Bestimmungen, deren sich Diophant als Auflösungsmittel bedient, sprechen will, so habe ich nicht solche Willkührlichkeiten im Sinne, welche als unmittelbare und nothwendige Folge seiner unvollkommenen Zeichensprache erscheinen. Wenn er z. B. den Ausdruck $6x+1$ zu einem Quadrate machen will, und nun sagt, ich setze $6x+1=25$, so ist $x=4$, so ist das allerdings eine willkührliche Annahme. Aber Jedermann sieht ohne weitere Erklärung sogleich ein, daß er statt 25 jede beliebige Quadratzahl hätte setzen, und so durch allmählige Substitution beliebig viele Werthe für x hätte herleiten können, daß also Diophant's Verfahren im Grunde ebenso allgemein ist als das unsrige, mit dem Unterschiede, daß jenes die Zahlenwerthe für x successive liefert, welche wir in der allgemeinen Formel $x=\frac{m^2-1}{6}$ auf einmal vor Augen sehen. Von solchen verzeihlichen Mängeln, die durch die Mangelhaftigkeit seiner Symbolik bedingt sind, spreche ich hier nicht. Vielmehr will ich hier dasjenige Verfahren Diophant's erörtern, vermöge dessen er durch irgend eine willkührliche Voraussetzung neue Bedingungen in die Aufgabe hineinlegt, die den Worten derselben fremd sind. Dieses verzweifelten Hilfsmittels, welches natürlich nur bei unbestimmten Aufgaben anwendbar ist, bedient sich Diophant so häufig und in so mannigfacher Gestalt, daß es mir in der That schwer wird, einige allgemeinere Gesichtspuncte aufzustellen, unter welche die einzelnen Fälle sich mit Übersichtlichkeit unterordnen lassen. Zwei Klassen solcher willkührlichen Bestimmungen lassen sich indeß leicht aus der großen Masse herausfinden; die erste begreift den Fall, in welchem von mehren Unbekannten eine von vorn herein als bestimmte gegebene Zahl angenommen wird; die zweite Klasse begreift den Fall, wenn irgend eine Relation zwi-

Digitized by Google

schen zwei oder mehren Unbekannten durch die Form, die Diophant denselben giebt, als gegeben vorausgesetzt wird, wodurch den Bedingungen der Aufgabe eine neue hinzugefügt wird. Die Beispiele für beide Klassen sind so häufig, daß es sich nicht der Mühe belohnt, sie alle namhaft zu machen. Zu der ersten Klasse gehört z. B. die Aufgabe

I, 14. Zwei Zahlen zu finden, deren Product zu ihrer Summe ein gegebenes Verhältniß habe.

Diophant nimmt an, daß das Product dreimal so groß als die Summe sein soll. Demnach würden wir, wenn wir die Zahlen x und y setzten, die Gleichung erhalten $xy = 3(x+y)$, also $y = \frac{3x}{x-1}$. Diophant setzt dagegen die eine Zahl x, die andère 12, woraus die erste sich $= 4$ ergiebt.

Dieser ähnlich nimmt Diophant in den Aufgaben **I**, 25. 26. 27. 28. **II**, 19. **V**, 7. 30. 31. und andern für eine der gesuchten Zahlen eine bestimmte Zahl an.

Beispiele der zweiten Klasse sind die Aufgaben **II**, 1—5., in welchen zu der Bestimmung der Aufgabe durch die willkührliche Annahme noch das Verhältniß der beiden gesuchten Zahlen als gegeben angenommen wird. Ähnlich geschieht das in der Aufgabe

II, 18. Drei Zahlen zu finden, so daß, wenn jede an die folgende einen bestimmten Theil ihrer selbst und außerdem eine gegebene Zahl abgiebt, die Resultate nach der gegenseitigen Mittheilung am Ende gleich werden.

Die erste Zahl soll an die zweite ein Fünftel und die Zahl 6, die zweite an die Dritte ein Sechstel und die Zahl 7, die dritte an die erste ein Siebentel und die Zahl 8 abgeben. Nennen wir nun, um Brüche zu vermeiden, die erste Zahl $5x$, die zweite $6y$, die dritte $7z$, so giebt die erste $x+6$ ab und empfängt $z+8$; die zweite giebt $y+7$ und empfängt $x+6$; die dritte giebt $z+8$ und empfängt $y+7$; demnach wird nach dieser Mittheilung die erste $4x+z+2$, die zweite $x+5y-1$, die dritte $y+6z-1$. Diese drei Ausdrücke sollen einander gleich sein; man erhält also zwei Gleichungen unter den drei Unbekannten, und wenn man daraus y und z durch x ausdrückt, so bleibt die erste Zahl $5x$, die zweite wird $\frac{57x+54}{13}$, die dritte $\frac{119x+84}{26}$. Will man ganze Zah-

Digitized by Google

len erhalten, so setze man $x = 26n + 10$, so wird die erste $130n + 50$, die zweite $114n + 48$, die dritte $119n + 49$. Dieses ist der allgemeine Ausdruck aller Zahlen, welche der Aufgabe genügen. Was thut aber Diophant? Er setzt die erste Zahl $= 5x$, die zweite $= 6x$, er fügt also der ursprünglichen Aufgabe noch die Bedingung hinzu, daß die beiden ersten Zahlen sich wie 5 zu 6 verhalten, wodurch die unbestimmte Aufgabe in eine bestimmte verwandelt wird. Denn indem nun unter unsern allgemeinen Formeln noch die Bedingung stattfinden soll, daß $130n + 50 : 114n + 48 = 5 : 6$ ist, so erhält n einen bestimmten Werth, nämlich $-\frac{2}{7}$, und die drei Zahlen werden $\frac{90}{7}$, $\frac{108}{7}$, $\frac{105}{7}$.

Wenn Diophant VI, 19. zwei Zahlen sucht, so daß der Kubus der einen um 2 größer ist als das Quadrat der andern, und dann die erste $x - 1$, die zweite $x + 1$ setzt, so löst er ja nicht mehr jene Aufgabe, wie sie allgemein gestellt war, sondern er fügt durch diese Annahme die neue Bedingung hinzu, daß die beiden Zahlen die Differenz 2 haben. Die Willkührlichkeit ist gerade an dieser Stelle um so unverantwortlicher, als gerade aus dieser Annahme die Operation eine Wendung erhält, welche auf keinen andern Fall anwendbar ist. Es wäre ein vergebliches Bemühen, auf demselben Wege zwei Zahlen unter den obigen Bedingungen zu suchen, deren Differenz nicht 2 ist. Offenbar ist in einem Falle, wie dieser, die begangene Willkühr von weit mehr Bedeutung, als in den vorhererwähnten, in denen immer noch der Vorwurf dadurch abgewehrt werden konnte, daß man sagte: es kann ja statt der hier eingeführten Bestimmung irgend eine andere gemacht werden. Indem ich also die beiden erwähnten Klassen von Willkührlichkeiten übergehe, wende ich mich hier zu solchen Beispielen, in welchen durch die willkührliche Bestimmung entweder, wie in dem angeführten Beispiele VI, 19. eine partielle Auflösung erschlichen wird, die nicht von allgemeiner Anwendbarkeit ist, oder auf der andern Seite der Knoten, um dessen Lösung es sich handelt, eigenmächtig zerhauen wird.

Ein merkwürdiges Beispiel von einer erschlichenen Auflösung bietet uns die oben bei Gelegenheit der Grenzmethode ausgeführte Aufgabe V, 13. Diese Aufgabe verlangte, die Zahl 1 in zwei Stücke zu theilen, so daß, wenn man zu jedem derselben eine andere gegebene Zahl addirt, beide Summen Quadrate werden. Nennen wir das eine Stück A, das andere B, und die gegebenen Zah-

Digitized by Google

len a und b, so haben wir die drei Gleichungen $A+B=1$, $A+a=x^2$, $B+b=y^2$. Die Addition der beiden letzten Gleichungen giebt $A+B+a+b$, das ist, $a+b+1=x^2+y^2$. Daraus folgt die Determination, die Diophant ausgelassen hat, daß die gegebenen Zahlen so beschaffen sein müssen, daß ihre Summe, wenn man 1 dazu addirt, die Summe von zwei Quadraten sein könne. Diophant setzt $a=2$ und $b=6$, so wird $a+b+1=9$; anstatt nun, um die Auflösung allgemein gültig darzustellen, 9 als eine Zahl zu betrachten, die sich in zwei Quadrate zerlegen läßt, betrachtet er sie als Quadratzahl, so daß sein ganzes folgendes Verfahren nicht mehr anwendbar ist, wenn die Zahl $a+b+1$ bloß als Summe zweier Quadratzahlen ausfällt; ein Fall, in dem die Auflösung immer noch möglich bleibt.

Aber wir wollen weiter gehen und sehen, was Diophant aus folgender Aufgabe macht.

IV, 7. Man soll zu einem Kubus und zu einem Quadrate ein anderes Quadrat addiren, und die Summen sollen verwechselt dieselbe Eigenschaft haben. (Κύβῳ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ.)

Das heißt, man soll drei Zahlen w^3, y^2, x^2 suchen, so daß w^3+x^2 ein Quadrat, dagegen y^2+x^2 ein Kubus werde. Da nun y^2+x^2 ein Kubus sein soll, so sei, sagt Diophant, diese Summe gleich w^3. Durch diese ganz willkührliche Bestimmung wird aber der Aufgabe eine völlig neue Gestalt gegeben. Nun heißt es: Man soll zwei Quadratzahlen finden, so daß ihre Summe ein Kubus, die Summe der ersten und der doppelten zweiten aber ein Quadrat werde; und statt der obigen Gleichungen erhalten wir nun diese: $y^2+x^2=w^3$, $y^2+2x^2=t^2$. Von dieser Aufgabe, welche ein ganz specieller Fall der ursprünglich gegebenen ist, giebt Diophant zwei verschiedene Auflösungen, die nicht das Ansprechende der sonstigen Diophantischen Manier haben. Die erste ist diese. Es soll w^3+x^2 ein Quadrat werden. Wenn ich aber irgend zwei Zahlen nehme, und zu der Summe ihrer Quadrate ihr doppeltes Product addire, so erhalte ich immer wieder ein Quadrat. Wenn ich also irgend zwei Zahlen nehme, so setze ich die Summe ihrer Quadrate gleich w^3, ihr doppeltes Product aber gleich x^2. Aber x^2 ist ein Quadrat; daher müssen die Zahlen so gewählt werden, daß ihr doppeltes Product ein Quadrat ist. Die

Digitized by Google

eine Zahl sei x, die andere $2x$, damit ihr doppeltes Product ein Quadrat werde. Darum setze ich die erste Zahl $w^3 = 5x^2$, der Summe der Quadrate der angenommenen Zahlen, ihr doppeltes Product aber, nämlich $4x^2 = z^2$, so ist $y^2 = w^3 - z^2 = x^2$. So ist die Bedingung erfüllt, daß $y^2 + z^2$ der ersten Zahl w^3 gleich und zugleich, daß die Summe der ersten und dritten, $w^3 + z^2$, ein Quadrat ist. Es bleibt nur noch übrig, den Ausdruck für w^3, nämlich $5x^2$, zu einem Kubus zu machen. Sei also $5x^2 = x^3$, so ist $x = 5$. Der gesuchte Kubus ist also 125, das Quadrat 25, und das zweite Quadrat, welches man zu beiden addiren soll, ist 100; καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις. — In der zweiten Auflösung sucht Diophant zuerst, um der Gleichung $y^2 + 2z^2 = t^2$ zu genügen, zwei Quadrate, so daß die Summe des einen und des doppelten andern ein Quadrat sei. Zu dem Ende setzt er das eine Quadrat $= x^2$, das andere $= 4$, so soll $2x^2 + 4$ ein Quadrat sein, und zwar bildet er das Quadrat von $2x - 2$, das ist $4x^2 - 8x + 4$, so wird $x = 4$. Die beiden gesuchten Quadrate werden also 4 und 16 sein. Diese gefundenen Zahlen nun macht er zu Coefficienten von x^2, und setzt $y^2 = 4x^2$, $z^2 = 16x^2$, demnach wird ihre Summe $20x^2$ der gesuchte Kubus sein müssen. Damit nun $20x^2$ ein Kubus werde, setzt Diophant wieder $20x^2 = x^3$, so wird $x = 20$. Die drei gesuchten Zahlen sind also, die Kubikzahl 8000, die erste Quadratzahl 1600, die zweite Quadratzahl, die addirt werden soll, $= 6400$. Τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται.

Nachdem die Aufgabe einmal durch die willkührliche Annahme, daß die zu einem Kubus zu machende Summe der beiden gesuchten Quadrate dem gesuchten Kubus gleich sein soll, auf diese specielle Form reducirt ist, ist es leicht, beide Diophantische Auflösungen allgemeiner darzustellen. Da sowohl $w^3 + z^2$ als $w^3 - z^2$ ein Quadrat werden soll, so setzt Diophant w^3 gleich der Summe zweier Quadrate, z^2 gleich dem doppelten Producte der Wurzel. Damit aber z^2 ein Quadrat werde, muß, wenn die eine der angenommenen Zahlen m ist, die andere $2mp^2$ sein. Dann wird $w^3 = m^2(1 + 4p^4)$, $z^2 = 4m^2p^2$, also $w^3 + z^2 = m^2(2p^2 + 1)^2$, $w^3 - z^2$, daß ist $y^2 = m^2(2p^2 - 1)^2$, und es bleibt nur noch übrig den Ausdruck für w^3 zu einem Kubus zu machen; das geschieht aber, wenn wir $m^2(4p^4 + 1) = m^3q^3$ setzen, so wird $m = \frac{4p^4 + 1}{q^3}$. Demnach werden die Wurzeln der drei gesuchten Zahlen $w = \frac{4p^4 + 1}{q^2}$,

Digitized by Google

$y = \frac{(4p^4+1)(2p^2-1)}{q^3}$, $z = \frac{2p(4p^4+1)}{q^3}$. Bei Diophant ist $p = q = 1$. In der zweiten Auflösung fängt Diophant damit an, daß er zuerst zwei Quadrate p^2, n^2 sucht, so daß $2p^2+n^2$ ein Quadrat wird. Setzt man die Wurzel dieses Quadrats $= 2mp - n$, so wird $p = \frac{2mn}{2m^2-1}$. Nun setzt Diophant $y^2 = n^2x^2$, $z^2 = \frac{4m^2n^2}{(2m^2-1)^2}x^2$, so soll die Summe dieser beiden Quadrate ein Kubus werden. Es wird aber $y^2+z^2 = n^2x^2\left(1+\frac{4m^2}{(2m^2-1)^2}\right) = n^2x^2 \cdot \frac{4m^4+1}{(2m^2-1)^2}$; dieses sei $= q^3x^3$, so wird $x = \frac{n^2(4m^4+1)}{q^3(2m^2-1)^2}$, also $w = \frac{n^2(4m^4+1)}{q^2(2m^2-1)^2}$, $y = \frac{n^3(4m^4+1)}{q^3(2m^2-1)^2}$, $z = \frac{2mn^3(4m^4+1)}{q^3(2m^2-1)^3}$, und die Conformität dieser Formeln mit den vorher gefundenen leuchtet ein, obgleich ihr äußeres Aussehen etwas abweichend ist. Bei Diophant ist $n = 2$, $m = 1$, $q = 1$.

Zu entschuldigen ist die kleine Willkühr in den Aufgaben V, 1. 2., in welchen drei stetig proportionirte Zahlen gesucht werden, deren jede, wenn man eine gegebene Zahl, 12, davon subtrahirt oder dazu addirt, zum Rest oder zur Summe ein Quadrat giebt. Nun ist der allgemeine Ausdruck dreier stetig proportionirter Zahlen y, xy, x^2y, es sollen also in der ersten Aufgabe die Formeln $y - 12$, $xy - 12$, $x^2y - 12$ Quadrate werden. Nach seiner Art hätte Diophant nun für y irgend eine Zahl annehmen können, welche ein Quadrat übrig läßt, wenn man 12 davon abzieht, z. B. 28. Dann blieben noch zwei Bedingungen zu erfüllen, daß nämlich $28x - 12$ und $28x^2 - 12$ Quadrate werden. Diese doppelte Gleichung kann er aber nicht lösen; darum sucht er für y nicht im Allgemeinen eine Zahl, sondern eine Quadratzahl, welche um ein Quadrat größer ist als 12, z. B. $\frac{169}{4}$; dann werden die beiden andern Zahlen $\frac{13}{2}x$ und x^2, und die zu Quadraten zu machenden Ausdrücke sind jetzt $\frac{13}{2}x - 12$ und $x^2 - 12$, wo der Coefficient von x^2 die Einheit ist, in welchem Falle die Auflösung, wie wir in dem vorigen Kapitel gesehen haben, keine Schwierigkeit hat.

Wesentlichere Einwürfe aber lassen sich gegen folgende Auflösung machen, wenn auch die Willkührlichkeit daselbst weniger in der Sache, als in der Darstellung liegt.

V, 19. Drei Zahlen zu finden, so daß der Kubus

Digitized by Google

ihrer Summe ein Kubus bleibt, wenn man jede der drei Zahlen davon abzieht.

Diophant ſetzt die Summe der drei Zahlen x, jede der drei Zahlen aber gleich x^3 mit einem Coefficienten von der Form $\frac{m^3-1}{m^3}$, ſo iſt der Kubus der Summe, wenn man die einzelne Zahl davon abzieht, $=\frac{1}{m^3}x^3$, alſo ſicher ein Kubus. Es kommt alſo nur noch darauf an, daß die Summe der drei Zahlen wirklich $=x$ ſei. Wir haben alſo, wenn wir die drei Zahlen $\frac{m^3-1}{m^3}x^3$, $\frac{n^3-1}{n^3}x^3$ und $\frac{p^3-1}{p^3}x^3$ ſetzen, die Gleichung

$$\left(\frac{m^3-1}{m^3}+\frac{n^3-1}{n^3}+\frac{p^3-1}{p^3}\right)x^3=x$$

$$\text{oder } 1-\frac{1}{m^3}+1-\frac{1}{n^3}+1-\frac{1}{p^3}=\frac{1}{x^2}$$

$$\text{oder } 3-\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{p^3}\right)=\frac{1}{x^2}.$$

Es kommt alſo darauf an, drei Kubikzahlen zu finden, deren Summe von 3 abgezogen ein Quadrat zum Reſte läßt. Wenn aber die oben für die drei Zahlen angenommenen Ausdrücke poſitiv werden ſollen, ſo muß jede der drei Zahlen m, n, p größer als 1, alſo muß auch jede der drei hier geſuchten Kubikzahlen $\frac{1}{m^3}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{p^3}$ kleiner als 1 ſein. Damit das letztere geſchehe, nimmt Diophant ohne weitern Grund an, daß ſchon ihre Summe kleiner als 1 ſei. Halten wir dieſe Annahme nun einmal feſt, ſo folgt daraus, daß $\frac{1}{x^2}$ größer als 2 und kleiner als 3 ſein müſſe. Unter den unzähligen Quadraten, welche innerhalb dieſer Grenzen liegen, nimmt Diophant $\frac{9}{4}$ für $\frac{1}{x^2}$, ſo ſtellt ſich nun die Aufgabe ſo: die Zahl $3-\frac{9}{4}$, das iſt, $\frac{3}{4}$ in drei Kubikzahlen zu zerlegen. Man gebe dem Bruche $\frac{3}{4}$ einen kubiſchen Nenner, z. B. 216, ſo ſoll man alſo $\frac{162}{216}$, oder mit andern Worten den Zähler 162 in die Summe von drei Kubikzahlen zerlegen. „Nun beſteht, ſagt Diophant, die Zahl 162 aus dem Kubus 125 und der Differenz der beiden Kubi 64 und 27 (nämlich $162=125+37$). Wir haben aber in den Porismen den Satz, daß die Differenz zweier Kubi allemal auch die Summe zweier Kubi iſt. Wir kehren zu der urſprünglichen Auf-

gabe zurück, und nehmen für die drei Kubikzahlen jede der drei gefundenen. Für die Summe aber nehmen wir wieder x an; so trifft es zu, daß der Kubus der Summe, wenn man jede der drei Zahlen davon abzieht, einen Kubus zum Rest läßt; es ist also nur noch nöthig, daß die drei Zahlen zusammen gleich x sind; die Summe der drei Zahlen ist aber $\frac{9}{4}x^3$, also $x = \frac{3}{5}$."

Abgesehen von der willkührlichen Annahme $\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{p^3} > 1$, da doch aus der Natur der Aufgabe nur die Bedingung $\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{p^3} < 3$ folgt, da jeder der drei Kubi an und für sich kleiner als 1 sein muß, so scheint die ganze Auflösung, wie sie von Diophant dargestellt ist, auf dem zufälligen Umstande zu beruhen, daß 162 die Summe eines Kubus und der Differenz zweier andern Kubi ist, und es erhellt aus dem Vortrage nicht, wie man sich zu benehmen habe, wenn man statt des willkührlich angenommenen Quadrats $\frac{9}{4}$ ein anderes gewählt hätte. Wir können es daher Bachet nicht eben verargen, wenn er gesteht, daß aus dem angeführten Grunde die ganze Auflösung ihm dunkel geblieben sei [1]). Jedenfalls hätte

---

1) Haec propositio, sagt er in seinem Commentar, est de numero eorum, quas ut ad nos pervenerunt, fateor me non satis assequi. Quamvis enim de illius solutione satis mihi constet, ut infra patebit, duo tamen sunt, quae totam ejus tractationem valde imperfectam mihi videri faciunt. Primum enim licet ingeniose inferat Diophantus inveniendos esse tres cubos, quorum quilibet sit unitate minor, ita ut summa eorum a ternario sublata, relinquat quadratum; unde concludit curandum esse ut tres cubi simul sint unitate minores, sic enim quilibet multo magis erit unitate minor, quare sequitur quadratum qui relinquitur, summam cuborum auferendo a ternario, debere esse majorem quam 2 minorem quam 3.; licet inquam haec subtiliter edisserat Diophantus, non docet tamen quomodo talis inveniendus sit quadratus, et cur $2\frac{1}{4}$ sumat potius quam alium quemlibet ex infinitis qui cadunt inter 1 et 3 (soll heißen 2 et 3). Certe, ut ex processu apparet, talis deligendus est quadratus, quo a ternario sublato, relinquatur numerus ex tribus cubis compositus. Id ergo qui fieri possit arte certa, docere debuit Diophantus, neque enim in promptu est si loco quadrati $2\frac{1}{4}$ sumatur quadratus $2\frac{7}{9}$, quomodo residuum de 3, puta $\frac{2}{9}$ dividi possit in tres cubos, eademque de aliis ratio. Quamobrem casu factum videtur, ut sumpserit author $2\frac{1}{4}$. quo de 3 sublato relinquitur $\frac{3}{4}$ ex tribus cubis compositus. Deinde porisma, quod hic assumitur, quale sit non est facile divinare, cum Graeca Diophanti hoc loco mutila

Diophant, um ſeiner Auflöſung eine wiſſenſchaftliche Form zu geben, zeigen müſſen, daß ſein Verfahren in jedem Falle anwendbar ſei und wie man namentlich die Kubikzahl 125 ſo zu wählen habe, daß der Reſt die Differenz zweier Kubikzahlen werde. Das Verdienſt auch über dieſe an und für ſich ſchöne Aufgabe zuerſt das gehörige Licht verbreitet zu haben, hat wiederum der ſchon oft genannte Fermat ſich erworben. Zunächſt hat Fermat das von Diophant ausgeführte Porisma, daß die Differenz zweier Kubi allemal auch die Summe zweier Kubi ſei, allgemein bewieſen [2]), während Bachet es nur für den in der Note erwähnten beſtimmten Fall kannte. Sodann aber hat der Erſtere gezeigt, daß es immer möglich ſei, x ſo zu finden, daß der Ausdruck $3-x^2$ ſich mit Hilfe dieſes Porisma's in die Summe dreier Kubikzahlen zerlegen laſſe. Setzt man nämlich $x=mx-1$, ſo wird $3-x^2=2+2mx-m^2x^2$, und dieſen Ausdruck ſoll man in drei Kubi zerlegen. Es kommt alſo darauf an, zwei Kubi ſo anzunehmen, daß, wenn man ſie von dem gefundenen Ausdrucke ſubtrahirt, für den dritten Kubus eine Formel übrig bleibt, in welcher x nur in der zweiten und dritten Potenz vorkommt, ſo daß man x rational finden kann, wenn man den Reſt gleich einer in x^3 multiplicirten Kubikzahl ſetzt. Es muß alſo die Summe der beiden erſten Kubi die Glieder $2+2mx$ ent-

---

sint. (Es heißt nämlich im Texte: Ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς πορίσμασιν ὅτι πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κ̃υ..., offenbar verſtümmelt; der Sinn kann aber kein anderer ſein als der, den Bachet in ſeiner Überſetzung ausgedrückt hat.) Si vero libeat amplecti quod nostra versione exhibemus, sane docuimus ad secundam quarti. ***Duorum cuborum intervallum dividi posse in duos cubos, dummodo major datorum cuborum excedat duplum minoris.*** Sed quomodo omnium duorum cuborum intervallum dividatur in duos cubos, ignotum mihi adhuc. Nam nec operationes loco citato allatae, nec canon ibidem traditus locum habent, cum duplum minoris cubi excedit majorem. Itaque penes eruditos judicium esto, utrum ex propositionis hujus depravatione hujusmodi difficultates ortum habeant, an vero ipsi Diophanto imputandae sint, qui cum forte quadratum $2\frac{1}{4}$ invenisset, quo de 3 sublato superest $\frac{1}{4}$ compositus ex tribus cubis, arduum problema utcumque potuit explicavit, melioribus destitutus auxiliis.

2) In ſeinem Doctrinae analyticae inventum novum vor Varia opera Mathem. Petri de Fermat und vor der Touloufer Ausgabe Diophant's p. 10. Daſſelbe Verfahren iſt gelehrt in ſeiner Observatio ad Dioph. IV, 2. (zu Bachet's quaestio prima) p. 133. Siehe das folgende Kapitel.

Digitized by Google

halten. Das erlangen wir aber, wenn wir die beiden Kubi ſetzen $(1+mx)^2$ und $(1-\frac{1}{3}mx)^3$. Dann iſt

der erſte Kubus $= 1+3mx+3m^2x^2+m^3x^3$
der zweite $= 1-mx+\frac{1}{3}m^2x^2-\frac{1}{27}m^3x^3$
ihre Summe $= 2+2mx+\frac{10}{3}m^2x^2+\frac{26}{27}m^3x^3$.

Wenn wir nun dieſe Summe von $2+2mx-m^2x^2$ ſubtrahiren, ſo bleibt für den dritten Kubus der Ausdruck $-\frac{13}{3}m^2x^2-\frac{26}{27}m^3x^3$ übrig. Setzen wir dieſen Kubus $=(pmx)^3$, ſo wird $x=-\frac{117}{(27p^3+26)m}$. Nun waren die Wurzeln der drei Kubi $1+mx$, $1-\frac{1}{3}mx$, und pmx; dieſe Wurzeln ſind alſo $\frac{27p^3-91}{27p^3+26}$, $\frac{27p^3+65}{27p^3+26}$, und $-\frac{117p}{27p^3+26}$, die Wurzel des Quadrats, das von 3 abgezogen wurde, war aber $z=mx-1$ oder $1-mx$, es iſt alſo $z=\frac{27p^3+143}{27p^3+26}$. Da nun aber der eine Kubus negativ geworden iſt, ſo haben wir $3-z^2$ nicht geradezu in die Summe dreier Kubikzahlen, ſondern in eine Kubikzahl und in die Differenz zweier andern zerlegt, und wir müſſen alſo vorher noch dieſe Differenz nach dem angeführten Porisma in die Summe zweier Kubikzahlen verwandeln. Aber dieſe von Fermat angegebene Auflöſung iſt nicht allgemein und ſchließt namentlich den Diophantiſchen Fall aus; während nämlich Diophant $z=\frac{3}{2}$ ſetzt, finden wir keinen rationalen Werth für p, wenn wir die gefundene Formel für z dieſem Werthe gleich ſetzen. Es kam, wie wir ſahen, darauf an, zwei Kubi zu bilden, deren Summe die Glieder $2+2mx$ enthält. Da aber das m aus der Rechnung verſchwunden iſt, ſo können wir es gleich von vorne herein als einflußlos $=1$ ſetzen. Wir ſetzen alſo $z=1-x$, ſo wird $3-z^2=2+2x-x^2$. Bilden wir nun die Kubi von $1+kx$ und von $1+lx$, ſo werden deren erſte beiden Glieder $1+3kx$ und $1+3lx$; es ſoll alſo $3k+3l=2$, oder $k+l=\frac{2}{3}$ ſein; ſei $k-l=2n$, ſo iſt $k=\frac{1}{3}+n$, $l=\frac{1}{3}-n$, und wir bilden nun die Kubi von $1+(\frac{1}{3}+n)x$ und $1+(\frac{1}{3}-n)x$, ſo wird der erſte Kubus

$1+(1+3n)x+(\frac{1}{3}+2n+3n^2)x^2+(\frac{1}{27}+\frac{1}{3}n+n^2+n^3)x^3$

der zweite Kubus

$1+(1-3n)x+(\frac{1}{3}-2n+3n^2)x^2+(\frac{1}{27}-\frac{1}{3}n+n^2-n^3)x^3$

alſo ihre Summe

$$2+2x+(\tfrac{2}{3}+6n^2)x^2+(\tfrac{2}{27}+2n^2)x^3.$$

Digitized by Google

Ziehen wir dieſe Summe nun von $2+2x-x^2$ ab, ſo behalten wir für den dritten Kubus die Formel übrig

$$-(\tfrac{5}{3}+6n^2)x^2-(\tfrac{2}{27}+2n^2)x^3.$$

Dieſe ſetzen wir $=p^3x^3$, ſo wird $x=-\frac{\frac{5}{3}+6n^2}{\frac{2}{27}+2n^2+p^3}$

$=-\frac{162n^2+45}{27p^3+54n^2+2}$. Nun war $z=1-x$, und die Wurzeln der drei Kubikzahlen $1+(\frac{1}{3}+n)x$, $1+(\frac{1}{3}-n)x$, und px; demnach iſt $z=\frac{27p^3+216n^2+47}{27p^3+54n^2+2}$

die Wurzel des erſten Kubus $=\frac{27p^3-162n^3-45n-13}{27p^3+54n^2+2}$

" " " zweiten " $=\frac{27p^3+162n^3+45n-13}{27p^3+54n^2+2}$

" " " dritten " $=-\frac{162n^2p+45p}{27p^3+54n^2+2}$

In dieſen Formeln bleibt nur übrig, p und n ſo zu beſtimmen, daß z^2 kleiner als 3 und größer als 2 wird.

Übrigens dürfte vielleicht der mangelhafte Vortrag dieſer Auflöſung nicht auf Rechnung Diophant's, ſondern vielmehr auf Rechnung der Zeit oder irgend eines ſorgloſen Abſchreibers zu ſetzen ſein; ebenſo wie die unvollkommene Behandlung der Aufgaben **II**, 1—5. und einiger andern. Analog der zu enge gezogenen Bedingung $\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{p^6}<1$ iſt die in der Aufgabe **III**, 12.; indem hier zwei Zahlen geſucht werden ſollen, deren Product ein Quadrat iſt, ſagt Diophant: Wenn ich für die beiden Zahlen Quadrate ſuche, ſo wird ihr Product gewiß ein Quadrat ſein. In **III**, 17. wird auf ähnliche Weiſe willkührlich angenommen, daß von drei geſuchten Zahlen zwei Quadratzahlen ſeien.

Reich an Beiſpielen von ſolchen Annahmen, die zwar ſichtbar zum Ziele führen, deren Princip und Veranlaſſung aber von Diophant nicht erläutert wird, iſt das ſechſte Buch. Nehmen wir z. B. die Aufgabe

VI, 3. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß der durch eine Zahl ausgedrückte Flächeninhalt, wenn man eine gegebene Zahl dazu addirt, ein Quadrat wird.

Die gegebene Zahl ſei 5. Geſetzt das Dreieck wäre der Form nach gegeben und hätte die Seiten $3x$, $4x$, $5x$, ſo wird der Flächeninhalt, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt, $6x^2+5$, und das ſoll ein Quadrat ſein. Es ſei gleich $9x^2$, ſo wird $3x^2=5$.

Digitized by Google

Es müßten sich also, wenn x rational werden sollte, die Coefficienten wie Quadratzahlen zu einander verhalten. Wir müssen also ein rechtwinkliges Dreieck und ein Quadrat suchen, so daß, wenn man von dem Quadrate den Flächeninhalt des Dreiecks abzieht, diese Differenz der fünfte Theil eines Quadrats wird, weil 5 die gegebene Zahl ist. — Bis hieher ist das Verfahren ganz verständlich. Setzen wir nämlich die gegebene Zahl a, und die Katheten des Dreiecks mx und nx, so soll mnx^2+a ein Quadrat werden. Dieses Quadrat sei p^2x^2, so wird $x^2=\frac{a}{p^2-mn}$. Es kommt also darauf an, m, n und p so zu bestimmen, daß der Coefficient $\frac{a}{p^2-mn}$ ein Quadrat wird. Anstatt daß nun Diophant, wie er sonst zu thun pflegt, auf eine überzeugende Weise deducirt, wie die Zahlen p, m, n beschaffen sein müssen, schlägt er hier einen ganz eigenthümlichen Weg ein, der zwar, wie der Erfolg zeigt, sicher zum Ziele führt, bei dem man aber nicht einsieht, was ihn bewogen habe, gerade diesen und keinen andern Weg einzuschlagen. Er bildet nämlich das gesuchte Dreieck aus den Zahlen x und $\frac{1}{x}$ (ein rechtwinkliges Dreieck aus zwei Zahlen bilden, πλάσσειν τρίγωνον ὀρθογώνιον ἀπὸ δύο ἀριθμῶν, heißt, die Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate, die eine Kathete gleich der Differenz der Quadrate, und die zweite Kathete gleich dem doppelten Producte der beiden Zahlen setzen); so sind die Katheten $x^2-\frac{1}{x^2}$ und 2, also der Inhalt $x^2-\frac{1}{x^2}$. Das gesuchte Quadrat bildet er von der Wurzel $x+\frac{2a}{x}$, so ist das Quadrat $x^2+4a+\frac{4a^2}{x^2}$, demnach das Quadrat weniger dem Inhalt des Dreiecks $4a+\frac{4a^2+1}{x^2}$, und dieser Ausdruck soll mit a multiplicirt ein Quadrat werden; wenn wir aber mit a multipliciren, so wird er $=4a^2+\frac{4a^3+a}{x^2}$, und multipliciren wir nun noch mit x^2, so soll $4a^2x^2+4a^3+a$ ein Quadrat werden. Wir sehen also, daß die Annahme der Zahlen x und $\frac{1}{x}$ für das Dreieck und $x+\frac{2a}{x}$ für die Wurzel des gesuchten Quadrats sehr kunstvoll so gewählt ist, daß in der zuletzt erhaltenen Formel der Coefficient von x^2 ein Quadrat wird. Aber ist darum

diese

dieſe Annahme überzeugend und ſtellt ſie ſich in der Weiſe, wie ſie vorgetragen iſt, als nothwendig dar? Keinesweges. Wie übrigens nun die Auflöſung zu Ende geführt wird, iſt klar und bedarf keiner weitern Erörterung.

Ähnliche unerklärte, ich möchte ſagen, dogmatiſche Verfahrungsweiſen finden wir in den Aufgaben VI, 4. 5. 6. 8. 10. und öfter. Ein Beiſpiel der Art, welches denſelben Fehler noch mit dem einer ganz willkührlich eingeführten Beſtimmung verbindet, werden wir in dem folgenden Kapitel zu betrachten Gelegenheit finden.

Über die Art, wie Diophant in der Aufgabe VI, 19. die Nebenaufgabe behandelt, eine Kubikzahl zu finden, welche um 2 größer iſt, als eine Quadratzahl, haben wir oben ſchon geſprochen. Hier wollen wir noch einmal die ganze Aufgabe betrachten. Sie heißt

Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß der Inhalt und die Hypotenuſe zuſammen eine Quadratzahl, der Umfang aber eine Kubikzahl ausmacht.

Der Inhalt ſei $= x$, die Hypotenuſe aber irgend ein Quadrat weniger x, z. B. $16 - x$. Da wir den Inhalt x geſetzt haben, ſo iſt das Product der Katheten $2x$; aber $2x$ iſt das Product von x und 2; ſetzen wir alſo eine Kathete 2, ſo iſt die andere x, und der Umfang 18; und das iſt keine Kubikzahl. Aber 18 iſt entſtanden aus der Addition einer Quadratzahl (16) und der Zahl 2. Wir müſſen alſo eine Quadratzahl ſuchen, welche um 2 vermehrt eine Kubikzahl giebt. Nachdem nun Diophant ſein ſchon erörtertes Verfahren angewendet hat, welches durchaus auf keinen zweiten Fall anwendbar iſt, ſondern geradezu auf die beiden Zahlen 25 und 27 hinſteuert, ſubſtituirt er in der Annahme für die Hypotenuſe den Ausdruck $25 - x$ ſtatt $16 - x$; ſo wird, wenn die übrigen Vorausſetzungen dieſelben bleiben, nun der Umfang 27, alſo eine Kubikzahl, und es bleibt nur noch übrig, daß das aus den Seiten 2, x und $25 - x$ beſtehende Dreieck rechtwinklich ſei; darum muß $x^2 + 4 = (25 - x)^2$ ſein, woraus man $x = \frac{621}{50}$ findet. Demnach ſind die Seiten des geſuchten Dreiecks 2, $\frac{621}{50}$ und $\frac{629}{50}$. Die Aufgabe iſt alſo inſofern gelöſt, als Diophant ein Dreieck angiebt, welches die verlangten Eigenſchaften hat. Da die Aufgabe aber unbeſtimmt iſt, ſo gebe man doch einem Schüler auf, auf dem

Digitized by Google

von Diophant gelehrten Wege ein zweites Dreieck zu finden, welches ebenfalls den Forderungen der Aufgabe entspricht. Ich wäre in der That neugierig, zu erfahren, wie er das anstellen wollte, vorausgesetzt, daß ihm die, wie es scheint, Diophant selbst unbekannte Methode, aus der gefundenen Auflösung seiner Nebenaufgabe andere Auflösungen herzuleiten, unbekannt wäre. Diophant verwandelt wiederum die gestellte Aufgabe in eine ganz andere, indem er gleich von vorne herein die eine Kathete als gegeben betrachtet. Wollten wir uns dieser Willkühr enthalten, und das Geforderte allgemeiner darstellen, so würden wir, wenn wir mit Diophant den Inhalt $= x$, die Hypotenuse $= n^2 - x$ setzten, und das Product der Katheten $2x$ in die unbestimmten Factoren, etwa mx und $\frac{2}{m}$ zerlegen. Dadurch kämen wir auf die zwiefache Forderung, daß $(n^2 - x)^2 = m^2x^2 + \frac{4}{m^2}$, und außerdem $n^2 + (m-1)x + \frac{2}{m}$ eine Kubikzahl sein sollte. Wenn wir die erste Gleichung nach x auflösen, so finden wir $x = \frac{-n^2 \pm \sqrt{m^2n^4 - 4 + \frac{4}{m^2}}}{m^2 - 1}$. Aber den Ausdruck hinter dem Wurzelzeichen hat Diophant selbst uns auf eine sehr einfache Weise zwiefach rational zu machen gelehrt, indem wir denselben entweder $= m^2n^4$ oder $= \frac{4}{m^2}$ setzen. Die erste Annahme würde ergeben $m = 1$, würde uns also auf die Diophantische Voraussetzung zurückführen; die zweite dagegen giebt $m = \frac{4}{n^2}$. Dann wird $x = \frac{2n^2}{1 - \frac{4}{n^4}} = \frac{2n^6}{n^4 - 4}$. Setzen wir nun die beiden Werthe für x und m in die zweite Formel, $n^2 + (m-1)x + \frac{2}{m}$, so nimmt diese die Gestalt an $2n^2 + \frac{2n^4(2-n^2)}{n^4-4} = 2n^2 - \frac{2n^4}{n^2+2} = \frac{4n^2}{n^2+2}$, und dieser Ausdruck soll Kubikzahl werden; das wird geschehen, wenn sich verhält $4n^2 : n^2 + 2 = k^3 : l^3$, oder wenn wir für $\frac{l}{k}$ den einfachen Ausdruck p anwenden, wenn $4n^2 : n^2 + 2 = 1 : p^3$, wenn also $4n^2p^3 = n^2 + 2$, also $n^2 = \frac{2}{4p^3 - 1} = \frac{4}{8p^3 - 2}$. Da in diesem Bruche der Zähler bereits Quadratzahl ist, so kommt es nur darauf an, auch den Nenner zu einem Quadrate zu machen, und da sind

Digitized by Google

wir gerade wieder auf die Diophantiſche Zwiſchenaufgabe gelangt, eine Kubikzahl $8p^3$ zu ſuchen, welche um 2 vermindert Quadratzahl wird. Leider wird, wenn wir hier den bekannten Fall anwenden und $8p^3 = 27$ ſetzen, wodurch wir $n = \frac{2}{3}$ erhalten, x negativ, alſo auch die eine durch mx ausgedrückte Kathete negativ, was hier die Bedeutung hat, daß nicht der Umfang, oder die Summe der Hypotenuſe und beider Katheten, ſondern die Summe der Hypotenuſe und der Differenz der Katheten eine Kubikzahl wird. Man muß ſich alſo nach andern Werthen von p umſehen. Übrigens war es hier bloß meine Abſicht, zu zeigen, wie die vorliegende Aufgabe ohne die Diophantiſche willkührliche Annahme auf der einen, und ohne eben ungeheuren Kraftaufwand auf der andern Seite ſich hätte löſen laſſen.

Eine ähnliche Willkühr erlaubt ſich Diophant in der folgenden Aufgabe **VI**, 20. Aber genug hiervon.

Ich hätte unter den Diophantiſchen Auflöſungsmethoden vielleicht noch den

8. Gebrauch des rechtwinkligen Dreiecks

anführen ſollen. Aber die unter dem Namen des rechtwinkligen Dreiecks in rationalen Zahlen bekannte Theorie hat nichts ihr ausſchließlich Eigenthümliches. Die Auffindung eines ſolchen Dreiecks iſt nichts anderes, als eine ganz gewöhnliche Zahlenaufgabe, welche Diophant, ohne den Namen zu nennen, in den Aufgaben **II**, 8. 9. 11. unter verſchiedener Geſtalt löſt, und welche, wie wir bei einer andern Gelegenheit geſehen haben, bereits von Pythagoras berührt, von Platon oder Archytas um etwas ergänzt und von Euklides in einem Lemma zu **X**, 29. der Elemente vollſtändig vorgetragen worden iſt. Die Redensart, ein rechtwinkliges Dreieck finden, iſt in der Arithmetik weiter nichts, als ein abgekürzter Ausdruck für den rein arithmetiſchen Ausſpruch des Satzes, Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl iſt. Diophant bedient ſich dieſer Theorie unter dem abgekürzten geometriſchen Namen ſehr oft, und dieſelbe iſt ſeitdem, namentlich bei den Mathematikern des ſiebzehnten Jahrhunderts, ſehr beliebt geworden. Außerhalb des ſechſten Buchs, deſſen Aufgaben ſämmtlich den Zweck haben, ſolche rechtwinklige Dreiecke

Digitized by Google

unter gewiſſen Bedingungen zu finden, erwähnt und bedient ſich Diophant dieſer Theorie in den Aufgaben III, 22. V, 8. 9. 11. 24. 30.

Hier nun will ich dieſen Gegenſtand abbrechen. Wohl fühle ich, wie unvollkommen und wenig genügend gerade dieſes Kapitel ausgefallen iſt; wohl aber darf ich auch hoffen, wenn irgendwo, ſo hier bei billigen Leſern und Beurtheilern freundliche Nachſicht zu finden. Neben der unendlichen Mannigfaltigkeit der Diophantiſchen Methoden, welche gar keiner erſchöpfenden Darſtellung fähig iſt, dürfte wohl noch der gänzliche Mangel an Vorarbeiten über dieſen Gegenſtand zu meiner Entſchuldigung dienen, wenn es mir hier nicht gelungen iſt, das Weſen des großen Mathematikers in ſeinem wahren Lichte zu zeigen und in ſeine Elemente zu zergliedern. Die Lectüre ſeines Werkes iſt, wie ich ſchon oben erwähnte, das einzige Mittel, welches zu einem vollſtändigen und treuen Bilde und zu der richtigen Würdigung dieſes Vaters der Algebra führen kann, und ſchwerlich hat ſchon irgend Jemanden die darauf verwandte Mühe gereut. Wenn es daher manchem Verehrer dieſes Heroen der Wiſſenſchaft ſcheint, als habe ich demſelben des Lobes nicht genug geſpendet, wenn Mancher in der Aufdeckung auch der Schwächen des Auctors eine ungebührliche Herabſetzung deſſelben ſehen will, ſo kann ich darauf nur erwiedern, daß mein Zweck nicht war, unſerm Auctor nach Verlauf von anderthalb Jahrtauſenden eine Leichenrede zu halten, ſondern Geſchichte zu ſchreiben.

Digitized by Google

Zehntes Kapitel.

Diophant's Porismata.

Bekanntlich iſt oft und vielfach über den eigentlichen Begriff des etwas dunklen Wortes Porisma, πόρισμα, disputirt worden, und es iſt ſo viel klar, daß dieſer Ausdruck bei den Griechiſchen Mathematikern eine zwiefache Bedeutung hat. Zuerſt heißt πόρισμα ein Folgeſatz, corollarium, ein Satz, deſſen Wahrheit aus dem Beweiſe eines andern unmittelbar folgt, der alſo keines eigenen Beweiſes mehr bedarf; und er hat, wie Proklus ſagt, ſeinen Namen daher, weil er ſich ohne unſer Zuthun als Nebengewinn eines wiſſenſchaftlichen Beweiſes ergiebt. In dieſer Bedeutung kommt das Wort ſehr oft in den Euklidiſchen Elementen und in allen ſpätern Schriften vor. Über die zweite Bedeutung dagegen geben uns die Griechiſchen Mathematiker nicht ſo klare Hinweiſungen, und wir ſind hier mehr an ein Errathen, als ein ſicheres Definiren gewieſen, zumal die beiden Schriften des Alterthums, welche den Titel πορίσματα führten, verloren gegangen ſind, nämlich die Porismen von Euklides und von Diophantus. Proklus begnügt ſich anzudeuten, daß der Ausdruck Porisma auch noch in einem andern Sinne gebraucht werde, hält es aber für überflüſſig, genau zu erklären, welcher Sinn dieſes geweſen [1]). Die einzige Auctorität, an die wir

1) Er ſpricht über dieſen Gegenſtand an zwei Stellen; p. 58. 59. (ad Eucl. I, 1.): τὸ δὲ πόρισμα λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν, οἷον τὰ Εὐκλείδει γεγραμμένα πορίσματα· λέγεται δὲ καὶ ἰδίως, ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι συναποφανῇ (Ed. συναφανῇ) θεώρημα, μὴ προθεμένων ἡμῶν, ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασι, ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον. Und p. 80. (ad Eucl. I, 15.) heißt es: ἔν τι τῶν γεωμετρικῶν ἐστιν ὀνομάτων τὸ πό-

Digitized by Google

uns in dieſer Hinſicht mit einiger Sicherheit halten können, iſt Pappus, welcher in der Vorrede zum ſiebenten Buch ſeiner Sammlungen bei Gelegenheit der Porismen Euklid's ſich etwa ſo ausdrückt: „Die Porismen gehören weder zu den Theoremen, noch zu den Problemen, ſondern ſtehen ihrer Form und ihrem Weſen nach zwiſchen beiden mitten inne, ſo daß ſie ſowohl als Theoreme, als auch als Probleme ausgeſprochen werden können. Daher kommt es, daß einige Geometer dieſelben für Theoreme, andere für Probleme gehalten haben, indem ſie ſich an die bloße Form des Satzes hielten. Die Alten aber haben den Unterſchied dieſer drei Gattungen beſſer aufgefaßt, wie aus ihren Definitionen erhellt. Nach ihnen bezweckt ein Theorem die Beweisführung für das, was der Satz ausſpricht; ein Problem die Conſtruction deſſen, was vorgelegt iſt; ein Porisma dagegen bezweckt die Auffindung und Erforſchung des Vorgelegten. Dieſe Definition des Porisma's iſt von den Neuern geändert worden, welche nicht alles aufſuchen können, ſondern auf dieſe Elemente geſtützt nur zeigen, daß das, was geſucht wird, iſt, nicht aber dieſes ſelbſt aufſuchen.“ [2]) Laſſen wir nun

---

ρισμα· τοῦτο δὲ σημαίνει διττόν· καλοῦσι γὰρ πορίσματα, καὶ ὅσα θεωρήματα συγκατασκευάζεται ταῖς ἄλλων ἀποδείξεσιν, οἷον ἕρμαια καὶ κέρδη τῶν ζητούντων ὑπάρχοντα, καὶ ὅσα ζητεῖται μὲν, εὑρέσεως δὲ χρήσει, καὶ οὔτε γενέσεως μόνης, οὔτε θεωρίας ἁπλῆς. ὅτι μὲν γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, θεωρῆσαι δεῖ, καὶ ὄντων δὴ τῶν πραγμάτων ἐστὶν ἡ τοιαύτη γνῶσις, τὴν δὲ γωνίαν δίχα τεμεῖν ἢ τρίγωνον συστήσασθαι, ἢ ἀφελεῖν ἢ θέσθαι, ταῦτα πάντα ποίησίν τινος ἀπαιτεῖ· τοῦ (δὲ) δοδέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν, ἢ δύο δοδέντων συμμέτρων μεγεθῶν τὸ μέγιστον καὶ κοινὸν μέτρον εὑρεῖν, ἢ ὅσα τοιάδε, μεταξύ πώς ἐστι προβλημάτων καὶ θεωρημάτων· οὔτε γὰρ γενέσεις εἰσὶν ἐν τούτοις τῶν ζητουμένων, ἀλλ' εὑρέσεις, οὔτε θεωρία ψιλή· δεῖ γὰρ ὑπ' ὄψιν ἀγαγεῖν καὶ πρὸ ὀμμάτων ποιήσασθαι τὸ ζητούμενον· τοιαῦτα ἄρα ἐστὶ καὶ ὅσα πορίσματα Εὐκλείδης γέγραφε, βιβλία προβλημάτων συντάξας.

2) Pag. 245. der Ausgabe von 1660 nach Commandin's Überſetzung: Horum autem species omnes neque theorematum sunt, neque problematum, sed mediam quodammodo inter haec formam ac naturam habent, ita ut eorum propositiones formari possint, ut theorematum vel ut pro-

Digitized by Google

den weder aus dieſen, noch aus Proklus Worten ganz klar hervorgehenden Sinn, den die Alten mit dem Begriff des Porisma verbunden haben ſollen, als unſern Zweck nicht berührend außer Acht, und halten uns an das, was nach Pappus die Neuern unter Porisma verſtanden wiſſen wollten, ſo ſcheint mir aus der angeführten Stelle hervorzugehen, als hätten die Neuern mit dem Namen der Porismata ſolche Sätze belegt, die neben dem als Theorem ausgeſprochenen Satze noch eine auszuführende Operation oder Conſtruction in ſich ſchließen, mit andern Worten, ſolche Sätze, welche die Möglichkeit einer zu bewerkſtelligenden Operation ausſprechen, die alſo, als Lehrſatz ausgeſprochen, die Ausführung einer Operation, als Aufgabe ausgeſprochen, einen ihre Möglichkeit beſtimmenden Lehrſatz vorausſetzen. Ein ſolches Porisma wäre z. B. der Satz: die Differenz zweier gleichnamigen Potenzen durch die Differenz ihrer Wurzeln dividiren. Ebenſo aber kann man die Operation als bereits vollzogen vorausſetzen, und den Satz drittens als Theorem ſo ausſprechen: die Differenz zweier gleichnamigen Potenzen, durch die Differenz ihrer Wurzeln dividirt, giebt zum Quotienten die Summe der um einen Grad niedrigeren Potenzen und aller in geometriſcher Progreſſion zwiſchen denſelben liegenden Glieder.

Dieſer Gattung nun gehört eins der drei Diophantiſchen Porismen, das V, 19. citirte, entſchieden an, wie wir ſogleich ſehen werden, nicht aber die beiden andern V, 3. 5. citirten. Dieſe beiden letztern lehren reſpective zwei und drei Zahlen bilden, welche

---

blematum. quo factum est, ut ex multis Geometris alii quidem ea genere esse theoremata, alii vero problemata opinati sint, dum ad solam tantum propositionis formam respicerent. Horum autem trium differentiam veteres multo melias cognovisse ex definitionibus perspicuum est. dixerunt enim theorema esse, quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem. Problema, quod affertur in constructionem propositi. Porisma vero, quod proponitur in porismum, hoc est, in inventionem et investigationem propositi. immutata autem est haec porismatis definitio a junioribus, qui nequeunt omnia investigare, sed his elementis utuntur, et ostenduut solummodo quod hoc est, quod quaeritur, non autem illud ipsum investigant. cumque ex definitione ipsa et ex iis, quae nobis tradita sunt, redarguerentur ab accidente sic porisma definierunt. Porisma est quod hypothesi deficit a locali theoremate. etc.

Digitized by Google

specielle Beziehungen zu zwei von Diophant gestellten Aufgaben haben. Fassen wir diese Erscheinung zusammen mit dem Umstande, daß Diophant außerdem eine bedeutende Anzahl von Sätzen als bekannt citirt, ohne ausdrücklich die Porismen zu nennen, und daß diese Sätze unter einander sehr verschiedener Art sind und mit den drei aus den Porismen erwähnten bald mehr bald weniger Ähnlichkeit haben, so dürften wir wohl zu den Schlüssen berechtigt sein, daß Diophant den Begriff der Porismen in einem weiteren, als dem gewöhnlichen Sinne gebraucht und daß er mit diesem Titel eine Sammlung von Lehrsätzen aus der Zahlenlehre belegt habe, die mit seinen Büchern arithmetischer Aufgaben in einer engen Verbindung standen. Da nun einerseits ein Theil dieser Sätze, wie wir sehen werden, ganz specielle Wahrheiten enthält, die ohne weiteres wissenschaftliches Interesse zu haben nur gerade für die eine oder die wenigen Aufgaben berechnet sind, in welchen der Verfasser von ihnen Gebrauch macht, andrerseits aber der Verfasser der Aufgaben immer ohne weitere Erklärung geradezu auf diese Sätze verweist, und dieselben nicht nur als bekannt, sondern auch als dem Leser zur Hand seiend voraussetzt: so ergiebt sich daraus die ziemlich wahrscheinliche Hypothese, daß diese unter dem besondern Titel der Porismen citirte Sammlung von Sätzen aus der Zahlentheorie ein integrirender Theil des ganzen, Ἀριθμητικά benannten, Werks gewesen sei und eins oder mehre von den auf dem Titel und in der Einleitung angekündigten dreizehn Büchern, in die das ganze Werk getheilt sein sollte, ausgemacht habe. Wir haben oben in unserm sechsten Kapitel gesehen, daß diese Sammlung dann nicht füglich anderswo, als zwischen dem ersten und zweiten Buche der Aufgaben gestanden haben könne. Aber diese Untersuchungen gehören nicht mehr hieher. Wir wollen, statt uns dabei weiter aufzuhalten, zu der nähern Erörterung der Lehrsätze schreiten, welche Diophant anführt oder voraussetzt.

Der erste Platz gebührt billiger Weise den drei namentlich angeführten Porismen. Das erste gehört zu

V, 3. Die Aufgabe heißt: Zu einer gegebenen Zahl drei andere zu finden, so daß sowohl jede von ihnen, als auch das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt. Und nun heißt es: *καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ αὐτοῦ δοθέντος ποιῇ*

τετράγωνον, γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ἐκτίθεμαι οὖν δύο τετραγώνους τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς u. ſ. w. „Und da wir in den Porismen den Satz haben, daß, wenn zwei Zahlen ſo beſchaffen ſind, daß ſowohl jede von ihnen als das Product beider ein Quadrat wird, wenn man dieſelbe gegebene Zahl dazu addirt, dieſe Zahlen dann aus zwei auf einander folgenden Quadraten entſtanden ſind, ſo u. ſ. w.“ In Formeln ausgedrückt ſagt alſo der Satz: wenn $x+a=m^2$, $y+a=n^2$ und $xy+a=p^2$ iſt, ſo iſt $m=n+1$. Nun fragt ſich, ob der Satz in dieſer Geſtalt ganz allgemein wahr iſt. Allerdings läßt ſich mit Umkehrung der Ausſage ſehr leicht beweiſen, daß wenn m und n um 1 verſchiedene Zahlen ſind, unmittelbar aus den erſten beiden Bedingungen die dritte folge. Haben wir nämlich die Gleichungen $x+a=m^2$, $y+a=(m+1)^2$, ſo wird $x=m^2-a$, $y=(m+1)^2-a$, alſo

$$\begin{aligned} xy+a &= m^2(m+1)^2-a[m^2+(m+1)^2-1]+a^2 \\ &= m^2(m+1)^2-2am(m+1)+a^2 \\ &= [m(m+1)-a]^2 \end{aligned}$$

Wir haben alſo auf ſynthetiſchem Wege gefunden, daß, wenn man zwei Zahlen x, y ſo annimmt, daß man von zwei aufeinanderfolgenden Quadraten dieſelbe Zahl a abzieht, dann auch das Product der beiden Zahlen, wenn man a hinzu addirt, ein Quadrat wird. Es iſt aber die Frage, ob es außer dieſem Falle nicht noch andere Weiſen gebe, welche x und y beſtimmen lehren; zu dem Ende wollen wir den Satz analytiſch betrachten. Sei alſo $x=m^2-a$, $y=n^2-a$, ſo wird

$$\begin{aligned} xy+a &= m^2n^2-m^2a-n^2a+a+a^2 \\ &= m^2n^2-a(m^2+n^2-1)+a^2=p^2 \end{aligned}$$

Dieſer Ausdruck wird Quadrat werden, wenn das Quadrat des Coefficient von a gleich dem vierfachen erſten Gliede iſt, das heißt, wenn wir $p=mn-a$, $p^2=m^2n^2-2amn+a^2$ ſetzen. Dann wird alſo $m^2+n^2-1=2mn$, oder $m^2-2mn+n=1$, $m-n=\pm 1$. Das iſt aber gerade der Diophantiſche Satz. Betrachten wir nun aber die Gleichung

$$m^2n^2-am^2-an^2+a+a^2=p^2$$

als eine unbeſtimmte Gleichung, in welcher wir einen Werth der Unbekannten m, nämlich $n\pm 1$, gefunden haben, und verſuchen wir, aus dieſem bekannten Werthe andere herzuleiten, ſo werden wir $m=z+(n\pm 1)$ ſetzen müſſen. Dann verwandelt ſich unſere Gleichung in folgende

Digitized by Google

$$(n^2-a)z^2+2(n\pm1)(n^2-a)z+[n(n\pm1)-a]^2=p^2$$

deren Auflöſung ohne Schwierigkeit erlangt werden kann, da hier das abſolute Glied ein Quadrat iſt. Wenn wir nun $p=(n^2-a)Qz-[n(n\pm1)-a]$ ſetzen, ſo erhalten wir nach der Ausführung, die ich dem Leſer überlaſſe,

$$z=\frac{2(n\pm1)(nQ+1)-2aQ}{(n^2-a)Q^2-1}$$

$$\text{alſo}\quad m=\frac{(n\pm1)(nQ+1)^2-aQ[(n\pm1)Q+2]}{(n^2-a)Q^2-1}$$

Nehmen wir Beiſpiels halber $a=5$, wie bei Diophant, und etwa $n=4$, ſo müßte nach der Diophantiſchen Regel m entweder $=3$ oder $=5$ ſein. Demnach wäre $y=11$, und x entweder $=4$ oder $=20$; alſo xy entweder $=44$ oder $=220$, und beide Zahlen werden Quadrate, wenn man 5 dazu addirt. Unſere Formel aber ſubſtituirt uns für dieſe Annahme noch unendlich viele andere Werthe für m, wenn wir dem Q, welches jede beliebige ganze und gebrochene Zahl ſein kann, ſucceſſive andere Werthe geben. Setzen wir z. B. $Q=1$, ſo wird $m=9$, alſo $x=81-5=76$, $xy=836$, $xy+5=841=(29)^2$. Es folgt aus dieſer Deduction, daß das Diophantiſche Porisma, ſo wie er es ausgeſprochen hat, nicht richtig iſt, indem m und n nicht nothwendig zwei aufeinanderfolgende Zahlen ſind.

In der Aufgabe werden nun aber drei Zahlen geſucht, und es treten zu den drei durch das Porisma erledigten Bedingungen noch drei andere hinzu; es ſollen nämlich, wenn die dritte Zahl z iſt, auch noch die Ausdrücke $z+a$, $xz+a$, $yz+a$ Quadrate werden. Nun werden aber unter der Vorausſetzung $n=m+1$ die beiden letzten Bedingungen erfüllt, wenn man $z=2(x+y)-1=2m^2+2m+1-4a$ ſetzt. Es wird dann nämlich

$$xz+a=[m(2m+1)-2a]^2$$

$$yz+a=[m(2m+3)-(2a-1)]^2$$

und wahrſcheinlich hat das Zutreffen dieſer beiden Bedingungen einen entſcheidenden Einfluß auf die Geſtalt des Porisma's gehabt.

Bei der folgenden Aufgabe V, 4., welche die ſechs analogen Formeln $x-a$, $y-a$, $z-a$, $xy-a$, $xz-a$, $yz-a$ zu Quadraten zu machen befiehlt, wendet Diophant, ohne ein Porisma oder ſonſt einen Satz namhaft zu machen, die ganz ähnliche Vorausſetzung an, daß nämlich $x-a=m^2$, $y-a=(m+1)^2$, und ebenſo die folgende, daß $z=2(x+y)-1$ ſein müſſe, wodurch wieder fünf Bedingungen erledigt werden.

Digitized by Google

Bachet's Erweiterung des von Diophant gebrauchten Porisma's ist als durchaus verunglückt zu bezeichnen. Sein Satz lautet Porismatum lib. II. prop. 11. so: Si a duobus quadratis auferatur idem numerus sigillatim, et residua per intervallum laterum dividantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu, adscito numero qui a quadratis detractus est, quadratus evadit. Der Satz ist zwar ganz wahr, indem er sagt, daß die Formel $\frac{m^2-a}{m-n}\cdot\frac{n^2-a}{m-n}+a$ ein Quadrat wird; wenn wir also $x=\frac{m^2-a}{m-n}$, $y=\frac{n^2-a}{m-n}$ setzen, so wird $xy+a$ ein Quadrat sein. Aber nun wird weder $x+a$, noch $y+a$ ein Quadrat. Bachet hat also, indem er von den gesuchten drei Bedingungen eine allgemein löst, die beiden andern aufgegeben. Dasselbe gilt von den folgenden ähnlichen Sätzen 12—14.

Wir gehen zu dem zweiten Porisma über, welches zu der Aufgabe gehört

V, 5. Drei Quadratzahlen zu finden, so daß das Product von je zweien, sowohl wenn man beide Factoren, als wenn man die dritte Zahl hinzu addirt, ein Quadrat werde. Καὶ ἔχομεν πάλιν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς, ὃς ὢν δι πλασίων συναμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, τρεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. „Und wir haben abermals in den Porismen den Satz, daß, wenn man zu zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen eine andere Zahl nimmt, welche um zwei größer ist als die doppelte Summe jener beiden, man dann drei Zahlen von der Beschaffenheit hat, daß das Product von je zweien sowohl wenn die Summe der beiden multiplicirten, als auch wenn die dritte Zahl dazu addirt wird, ein Quadrat wird." Durch dieses Porisma ist also die Aufgabe schon insoweit gelöst, daß es nur noch darauf ankommt, diese dritte Zahl zu einem Quadrat zu machen. Der Satz sagt also, wenn man die drei Zahlen x^2, $(x+1)^2$, $4x^2+4x+4$ hat, so wird das Product von je zweien ein Quadrat, sowohl wenn die Summe beider, als auch wenn die dritte dazu addirt wird. In der Bearbeitung und Verallgemeinerung dieses Porisma's ist Bachet nicht glücklicher gewesen, als bei dem vorigen; er dehnt nämlich den Diophantischen Satz in seinem

Digitized by Google

Porismatum lib. II. prop. 16. ſo aus: Datis duobus quadratis. si sumatur duplum summae illorum, et quadrati intervalli laterum: habentur tres numeri, quorum bini quem producunt mutuo ductu, is si adsumat productum ex quadrato intervalli laterum, sive in amborum summam, sive in reliquum, quadratum facit. Das heißt, wenn man zwei Quadrate m^2, n^2 hat, und dazu als dritte Zahl $z = 2(m^2+n^2)+2(m-n)^2$ nimmt, ſo ſind folgende ſechs Formeln Quadrate:

$$m^2n^2+(m-n)^2(m^2+n^2),\quad m^2n^2+(m-n)^2z$$
$$m^2z+(m-n)^2(m^2+z),\quad m^2z+(m-n)^2n^2$$
$$n^2z+(m-n)^2(n^2+z),\quad n^2z+(m-n)^2m^2$$

Zwar haben wir hier einen Satz, der allgemeiner iſt als das von Diophant beigebrachte Porisma, der aber zur Auflöſung der vorgelegten Aufgabe nur dann geeignet wird, wenn man $m-n=1$ ſetzt, das heißt, wenn man ihn wieder auf jenes Porisma reducirt. Indeß muß ich geſtehen, daß auch ich mir nicht getraue, den Diophantiſchen Satz zu verallgemeinern.

Eine zweite Anwendung dieſes Porisma's macht Diophant bei der folgenden Aufgabe

V, 6. Drei Zahlen zu finden, ſo daß jede von ihnen um 2 vermindert ein Quadrat wird, außerdem aber das Product von je zweien ein Quadrat wird, ſowohl wenn man die Summe beider, als wenn man die dritte Zahl davon ſubtrahirt.

Um dieſer Aufgabe zu genügen, darf man nach Diophant nur Zahlen annehmen, deren jede um 2 größer iſt als die Zahlen der vorigen Aufgabe; ſetzt man alſo die drei geſuchten Zahlen x^2+2, $(x+1)^2+2$, x^2+4x+6, ſo lehrt die Probe, daß alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden, und daß nur noch nöthig iſt, die letzte Zahl -2, alſo die Formel $4x^2+4x+4$ zu einem Quadrate zu machen. Wollte man ſtatt der in der Aufgabe gegebenen Zahl 2 im Allgemeinen a ſetzen, ſo läßt ſich leicht zeigen, daß a keinen andern Werth als eben 2 haben kann.

Das dritte Porisma haben wir ſchon einmal in den Händen gehabt; es ſteht in der Auflöſung der Aufgabe V, 19., und heißt ohne Zweifel ſo: Die Differenz zweier Kubikzahlen läßt ſich immer auch in die Summe zweier Kubikzahlen zerlegen. Diophant will, wie wir oben geſehen haben, den Bruch $\frac{3}{4}$ oder den gleichgeltenden $\frac{162}{216}$ in drei Kubi zerlegen, findet aber ſtatt

Digitized by Google

dessen $\frac{162}{216} = \frac{125}{216} + \frac{64}{216} - \frac{27}{216}$, also die Summe von einem Kubus und der Differenz zweier andern Kubi. Und darauf heißt es in dem Texte: ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ πῦ... Es waltet indeß bei der Ergänzung dieser verstümmelten Stelle durchaus kein Zweifel ob, da der Sinn nur einer sein kann. Da aber Diophant die wirkliche Zerlegung der Differenz $\frac{64}{216} - \frac{27}{216}$ in die Summe zweier Kubi nicht ausführt, sondern in dieser Hinsicht sich begnügt, auf die Porismen zu verweisen, so wissen wir nicht, wie sein Verfahren beschaffen und welcher Grad von Allgemeinheit demselben eigen gewesen sei. Unter den Neueren hat zuerst Vieta, einer der ersten Beförderer der Diophantischen Analysis in Europa, wahrscheinlich durch diese Stelle dahin geführt, diese und zwei ähnliche Aufgaben gelöst. Die drei Aufgaben stehen am Ende des vierten Buchs seiner Zetetica, und lauten so:

1. ***Datis duobis cubis, invenire numero*** (d. h. in rationalen Zahlen, ἐν ἀριθμοῖς) ***duos alios cubos, quorum summa aequalis sit differentiae datorum.***

Wenn $a^3 - b^3 = x^3 + y^3$ sein soll, so findet er $x = \frac{a(a^3 - 2b^3)}{a^3 + b^3}$ und $y = \frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 + b^3}$. Dann folgt die umgekehrte Aufgabe

2. ***Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum differentia aequet summam datorum.***

Wenn $a^3 + b^3 = x^3 - y^3$, so findet er $x = \frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}$ und $y = \frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 - b^3}$. Diese beiden Aufgaben lösen zugleich in zwei verschiedenen Formeln die Aufgabe, einen gegebenen Kubus auf unzählige Weise in die Summe dreier Kubi zu zerlegen.

3. ***Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum differentia aequet differentiam datorum.***

Wenn $a^3 - b^3 = x^3 - y^3$, so ist $x = \frac{b(2a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$, $y = \frac{a(2b^3 - a^3)}{a^3 + b^3}$; und dadurch ist zugleich die Aufgabe gelöst, die Summe zweier Kubi in die Summe zweier andern Kubi zu zerlegen.

Betrachten wir nun zunächst die erste Aufgabe, so ist klar, daß der Werth für x negativ werden wird, wenn $a^3 < 2b^3$ ist. Daher

Digitized by Google

eben rührt der Scrupel, den Bachet in seiner Anmerkung zu der Diophantischen Aufgabe ausspricht; und auch in seinem Commentar zur zweiten Aufgabe des vierten Buchs, wo er die drei Vieta'schen Aufgaben ausführt, fügt er die Determination hinzu, daß das Doppelte des kleinern gegebenen Kubus nicht größer sein dürfe, als der größere. Wenn wir aber die dritte Aufgabe ins Auge fassen, so ergiebt sich daraus gerade die umgekehrte Determination; damit hier nämlich y positiv werde, muß gerade $2b^3 > a^3$ sein. Demnach ergänzen die erste und dritte Aufgabe einander vollständig in der Art, daß in jedem Falle, wenn die eine von ihnen ein negatives Resultat giebt, die andere ein positives liefert. Auf diese Bemerkung hat Fermat sein Verfahren gegründet, die Differenz irgend zweier Kubi in die Summe zweier Kubi zu zerlegen, indem, wenn der größere Kubus kleiner ist als das Doppelte des kleinern, er sich zuerst der dritten Formel bedient und die gegebene Differenz zweier Kubi in die Differenz zweier andern zerlegt; diese zweite Differenz dann zerlegt er nach der ersten Formel in die Summe zweier Kubi. Demnach ist die von Diophant geforderte Zerlegung wirklich in *allen* Fällen möglich. Die Stellen aus Fermat's Schriften, in welchen er diese Theorie berührt, habe ich in der Note 2. des vorigen Kapitels angeführt.

Nach Beleuchtung dieser drei als Porismen namhaft gemachten Sätze wenden wir uns zu den übrigen Zahlensätzen, von denen Diophant bei seinen Auflösungen Gebrauch macht. Alle diese Sätze lassen sich in zwei große Klassen theilen, von denen die erste Klasse solche Sätze enthält, die man identische Formeln nennt, und welche zum Theil algebraische Übertragungen der im zweiten Buche der Euklidischen Elemente geometrisch ausgesprochenen Wahrheiten sind; die zweite Klasse dagegen solche Sätze in sich begreift, die sich auf die Zerlegung der Zahlen in Quadratzahlen beziehen.

Über die Sätze der ersten Klasse werden wir zum größern Theil flüchtig hinwegeilen können, und ich führe die meisten derselben bloß der Vollständigkeit wegen hier an.

1.) $x(4x \pm 1) \mp x$ ist allemal ein Quadrat. II, 27. 28.

2.) $x^2 + y^2 \pm 2xy$ ist immer ein Quadrat. II, 31. 32. IV, 17. — Eukl. II, 4.

3.) $x^2 + (2x + 1)$ und $x^2 - (2x - 1)$ sind immer Quadrate. II, 33. 34.

Digitized by Google

4.) $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+ab$ ist immer ein Quadrat. Ist also eine Zahl A auf verschiedene Weise das Product zweier andern, ab, cd, ef, so sind $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, $\left(\frac{c-d}{2}\right)^2$, $\left(\frac{e-f}{2}\right)^2$ u. s. w. lauter Quadrate, die zu A addirt wieder Quadrate zur Summe geben. **II**, 35. 36. **III**, 12. 14. **IV**, 6. 14. 17. **V**, 30. 31. — Eukl. **II**, 5.

5.) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab$ ist immer ein Quadrat. **III**, 13. **IV**, 18.

6.) $4ab+(a-b)^2$ ist immer ein Quadrat. (Identisch mit 4.) **IV**, 20.

7.) $a^2(a+1)^2+a^2+(a+1)^2$ ist immer ein Quadrat. **III**, 17.

8.) $a(a^2-a)+a+(a^2-a)$ ist immer ein Kubus. **IV**, 30.

9.) Wenn $2xy$ und $2xy-(x^2-y^2)$, oder $2xy$ und x^2+y^2-2xy zugleich Quadrate sein sollen, dann ist $x=2y$. **II**, 32. **VI**, 12. Beide Sätze sind zu enge ausgesprochen. Da in dem letztern Falle die zweite Formel ihrer Natur nach Quadrat ist, so ist weiter nichts nöthig, als das $x=2n^2y$ sei, damit auch $2xy$ ein Quadrat werde. Für den ersten Fall haben wir zunächst dieselbe Bedingung; es soll $2xy$ Quadrat werden; also muß x die Form $2n^2y$ haben. Es soll aber auch noch $2xy-(x^2-y^2)$ oder $y^2+2xy-x^2$, das heißt, wenn man $x=2n^2y$ substituirt, $y^2+4n^2y^2-4n^4y^2$, also auch $1+4n^2-4n^4$ ein Quadrat werden. Da nun hier der Fall $n=1$, welcher die Formel zum Quadrat macht, bekannt ist, so kann man successive andere Werthe für n finden, wenn man $z-1$ für n substituirt. Ein solcher Werth ist z. B. $n=\frac{2}{4}\frac{1}{1}$.

10.) $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$. Dieser Satz spielt bei Diophant eine eigenthümliche Rolle. Er ist nirgend geradezu ausgesprochen, obgleich er aus Eukl. Elem. **IX**, 35. längst in noch viel allgemeinerer Gestalt bekannt war. Ja die Art, wie die Aufgaben **IV**, 12. 13. gelöst sind, scheint sogar anzudeuten, als ob Diophant den Satz nicht gekannt habe. Die Aufgabe 12. lehrt zwei Kubikzahlen finden, deren Differenz der Differenz ihrer Wurzeln gleich ist, und Diophant führt diese Aufgabe auf die Bedingungsaufgabe, zwei Kubikzahlen zu finden, deren Differenz und Differenz der Wurzeln sich zu einander wie zwei Quadratzahlen verhalten. Nach der Formel wäre also weiter nichts zu thun, als zwei Zahlen zu suchen,

Digitized by Google

ſo daß die Summe ihrer Quadrate zu ihrem Producte addirt eine Quadratzahl gäbe, eine Aufgabe, die keine Schwierigkeit hat und die Diophant ſelbſt V, 7. löſt. Statt dieſer allgemeinen Auflöſung geht Diophant von dem ſpeciellen Falle aus, daß die Differenz der Wurzeln bereits an und für ſich Quadratzahl ſei, z. B. 1, und ſucht nun zwei einander zunächſt liegende Kubi, deren Differenz ein Quadrat iſt. Ebenſo in der folgenden Aufgabe. Nichtsdeſtoweniger können wir uns überzeugen, daß Diophant die Formel $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$ gekannt und gebraucht habe, wenn wir uns die Mühe geben wollen, ein wenig zwiſchen den Zeilen zu leſen. Wir betrachten zu dem Ende die ſehr aphoriſtiſch behandelte Aufgabe V, 8. Drei rechtwinklige Dreiecke zu finden, welche einen gleichen Flächeninhalt haben. Die Auflöſung iſt wörtlich folgende: „Zuerſt muß man zwei Zahlen ſuchen, ſo daß ihr Product ſammt der Summe ihrer Quadrate ein Quadrat ausmacht. Das iſt aber ſchon (V, 7.) gezeigt worden, und es ſind die Zahlen 3 und 5, deren Product ſammt der Summe ihrer Quadrate dem Quadrate von 7 gleich iſt. Nun bilde ich drei rechtwinklige Dreiecke, das eine aus den Zahlen 7 und 3, das andere aus den Zahlen 7 und 5, und das dritte aus den Zahlen 7 und der Summe der beiden gefundenen, alſo aus 7 und 8. Die Dreiecke werden alſo ſein 40, 42, 58, 24, 70, 74, und 15, 112, 113, und alle drei Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt 840." — Allerdings liegt am Tage, daß dieſes Verfahren drei ſolche Dreiecke liefert, wie die Aufgabe verlangte; aber Diophant ſagt auch nicht ein Wörtchen über das Princip, welches ſeinem Verfahren zum Grunde liegt. Wir wollen verſuchen, uns dieſes ſelbſt zu entwickeln. Wenn wir aus drei Paaren von Zahlen m, n; p, q; r, s drei rechtwinklige Dreiecke bilden, ſo werden die Katheten (die uns hier allein angehen), in dem erſten $2mn$ und m^2-n^2, in dem zweiten pq und p^2-q^2, in dem dritten $2rs$ und r^2-s^2, alſo die drei Flächenräume $mn(m^2-n^2)$, $pq(p^2-q^2)$, $rs(r^2-s^2)$, und dieſe drei Ausdrücke ſollen einander gleich werden. Vergleichen wir nun dieſe drei Formeln mit dem Diophantiſchen Verfahren, ſo haben wir geſehen, daß in den drei Paaren von Zahlen, von denen die Dreiecke gebildet wurden, eine Zahl, 7, allen gemeinſchaftlich war. Das veranlaßt uns zu der Vermuthung, daß Diophant in dieſen allgemeinen Formeln zur Vereinfachung derſelben den drei Zahlenpaaren eine gemein-

Digitized by Google

meinſchaftliche Zahl gegeben habe. Nehmen wir alſo an, es ſei $m=p=s$, ſo können wir dieſen gemeinſchaftlichen Factor wegwerfen, und wir behalten als einander gleich zu ſetzen die drei Formeln $n(m^2-n^2)$, $q(m^2-q^2)$, $r(r^2-m^2)$. Es iſt alſo zunächſt

$$m^2n-n^3=m^2q-q^3$$

$$\text{alſo}\quad m^2=\frac{n^3-q^3}{n-q}=n^2+nq+q^2$$

Da haben wir den Grund der erſten Diophantiſchen Vorausſetzung, warum man nämlich zuerſt zwei Zahlen, n und q, ſuchen müſſe, ſo daß ihr Product ſammt der Summe ihrer Quadrate ein Quadrat gebe. Die Wurzel dieſes Quadrats iſt m, und die beiden erſten Dreiecke werden gebildet aus den Zahlen m, n und m, q. Nun bleibt nur noch p zu beſtimmen übrig. Zu dem Ende ſetzen wir die beiden letzten Ausdrücke einander gleich,

$$q(m^2-q^2)=r(r^2-m^2)$$

$$\text{nun iſt}\quad m^2=n^2+nq+q^2$$

$$\text{alſo}\quad m^2-q^2=n^2+nq$$

$$\text{folglich}\quad q(n^2+nq)=r(r^2-n^2-nq-q^2)$$

$$q(n^2+nr)+q^2(n+r)=r(r^2-n^2)$$

$$=r(r+n)(r-n)$$

wenn man alſo Alles durch $r+n$ dividirt, wird

$$qn+q^2=r(r-n)=r^2-rn$$

$$(q+r)n=r^2-q^2=(r+q)(r-q)$$

$$\text{folglich}\quad r=q+n$$

Darum wird das dritte Dreieck gebildet aus derſelben Zahl m und der Summe der beiden vorhergefundenen $n+q=r$. Leuchtet nun gleich ein, daß Diophant's Auflöſung dieſer Aufgabe auf ſehr particulären Vorausſetzungen beruht [3]), ſo haben wir doch daraus ent-

---

3) Bedeutend erweitert iſt dieſe Theorie von Fermat in ſeiner Observatio ad V, 8. Er lehrt daſelbſt nicht nur beliebig viele rationale rechtwinklige Dreiecke finden, welche alle einen gleichen Flächeninhalt haben, ſondern dehnt dieſe Methode auch auf einen gegebenen Flächenraum aus, oder was daſſelbe iſt, er lehrt, wie man unzählige rechtwinklige Dreiecke finden könne, welche alle gleichen Flächenraum mit einem gegebenen haben. Seine Methode iſt einfach die: wenn z die Hypotenuſe, b und d die Katheten des gegebenen Dreiecks ſind, ſo bilde man ein neues Dreieck aus den Zahlen z^2 und $2bd$, und dividire die gefundenen Seiten durch $2z(b^2-d^2)$. Nach derſelben Methode bildet man aus dem zweiten das dritte, aus dem dritten das vierte, u. ſ. w. Indeß iſt auch dieſe Methode nicht allgemein.

Digitized by Google

nommen, daß ihm die Formel $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$ nicht unbekannt gewesen sein kann. Nicht so glücklich sind unsere Nachforschungen über die analoge Formel

11.) $\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$ gewesen. In den Sätzen V, 10. 11. wendet er sie nicht an. Da er aber auch in den entsprechenden Sätzen V, 12. 13. die vorige Formel nicht gebraucht, die er doch gekannt hat, so können wir aus dieser Nichtanwendung nicht zu voreilige Schlüsse ziehen.

Wichtiger und interessanter aber, als diese rein formellen Sätze sind die Sätze der zweiten Klasse, welche von der Zusammensetzung der Zahlen aus Quadraten oder von der Zerlegung derselben in Quadrate handeln. Diese Sätze haben bei dem ersten Erscheinen Diophant's, namentlich aber seit Fermat's geistreichen Untersuchungen über dieselben, bei den Mathematikern ein großes Aufsehen erregt und ihnen manches Kopfbrechen verursacht, und mehre derselben sind bis in die neuesten Zeiten hin Gegenstände gelehrter und scharfsinniger Forschungen geblieben. Nicht alle diese Sätze sind aber bei Diophant offen ausgesprochen, sondern sie ergaben sich zum Theil nur aus seinen Determinationen. Es ist also bei manchen schwer zu entscheiden, ob er bloß versuchsweise die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Zerlegung einer gewissen Klasse von Zahlen in zwei oder drei Quadrate gekannt habe, oder ob er im Besitze eines vollständigen wissenschaftlichen Systems über diesen schwierigen Gegenstand gewesen sei; unsicherer wenigstens als irgendwo ist bei den sehr vereinzelten Winken, die Diophant giebt, hier eine auf ein sogenanntes argumentum a silentio gestützte Hypothese. Ich will nun die einzelnen Sätze nicht in der Reihenfolge, wie sein Werk sie uns darbietet, sondern in wissenschaftlicher Ordnung zusammenstellen, um den Überblick über das Vorhandene zu erleichern, und zwar betrachten wir zuerst die Zusammensetzung der Zahlen aus zwei, dann die aus drei und endlich die aus vier Quadraten.

1. Zusammensetzung der Zahlen aus zwei Quadraten.

II, 8. 9. Jede Quadratzahl läßt sich auf unzählige Weise in die Summe zweier Quadrate zerlegen.

II, 10. Eine Zahl, welche an und für sich die Summe

Digitized by Google

von zwei Quadraten ist, läßt sich auf unzählige Weise in zwei andere Quadrate zerlegen.

Über diese beiden Elementarsätze, von denen Diophant sehr häufig Gebrauch macht, darf ich nur das erwähnen, daß hier bei der unendlichen Zerlegbarkeit nicht immer von ganzen Zahlen die Rede sein kann.

III, 22. Wenn man zwei ganze Zahlen, deren jede die Summe von zwei Quadraten ist, mit einander multiplicirt, so läßt sich das Product auf zwiefache Weise in die Summe zweier Quadrate (in ganzen Zahlen) zerlegen.

Es ist nämlich $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$
$$= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

Die Erweiterung, welche Fermat diesem Satze gegeben hat, ist bekannt und kann in seiner Anmerkung zu der bezeichneten Aufgabe nachgesehen werden. Diophant bedient sich dieses Satzes, um vier rationale rechtwinklige Dreiecke über derselben Hypotenuse zu construiren; sein Verfahren ist folgendes: Er geht von zwei beliebig gewählten Dreiecken aus, deren Seiten sind

$$m^2+n^2,\quad m^2-n^2,\quad 2mn$$
$$p^2+q^2,\quad p^2-q^2,\quad 2pq$$

und multiplicirt zunächst die Seiten eines jeden mit der Hypotenuse des andern, so erhält er zunächst zwei den angenommenen ähnliche Dreiecke für die gemeinschaftliche Hypotenuse $(m^2+n^2)(p^2+q^2)$. Sodann zerlegt er dieses Product auf die oben angegebene Weise zweimal in zwei Quadrate, nämlich in $(mp+nq)^2+(mq-np)^2$ und in $(mp-nq)^2+(mq+np)^2$ und bildet zwei neue Dreiecke aus den Wurzeln dieser Quadrate, das eine also aus den Zahlen $mp+nq$ und $mq-np$, das andere aus den Zahlen $mp-nq$ und $mq+np$. Demnach erhält er folgende vier Dreiecke:

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2),\quad (m^2-n^2)(p^2+q^2),\quad 2mn(p^2+q^2)$$
$$=\qquad =\qquad (m^2+n^2)(p^2-q^2),\quad 2pq(m^2+n^2)$$
$$=\qquad =\qquad 4mnpq+(m^2-n^2)(p^2-q^2),$$
$$2(mp+nq)(mq-np)$$
$$=\qquad =\qquad 4mnpq-(m^2-n^2)(p^2-q^2),$$
$$2(mp-nq)(mq+np)$$

Digitized by Google

Diophant's Beiſpiel iſt folgendes: „Wir nehmen, ſagt er, zwei rechtwinklige Dreiecke in den kleinſten Zahlen, z. B. 3·4·5 und 5·12·13, und multipliciren jedes mit der Hypotenuſe des andern, ſo wird das erſte Dreieck 39·52·65, das zweite 25·60·65; ſo haben wir alſo zwei Dreiecke, welche gleiche Hypotenuſen haben. Außerdem aber läßt ſich 65 noch von ſelbſt (φυσικῶς) zweimal in zwei Quadrate zerlegen, nämlich in 16 und 49, und in 64 und 1. Das kommt aber daher, weil 65 das Product der Zahlen 5 und 13 iſt, deren jede ſich in zwei Quadrate zerlegen läßt.“ Nun bildet er die beiden andern Dreiecke aus den Wurzeln der gefundenen Quadrate, nämlich aus 4 und 7, und aus 8 und 1, ſo wird das erſte 33·56·65, das zweite 16·63·65. Der Satz, daß das Product zweier Zahlen m^2+n^2 und p^2+q^2 ſich zweimal in die Summe zweier Quadrate zerlegen laſſe, erleidet indeß die Beſchränkung, daß ſich nicht $m:n=p:q$ verhalten, oder daß nicht eine der gegebenen Zahlen ein quadratiſches Vielfaches der andern ſein müſſe. Aber auch in Fällen, welche außerhalb dieſer Beſchränkung liegen, fällt die Zerlegung nicht immer der Art aus, daß die gefundenen Zahlen zur Bildung rechtwinkliger Dreiecke benutzt werden können. Z. B. 10 und 5 ſind beides Summen zweier Quadrate, ohne daß 10 ein quadratiſches Vielfaches von 5 wäre, und ihr Product 50 iſt auch zweimal die Summe zweier Quadrate, aber dieſe Quadrate ſind $49+1$ und $25+25$, von denen die letztern, weil ſie einander gleich ſind, die eine Kathete des Dreiecks $=0$, dagegen die andere der Hypothenuſe gleichmachen würden. Die Bedingung für dieſen Fall iſt die, daß ſich nicht $p:q=m+n:m-n$ verhalten dürfe. Beide Übelſtände vermeidet Diophant dadurch, daß er ſagt, die beiden beliebig angenommenen Dreiecke ſollen in den kleinſten Zahlen ausgedrückt werden. — Ich bemerke nur noch, daß dieſe Diophantiſche Anwendung des in Rede ſtehenden Satzes auf die Auffindung von vier rechtwinkligen Dreiecken über derſelben Hypotenuſe einerlei iſt mit der Aufgabe, eine Quadratzahl zu finden, die ſich in ganzen Zahlen viermal in die Summe zweier Quadrate zerlegen laſſe. Auch dieſe Anwendung des Satzes hat Fermat erweitert, wie wir gehörigen Orts ſehen werden.

V, 12. a) Eine Zahl von der Form $4n+3$ kann nie in zwei Quadrate zerlegt werden.

b) Jede Primzahl von der Form $4n+1$ iſt die Summe zweier Quadrate.

Digitized by Google

Beide Sätze folgen aus der dieser Aufgabe beigefügten Determination. Man soll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, so daß, wenn man zu jedem Stücke eine gegebene Zahl addirt, beide Summen Quadrate werden. Die gegebene Zahl darf aber weder ungerade sein, noch darf ihr Doppeltes eine um 1 größere Zahl haben, die von einer Primzahl gemessen wird [4]).

Nennt man die beiden gesuchten Stücke x und y, die gegebene Zahl a, so soll $x+y=1$, $x+a=m^2$, $y+a=n^2$ sein. Addirt man die beiden letzten Gleichungen, so erhält man die Gleichung

$$2a+1=m^2+n^2.$$

Die gegebene Zahl a muß so beschaffen sein, daß ihr Doppeltes um 1 vermehrt in zwei Quadrate zerlegt werden kann. Nun sagt

---

4) Leider ist diese Determination in den Handschriften arg entstellt. Bachet giebt sie im Texte so: δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἡ μ^{ο} $\overline{α}$. μείζονα ἔχῃ μέρος $\overline{δ}$. ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ $\overline{α}^{ου}$.$\varsigma^{ου}$; in dem Commentar giebt er für den zweiten Theil der Lesart des Vaticanischen Codex, welche ebenso unglücklich und fast übereinstimmend lautet: μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδα $\overline{α}$. μείζονα ἔχῃ μέρος τέταρτον, ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Bachet hat hin und her gerathen, und ist zuweilen dem Wahren auf die Spur gekommen; weil er aber den Satz nicht kannte, auf den Diophant hinzielt, so ist es ihm weder gelungen, den Text zu verbessern, noch die richtige Determination der Aufgabe zu geben. Das letztere hat Fermat gethan, ohne den Text weiter zu berücksichtigen. Erst Schulz hat sich an diese Correctur gewagt, aber, wie ich glaube, Einiges stehen lassen, was ganz unhaltbar ist. Er sagt S. 518. so: „Es ist kaum möglich, in die zweite Hälfte dieses Satzes, so wie sie im Texte steht, einen Sinn zu bringen. Man werfe aber die Worte μέρος τέταρτον, als ein Glossem eines Abschreibers, aus dem Texte, und lese ἔχειν statt ἔχῃ, ὅς statt ἢ, und τινὸς statt des abgekürzten τοῦ, so ist die Übersetzung u. s. w. Die letztere Bedingung hätte allerdings viel kürzer ausgedrückt werden können, aber der Verfasser hätte ein Mal die erste Bedingung durch eine Verneinung ausgedrückt und wurde dadurch veranlaßt, auch die zweite auf dieselbe Weise auszudrücken. Wie das μέρος τέταρτον in den Text gekommen sei, ist leicht zu erklären: denn da die gegebene Zahl eine gerade sein soll, so muß das Doppelte derselben durch 4 theilbar sein, oder μέρος τέταρτον ἔχειν; dies bemerkte ein Leser bei den Worten ὁ διπλασιῶν αὐτοῦ, und ein Abschreiber, der das ganze nicht faßte, nahm es in den Text auf." — Wenn wir nach dieser Correctur der Hauptfehler noch einige Kleinigkeiten berücksichtigen, so dürfte der zweite Theil nun so zu lesen sein: μήτε τὸν διπλασίονα αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδι μείζονα ἔχειν, ὅς μετρεῖται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ.

Digitized by Google

Diophant zuerſt, die gegebene Zahl darf nicht ungerade ſein. Setzen wir nämlich a ungerade, etwa $= 2p+1$, ſo iſt ihr um 1 vermehrtes Doppelte $4p+3$; bekanntlich kann aber keine Zahl von der Form $4p+3$ die Summe zweier Quadrate ſein, ein Satz, der, wie alle negativ ausgeſprochenen Sätze dieſer Art, ſich ſehr leicht beweiſen läßt. Demnach darf a nur gerade oder $2p$, alſo $2a+1 = 4p+1$ ſein, und der zweite Theil der Determination ſagt, daß dieſe Zahl $4p+1$ durch keine Primzahl gemeſſen werden dürfe, das heißt, daß ſie ſelbſt Primzahl ſein müſſe. In der That iſt jede Primzahl von der Form $4p+1$ die Summe zweier Quadratzahlen, und es iſt nicht wenig überraſchend, dieſen erſt von Euler bewieſenen, wenngleich ſchon von Fermat mit Beſtimmtheit ausgeſprochenen Satz bei Diophant als bekannt vorausgeſetzt zu finden. Werfen wir aber noch einen Blick auf das Verhältniß der Determination zu der vorliegenden Aufgabe, ſo zeigt ſich bald, daß dieſelbe zu enge iſt, und in dem Beſtreben, alle unzuläſſigen Zahlen aus der Aufgabe zu entfernen, zu weit geht. Gegen den erſten Theil iſt in dieſer Hinſicht nichts einzuwenden, wohl aber gegen den zweiten; denn es giebt eine große Menge von Zahlen, die die Form $4p+1$ haben und aus zwei Quadraten zuſammengeſetzt ſind, ohne Primzahlen zu ſein. Erſtens nämlich hat Diophant in dem vor dieſem angeführten Satze die Bemerkung ausgeſprochen, daß das Product zweier Zahlen, deren jede die Summe zweier Quadrate iſt, zweimal die Samme zweier Quadrate iſt, daß alſo die zuſammengeſetzte Zahl $(4m+1)(4n+1)$, wenn jeder Factor Primzahl iſt, gewiß die Summe zweier Quadrate ſein muß; multiplicieren wir nun dieſe Zahl mit einer dritten Primzahl von der Form $4p+1$, ſo iſt auch $(4m+1)(4n+1)(4p+1)$ die Summe zweier Quadrate, und ſo ins Unendliche fort. Zweitens aber iſt klar, daß wenn man irgend eine Summe zweier Quadrate mit einer beliebigen Quadratzahl multiplicirt, das Product ebenfalls die Summe zweier Quadrate ſein muß. Demnach iſt eine Zahl von der Form $4n+1$ die Summe zweier Quadrate nicht allein, wenn ſie Primzahl iſt, ſondern auch, wenn ſie außer quadratiſchen Factoren nur Primfactoren von der Form $4n+1$, wenn ſie alſo die Form hat

$$m^2 \cdot [(4n+1)(4n_{,}+1)(4n_{,,}+1)(\cdots\cdots)]$$

In dieſer Allgemeinheit hat ſchon Fermat in ſeiner Observatio zu der vorliegenden Aufgabe die Determination ausgeſprochen. Vera

limitatio, ſagt er, haec est, generalis nempe et omnes numeros inutiles excludens. Oportet datum numerum non esse imparem, neque duplum ejus unitate auctum per maximum quadratum a quo mensuratur divisum dividi a quovis numero primo unitate minori quam multiplex quaternarii. Bei der deſolaten Verfaſſung des Textes bleibt übrigens Freunden von Conjecturen ein weites Feld geöffnet, wie viel von dem hier Angeführten ſie etwa in die Diophantiſchen Worte noch hineinlegen oder aus denſelben herausſchneiden wollen.

Einer ähnlichen Determination hatte die folgende Aufgabe V, 13. bedurft, welche die Zahl 1 ſo in zwei Stücke zu theilen verlangt, daß wenn man zu jedem derſelben eine andere gegebene Zahl addirt, dieſe Summen Quadrate werden. Hier kommt es alſo, wenn a und b die gegebenen Zahlen ſind, darauf an, daß $a+b+1$ ſich in zwei Quadrate zerlegen laſſe. Über die Willkühr, die Diophant ſich erlaubt, indem er a und b ſo annimmt, daß $a+b+1$ Quadratzahl wird, und auf dieſe Particularität geſtützt die Auflöſung durchführt, habe ich bei einer andern Gelegenheit geſprochen.

2. Zuſammenſetzung der Zahlen aus drei Quadraten.

V, 14. Eine Zahl von der Form $8n+7$ kann nie die Summe von drei Quadraten ſein.

Anders als in dieſer negativen Geſtalt wage ich den Satz im Geiſte Diophant's nicht auszuſprechen, und eigentlich habe ich ihm damit ſchon etwas zu Liebe gethan, indem ich durch dieſe negative Auffaſſung des Satzes einen offenbaren Mangel verdecke, an dem die Determination, welcher derſelbe entnommen iſt, leidet. Denn ſtrenge genommen ſpricht Diophant den unwahren Satz aus, daß jede Zahl, welche nicht die Form $8n+7$ hat, ſich in drei Quadratzahlen zerlegen laſſe. Die Aufgabe lautet nämlich, der zwölften analog: Man ſoll die Zahl 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stücke dieſelbe gegebene Zahl addiren, und alle drei Summen ſollen Quadrate werden. Sind nun die Stücke x, y, z, die gegebene Zahl a, ſo ſoll

$$x+y+z=1, \quad x+a=m^2$$
$$y+a=n^2$$
$$z+a=p^2$$

also $x+y+z+3a$, das iſt

$$3a+1=m^2+n^2+p^2 \text{ ſein.}$$

Es kommt alſo bei der Aufgabe darauf an, die Zahl a ſo zu geben, daß ihr um 1 vermehrtes Dreifache ſich in drei Quadrate zerlegen laſſe. Nun ſagt Diophant's Determination: Die gegebene Zahl darf aber weder 2, noch eine aus der Reihe der um 2 vermehrten Vielfachen von 8 ſein. Das heißt alſo, die gegebene Zahl darf nicht $8q+2$ ſein. Wenn aber a nicht $8q+2$ ſein darf, ſo kann $3a+1$ nicht $24q+7$ ſein. Demnach hat Diophant den Satz ausgeſprochen, daß eine Zahl von der Form $24q+7$ nicht die Summe dreier Quadrate werden könne. Aber der Theiler 3, der in der 24 ſteckt, iſt hier ohne Bedeutung, weil $24q+7$ durch 3 dividirt 1 zum Reſt läßt, alſo jene Zahl in Bezug auf den Diviſor 3 nicht nur die Summe von drei, ſondern auch von zwei Quadraten, ja ſelbſt Quadratzahl *ſein* könnte. Demnach bleibt als characteriſtiſches Merkmal nur die Form der Zahl in Bezug auf den Theiler 8 zu betrachten übrig, und dann iſt ſie $8q+7$. Nun ſind aber die Zahlen von der Form $8q+7$ nicht die einzigen, welche die Eigenſchaft haben, daß ſie ſich nicht in drei Quadrate zerlegen laſſen. Daraus folgt, daß die Diophantiſche Determination zu weit iſt, weil ſie nicht alle unbrauchbaren Zahlen ausſchließt, daß ſie alſo den entgegengeſetzten Fehler der vorhergehenden hat. Um ganz ſicher zu gehen, hätte Diophant nur noch beſtimmen dürfen, daß a nicht ungerade ſein dürfe; dadurch hätte er freilich eine große Menge brauchbarer Zahlen mit ausgeſchloſſen, aber auf der andern Seite die Möglichkeit verhütet, daß unbrauchbare Annahmen ſich einſchlichen. Wenn nämlich a eine gerade Zahl iſt, ſo wird $3a+1$ ungerade; und Legendre hat bewieſen, daß jede ungerade Zahl, die nicht die Form $8n+7$ hat, ſich in drei Quadrate zerlegen laſſe. Bei der Unzulänglichkeit aber, in welcher dieſe Determination gegeben iſt, können wir aus ihr in der That nichts weiter ſchließen, als daß Diophant den ſehr leicht zu beweiſenden negativen Satz gekannt habe, daß eine Zahl von der Form $8n+7$ ſich nicht als die Summe dreier Quadratzahlen darſtellen laſſe. Daß die Determination nicht alle

Digitized by Google

unbrauchbaren Zahlen ausschließe, hat schon Bachet bemerkt, und namentlich die Zahlen von der Form $32n+9$ als solche bezeichnet, welche für a nicht angenommen werden dürfen. Die vollständige Beschränkung, welcher die Annahme der Zahl a unterliegt, hat indeß wieder Fermat zuerst ausgesprochen, und zwar in folgender Gestalt: Er schreibt zwei geometrische Progressionen untereinander, von denen die obere Reihe die von 1 anfangenden successive fortlaufenden Potenzen von 4, die untere Reihe die Achtfachen der darüber stehenden Glieder enthält, also

1 4 16 64 256 1024.....
8 32 128 512 2048 8192.....

und nun sagt er, a dürfe keine Zahl sein, welche entsteht, wenn man ein Glied der obern Reihe verdoppelt und dazu alle vorhergehenden Glieder derselben Reihe addirt, und ferner keine Zahl, welche entsteht, wenn man die so gefundene Zahl zu einem Vielfachen des entsprechenden Gliedes der untern Reihe addirt. Daher dürfe a nicht sein

$8n+2\cdot1$	oder	$8n+2$	(Diophant)
$32n+2\cdot4+1$	=	$32n+9$	(Bachet)
$128n+2\cdot16+4+1$	=	$128n+37$	
$512n+2\cdot64+16+4+1$	=	$512n+149$	

u. s. w.

Wenn wir den Satz allgemein ausdrücken und bedenken, daß die Summe der Potenzen von 4, von 1 bis 4^{p-1} genommen, $\frac{4^p-1}{3}$ ist, so darf a nicht sein $8\cdot4^pn+2\cdot4^p+\frac{4^p-1}{3}$, oder $8\cdot4^pn+\frac{7\cdot4^p-1}{3}$, demnach darf $3a+1$ nicht sein $8\cdot4^pn+7\cdot4^p$, das ist $4^p(8n+7)$, und wir erhalten daher den berühmten Satz, daß jede Zahl, welche nicht von der Form $8n+7$ oder ein Producr einer Zahl dieser Form in irgend eine Potenz von 4 ist, sich in die Summe dreier Quadrate zerlegen lasse. Da nun alle diese Zahlen entweder ungerade Zahlen von der Form $8n+7$, oder gerade Zahlen von der Form $4n$ sind, so folgen aus diesem allgemeinen Satze als speciellere die beiden: 1) Jede ungerade Zahl, welche nicht die Form $8n+7$ hat, und 2) jede gerade Zahl von der Form $4n+2$ ist in drei Quadrate zerlegbar. Wie ich schon erwähnte, läßt sich aus Diophant's Determination nicht entnehmen, wieviel von diesen

Digitized by Google

Sätzen ihm bekannt gewesen sei, wieviel nicht; und die Bemühung von Schulz, zu zeigen, daß Diophant beide letztgenannten Sätze genau gekannt habe, beruht auf einem Irrthum [5]). Den ersten der beiden letztgenannten Specialsätze scheint Diophant allerdings gekannt zu haben; für die Annahme seiner Bekanntschaft mit dem letzten Satze haben wir aber gar keine Auctorität.

Bei den Aufgaben V, 15. 16., welche ebenfalls von der Zerlegbarkeit einer gegebenen Zahl in drei Quadratzahlen abhängen, fehlt die Determination, welche der zu V, 14. gegebenen eben betrachteten ziemlich conform ausfallen mußte.

Einer besonderen Betrachtung wollen wir noch die Aufgaben V, 22. 23. unterwerfen. Die erstere verlangt eine gegebene Zahl a in drei Stücke x, y, z zu zerlegen, so daß $a^3 - x$, $a^3 - y$, $a^3 - z$ Quadrate werden. Addirt man diese drei Formeln, so kommt es darauf an, die Zahl $3a^3 - a$ in drei Quadrate zu zerlegen. Diophant giebt auch hier keine Determination und scheint also die

---

5) Schulz bemüht sich nämlich zu zeigen, daß Diophant's Determination erschöpfend sei nnd alle unbrauchbaren Zahlen ausschließe. Sein Beweis ist folgender: „Daß diese Bedingung aber hinreichend sei, läßt sich leicht übersehen. Die „Zahl $3a+1$ ist entweder ungerade oder gerade, ersteres wenn a eine gerade, „letzteres wenn a eine ungerade Zahl ist. Wenn nun $3a+1$ nngerade und nicht „zugleich von der Form $8n+7$ ist, so läßt sie sich nach dem angeführten Satze „bei Legendre gewiß in drei Quadrate theilen. Ist aber $3a+1$ eine gerade „Zahl, so muß a selbst eine ungerade Zahl, also von der Form $2n+1$ sein, wo „n eine ungerade Zahl bedeutet (???). Daher wird $3a+1 = 6n+4$, „also das Doppelte einer Zahl von der Form $3n+2$, d. h. einer ungeraden „Zahl (???). Nun wird aber bei Legendre a. a. O. bewiesen, daß jede Zahl, „welche das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, ebenfalls die Summe von drei „Quadraten sei. Es ist also einleuchtend, daß die Zahl $3a+1$, insofern sie nicht „in die bezeichnete Reihe gehört, sich jedes Mal in drei Quadrate zerstückeln lasse, „und ebenso einleuchtend ist es, daß Diophantus sowohl diesen, als den von Euler „bewiesenen Satz, daß jede Primzahl von der Form $4n+1$ die Summe zweier „Quadrate sei, genau gekannt haben müsse." — Allerdings wird, wenn wir $a = 2n+1$ und dann noch n ungerade setzen, der Ausdruck $3a+1$ das Doppelte einer ungeraden Zahl. Aber wer heißt uns n ungerade, das heißt, $a = 4n+3$ setzen? Schulz hat also nur bewiesen, daß die Auflösung immer möglich ist, wenn a gerade und nicht $8n+2$, und wenn $a = 4n+3$ ist. Wie steht es aber mit $a = 4n+1$? Unter diesen giebt es zulässige und unzulässige a, die nur durch die Fermat'sche Determination geschieden werden können. Schon das Beispiel von Bachet, daß $a = 9$, also $3a+1 = 28$ nicht zum Ziele führt, hätte den gelehrten Übersetzer aufmerksam machen sollen.

Digitized by Google

Möglichkeit der Ausführung in allen Fällen vorauszuſetzen. In der That iſt die Auflöſung immer möglich, wenn a ungerade, oder auch wenn a gerade-ungerade, das heißt, von der Form $4n+2$ iſt. In beiden Fällen erhält $3a^3-a$ die Form $4n+2$, welche ſich immer in drei Quadrate zerlegen läßt. Unmögliche Fälle ſind alſo nur in der Form $a=4n$ zu ſuchen. Um dieſe aufzufinden, ſetzen wir $3a^3-a$ der Formel gleich, welche die Unmöglichkeit der Zerlegbarkeit in drei Quadrate ausdrückt, ſo haben wir $3a^3-a$, oder

$$a(3a^2-1)=4^p(8n+7)$$

Ohne weiter auf eine Unterſuchung aller möglichen Fälle, in welchen dieſe Gleichung ſtatt haben kann, einzugehen, begnügen wir uns mit dem, was der bloße Augenſchein giebt, daß nämlich die Gleichung erfüllt wird, wenn wir $a=4^p$ ſetzen, weil dann zugleich allemal $3a^2-1=8n+7$ wird. Demnach wird die Zerlegung des Ausdrucks $3a^3-a$ in drei Quadrate allemal unmöglich ſein, wenn a eine Potenz von 4 iſt. Ebenſo darf a nicht $4^p(8n+1)$ ſein, wie eine der folgenden ähnliche Unterſuchung leicht ergiebt.

In der Aufgabe V, 23. ſoll $x+y+z=\frac{1}{a}$, und jede der Formeln $x-\frac{1}{a^3}$, $y-\frac{1}{a^3}$, $z-\frac{1}{a^3}$ ein Quadrat werden. Addirt man hier wieder die drei Ausdrücke, ſo kommt es darauf an, die Formel $\frac{1}{a}-\frac{3}{a^3}$, oder was daſſelbe iſt, a^3-3a in drei Quadrate zu zerlegen. Auch dieſe Operation iſt immer möglich, wenn $a=2n+1$ oder $=4n+2$ iſt. Wir wollen ferner unterſuchen, wie es ſteht, wenn a die Form $4n$ hat. Zuerſt leuchtet ein, daß wenn wir wieder

$$a(a^2-3)=4^p(8n+7)$$

ſetzen, der Werth $a=4^p$ dieſer Gleichung nicht genügt; denn für dieſen Werth von a erhält a^2-3 die Form $8n-3$ oder $8n+5$, welche nicht mit $8n+7$ identiſch ſein kann. Nun kann aber eine Zahl von der Form $8n+7$, wenn ſie nicht Primzahl iſt, nur entſtanden ſein aus Factoren $(8n+1)(8n+7)$, oder aus $(8n+3)(8n+5)$. Setzen wir alſo zunächſt

$$a(a^2-3)=4^p(8n+1)(8n+7)$$

und verſuchen, ob $a=4^p(8n+1)$ der Gleichung genügen könne; es leuchtet aber ein, daß das nicht möglich ſei, da a^2-3 in dem

Digitized by Google

Falle ebenfalls wieder die Form $8n-3$ erhält. Ebenso wenig kann $a = 4^p(8n+7)$ gesetzt werden. Setzen wir also ferner

$$a(a^2-3) = 4^p(8n+3)(8n+5)$$

und nehmen $a = 4^p(8n+3)$ an, so wird a^2-3 immer die Form $8n-3$, das ist, $8n+5$, also $a(a^2-3)$ die Form $4^p(8n+7)$ haben. Demnach ist $a = 4^p(8n+3)$ ein Werth, welcher die Zerlegung der Formel a^3-3a in drei Quadrate unmöglich macht. Setzen wir z. B. $a = 12 = 4\cdot 3$, so ist $a^3-3a = 1728-36 = 1692$, und diese Zahl läßt sich nicht in drei Quadrate zerlegen, weil sie durch 32 dividirt den Rest 28 läßt.

Der Zweck dieser Untersuchungen ist allein der, nachzuweisen, daß aus dem Fehlen einer Determination bei Diophant sich nicht sichere und kühne Schlüsse ziehen lassen. Da er die Determination nicht giebt, wo die Auflösung nicht in allen Fällen möglich ist, so folgt aus dem Fehler der Determination bei allgemein möglichen Aufgaben nicht, daß Diophant die allgemeine Möglichkeit derselben auch klar gekannt habe.

3. Zusammensetzung der Zahlen aus vier Quadraten.

Diophant setzt in drei Aufgaben, IV, 31. 32. V, 17., voraus, daß eine durch keine Determination beschränkte gegebene Zahl sich in vier Quadrate zerlegen lasse. Die eben gemachte Bemerkung macht es aber ungewiß, ob er wirklich den von Fermat aufgestellten Satz, daß jede Zahl ohne Ausnahme sich in vier Quadrate zerlegen lasse, als wissenschaftlichen Lehrsatz gekannt habe. Ebenso wie er bei den eben erläuterten Aufgaben keine Determination giebt, obgleich sie nicht immer möglich sind; ebenso wie er bei der letztern von ihnen, wo er $a = 4$ angenommen und die Auflösung dahin geführt hatte, den Bruch $\frac{13}{64}$ in drei Quadrate zu zerlegen, ganz genügsam sagt: ὅπερ ἐστὶ ῥᾴδιον, da es ihm doch sehr schwer geworden wäre, wenn er $a = 12$ gesetzt hätte; ebenso gut ist es möglich, daß der allgemeinen Form, in der die drei genannten Aufgaben erscheinen, mehr eine ähnliche Überlieferung an das glückliche Ohngefähr, als eine wirklich wissenschaftlich begründete Kenntniß des in Rede stehenden Lehrsatzes zu Grunde liegt. Überdies ist die Art, wie Diophant diese Aufgaben und zumal die Zerlegung der Zahlen in vier Quadrate behandelt, nicht geeignet, unsere Zweifel zu seinen

Digitized by Google

Gunſten zu zerſtreuen. In den Aufgaben IV, 31. 32. benutzt er den zufälligen Umſtand, daß die in vier Quadrate zu zerlegende Zahl die Summe zweier Quadrate iſt, in dem erſten Beiſpiel 13, im zweiten 5. Er ſagt z. B. τὰς $\overline{\iota\gamma}$ ἄρα μονάδας διαιρεῖν δεῖ εἰς τέσσαρας τετραγώνους ... διαιροῦνται δὲ οἱ $\overline{\iota\gamma}$ εἰς δύο τετραγώνους, τόν τε $\overline{\delta}$ καὶ τὸν $\overline{\varsigma}$. καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους etc. Aus dieſer Darſtellung erhellt weder, wie man die Zerlegung der vorliegenden Zahl in vier Quadrate anzuſtellen habe, wenn dieſelbe nicht auch die Summe von zwei Quadraten iſt, noch ob Diophant von der unbedingten Ausführbarkeit der Operation überzeugt geweſen ſei. Auch die beiden andern Aufgaben geben keinen Aufſchluß über Diophant's eigentliches Verhältniß zu dieſem Satze.

Es muß indeß der Anſicht eines Jeden überlaſſen bleiben, ſich dafür zu entſcheiden, ob die unvollkommene Darſtellung dieſer allgemein möglichen, ſo wie das Fehlen der Determinationen bei den einer Beſchränkung unterworfenen Auflöſungen auf Rechnung der allgemeinen Verſtümmelung des Werks im Laufe der Zeit, oder auf Rechnung Diophant's ſelbſt zu ſchreiben ſeien; mit andern Worten, ob namentlich die jetzt fehlenden Determinationen von Abſchreibern ausgelaſſen, oder von Diophant gar nicht gegeben ſeien, aus dem Grunde, weil er ſie nicht zu geben wußte.

Es bliebe nun noch die Frage zu erörtern übrig, in welcher Art Diophant die Lehrſätze, von denen wir hier gehandelt haben, und die, wie es ſcheint, unter dem beſonderen Titel der Porismata einen Theil ſeines arithmetiſchen Werks ausmachten, behandelt habe. Gewiß hat er ſie, da er ſich auf mehre derſelben als auf ausgemachte Wahrheiten beruft, nicht ohne Beweis gelaſſen, und die Analogie mit ſeinen Lehrſätzen über die Polygonalzahlen läßt vermuthen, daß er ſich der Euklidiſchen lineären Beweismethode bedient habe. Da uns hierüber jedoch alle, auch die entfernteſten leiſeſten Andeutungen fehlen, ſo thun wir am beſten, wenn wir dieſe Frage auf ſich beruhen laſſen und uns vor der Aufſtellung vager Hypotheſen hüten, die doch am Ende zu keinem, geſchweige denn zu einem einigermaßen befriedigenden Reſultate führen können.

Digitized by Google

Elftes Kapitel.

Diophant's Schrift über die Polygonalzahlen.

Dem Inhalte nach mit den arithmetischen Aufgaben nahe verwandt, deshalb auch wahrscheinlich als ein ergänzender Theil derselben zu betrachten aber in Form und Darstellung von denselben verschieden ist Diophant's kleine Abhandlung über die Theorie der Polygonalzahlen. Obgleich weder der Gegenstand dieser Schrift und noch viel weniger die Art, wie der Stoff behandelt wird, eigentlich der Algebra angehört, so kann ich mich doch nicht enthalten, eine, wenn auch möglichst kurze Darstellung derselben in den Kreis unserer Untersuchungen zu ziehen, geschähe es auch nur, um dadurch die Schilderung des in jeder Beziehung merkwürdigen Verfassers zu vollenden.

Bossut scheint, wie ich oben schon einmal erwähnte, die Echtheit dieser Schrift als einer Diophantischen, wenn nicht zu bezweifeln, so doch wenigstens nicht für entschieden zu halten. Eine solche Annahme aber widerspricht nicht nur allen uns zu Gebote stehenden äußern Auctoritäten, indem dieselbe in allen bekannten Manuscripten unmittelbar dem sechsten Buche der Aufgaben und unter Diophant's Namen angehängt ist, sondern auch vorzüglich der Inhalt und die Form derselben. Obgleich in der Behandlungsart des Stoffes von den Aufgaben ganz verschieden, hat sie doch mit diesen das gemein, daß sie ebenso wie das größere Werk in ihrer Art ganz originel ist und ohne Analogie in der Griechischen Literatur dasteht. Es folgt daraus, daß wir es hier jedenfalls mit dem Werke eines großen Mathematikers zu thun haben und daß darum eben jeder Grund wegfällt, der uns etwa veranlassen könnte, der Aussage der Handschriften zu widerstreiten.

Das Charakteristische dieser Schrift ist nämlich die den alten Arithmetikern fremde ganz universelle Auffassung und Darstellung

Digitized by Google

des behandelten Gegenstandes. Der Verfasser spricht hier nicht successive von dreieckigen, viereckigen, fünfeckigen Zahlen, sondern durchweg ganz allgemein von Polygonzahlen; er giebt die Regeln für die Bildung und Auffindung derselben, und die Sätze, welche ihre Eigenschaften aussprechen, nicht wie die frühern Arithmetiker für jede einzelne Klasse derselben besonders, sondern geht sogleich von dem allgemeinen Begriffe der Polygonzahl aus und stellt Regeln und Sätze auf, welche alle diesem allgemeinen Begriffe untergeordneten Fälle in sich schließen und aus denen durch Substitution der Winkelzahl die Sätze für jede besondere Klasse sich herleiten lassen. Von einer so universellen Auffassung hat Nikomachus noch keine Idee, und Hypsikles, auf den Diophant sich in dem achten Satze beruft, hat, wie aus des Letztern Worten zu folgen scheint, sich noch an die Vorstellung der successiven Entstehung gehalten.

Der Zweck der kleinen Abhandlung war, wie aus der Vorrede hervorgeht, ein ziemlich beschränkter. Diophant will eine wissenschaftliche Definition und zugleich ein allgemeines Merkmal, welches eine Zahl als Polygonalzahl kenntlich macht, angeben und sodann zeigen, in welcher gegenseitigen Beziehung eine Polygonalzahl und ihre Seite zu einander stehen, so daß man aus einer die andern finden kann. Dem Hauptsatze gehen fünf Hilfssätze vorher; dieser Hauptsatz aber ist der in der Bachet'schen Ausgabe mit **Propositio Octava** bezeichnete, dem dann noch ein kleiner, aber in den Ausgaben nicht vollendeter Anhang folgt. Die Bachet'sche Eintheilung dieser Schrift, gleichviel ob er sie in den Handschriften schon vorgefunden oder erst selbst bei der Ausgabe eingeführt hat, ist nicht geeignet, die Übersicht über den innern Zusammenhang des Werks zu erleichtern. Die Vorrede nennt er **Propositio prima**; seine **Propositio quinta** ist der zweite Theil des Beweises der **Propositio quarta**. Die **Propositio nona** ist ebenfalls kein eigener Satz, sondern nur, wie Diophant ausdrücklich sagt, eine planere Fassung des vorhergehenden. Indem ich in der folgenden Darstellung die Eintheilung so ändere, wie der Gang und die Natur des Gegenstandes es erfordert, werde ich, um Verwirrungen zu vermeiden, die Bachet'sche Eintheilung lateinisch hinzufügen.

Einleitung. (**Prop. I.**) „Jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe, von der Drei an gerechnet, ist eine Polygonzahl, und zwar die erste (ihrer Gattung) nach der Einheit; und sie enthält so viele Winkel als die Anzahl ihrer Einheiten ausdrückt; ihre Seite aber

Digitized by Google

ist die der Eins nächste Zahl, die Zwei. Demgemäß wird 3 eine dreieckige, 4 eine viereckige, 5 eine fünfeckige Zahl sein, und so fort." — Dieses ist eine kurze Recapitulation des aus frühern Schriften als bekannt Vorausgesetzten. Es folgt die Angabe des Zwecks dieser Schrift.

„Wie es nun von den Quadratzahlen bekannt ist, daß sie aus der Multiplication einer Zahl in sich selbst entstehen, so hat sich es auch bewährt, daß jede Polygonzahl multiplicirt mit einer von der Zahl ihrer Winkel abhängigen Zahl, und addirt zu einem Quadrat, das ebenfalls von der Zahl ihrer Winkel abhängt, eine Quadratzahl zum Vorschein bringt. Das nun will ich beweisen und zugleich zeigen, wie man aus der gegebenen Seite die zugehörige Polygonalzahl, und aus der Polygonalzahl die Seite findet. Vorher aber werde ich einige Hilfssätze (τὰ εἰς αὐτὰ λαμβανόμενα) beweisen."

Hilfssätze.

Erster Satz. (Prop. II.) „Wenn drei Zahlen von gleichem Unterschiede sind, so ist das achtfache Product der beiden größern, addirt zu dem Quadrate der kleinsten, ein Quadrat, dessen Wurzel ist die Summe der größten und der doppelten mittlern."

Über Diophant's Beweise werde ich unten sprechen; hier begnüge ich mich, die Sätze an Formeln zu erläutern. Hat man drei Zahlen von gleichem Unterschiede, a, $a+b$, $a+2b$, so ist

$$\begin{aligned} 8(a+2b)(a+b)+a^2 &= 8(a^2+3ab+2b^2)+a^2 \\ &= 9a^2+24ab+16b^2 \\ &= (3a+4b)^2 \\ &= [(a+2b)+2(a+b)]^2 \end{aligned}$$

Zweiter Satz. (Prop. III.) „Wenn beliebig viele Zahlen von gleichem Unterschiede sind, so ist der Unterschied der größten und kleinsten gleich dem Producte aus dem beständigen Unterschiede in die um 1 verminderte Anzahl der vorliegenden Zahlen."

Hat man nämlich die arithmetische Reihe

$$a,\ a+b,\ a+2b \text{ und so weiter,}$$

so ist deren n^{tes} Glied $a+(n-1)b$, also der Unterschied zwischen diesem und dem ersten Gliede gleich $(n-1)b$.

Dritter Satz. (Prop. IV. V.) „Wenn beliebig viele Zahlen von gleichem Unterschiede sind, so ist das Product aus der Summe

Summe der größten und kleinsten in die Anzahl der Zahlen gleich der doppelten Summe aller vorliegenden Zahlen."

Dieſer Satz enthält die bekannte Formel für die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion. Nennt man nämlich die kleinſte Zahl a, die größte t, die Anzahl n, die Summe aller S, ſo iſt $S = (a+t)\frac{n}{2}$, oder, wie Diophant den Satz ausdrückt, $(a+t)n = 2S$. Diophant beweiſt den Satz zuerſt für den Fall, daß n gerade (Prop. IV.), und dann für den Fall, daß n ungerade iſt (Prop. V.)

Dieſe drei Sätze gelten der arithmetiſchen Progreſſion im Allgemeinen und enthalten kurz die Elementarlehren derſelben. Mit dem folgenden Satze rückt der Verfaſſer dem Ziele um einen Schritt näher, indem er nun ſpeciell diejenige Progreſſion betrachtet, deren erſtes Glied 1 iſt.

Vierter Satz. (Prop. VI.) „Wenn beliebig viele Zahlen von der Einheit an von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt das achtfache Product aus der Summe aller in den beſtändigen Unterſchied, addirt zu dem Quadrate des um 2 verminderten Unterſchiedes, eine Quadratzahl, deren um 2 verminderte Wurzel gleich ſein wird dem Producte des Unterſchiedes in die um 1 verminderte doppelte Anzahl aller vorliegenden Zahlen, die Einheit mitgerechnet."

Nennen wir wie vorher die Anzahl n, den beſtändigen Unterſchied b, die Summe aller Glieder S, ſo ſoll nach dem Satze

$$8bS+(b-2)^2 = [b(2n-1)+2]^2.$$

Es iſt aber $S = [(n-1)b+2]\frac{n}{2}$; dieſes ſubſtituirt, giebt

$$\begin{aligned} 8bS &= 4bn[(n-1)b+2] \\ &= 4b^2n^2-4b^2n+8bn \\ \text{dazu}\quad (b-2)^2 &= b^2-4b+4, \quad \text{giebt} \\ 8bS+(b-2)^2 &= 4b^2n^2-4b^2n+8bn+b^2-4b+4 \\ &= b^2(4n^2-4n+1)+4b(2n-1)+4 \\ &= [b(2n-1)+2]^2. \end{aligned}$$

Zuſatz. (Prop. VII.) Dieſer Satz hat ebenſo wie die in dem vierten Satze auf ihn verweiſenden Worte, „ὅπερ ἐξῆς δειχθήσεται," ganz das Ausſehen eines apokryphiſchen Einſchiebſels. Sein Inhalt iſt kein anderer, als daß er geometriſch beweiſt, daß $b^2(2n-1)^2 = [b(2n-1)]^2$ iſt.

Digitized by Google

Hauptſatz.

Fünfter Satz. (Prop. VIII.) „Nach dieſen Vorderſätzen nun[1]) behaupte ich, daß, wenn mehre Zahlen von der Einheit an von gleichem Unterſchiede ſind, die Summe aller eine Polygonzahl ſei; und zwar iſt die Anzahl ihrer Winkel um zwei größer als der beſtändige Unterſchied, ihre Seite aber iſt die Anzahl der vorgelegten Zahlen, die Einheit mitgerechnet."

Nachdem Diophant den Beweis dieſes Satzes, den ich unten mittheilen werde, gegeben hat, fährt er ſo fort:

„Es iſt alſo bewieſen, was Hypſikles in der Definition (ἐν ὅρῳ) ſagt: wenn beliebig viele Zahlen von der Einheit an von gleichem Unterſchiede ſind, und dieſer Unterſchied 1 iſt, ſo iſt die Summe eine dreieckige Zahl; iſt der Unterſchied 2, ſo iſt die Summe eine viereckige Zahl, für 3 eine fünfeckige; die Anzahl ihrer Winkel iſt um zwei größer als der Unterſchied, und ihre Seiten ſind der Anzahl der vorgelegten Zahlen gleich. Daraus folgt für die dreieckigen Zahlen, die aus dem Unterſchiede 1 hervorgehen, daß ihre Seiten die größten der vorgelegten Zahlen, und das Product aus den größten in die um 1 größere Zahl gleich der doppelten bezeichneten dreieckigen Zahl iſt."

Dieſer Satz, mit dem vierten Hilfsſatze combinirt, führt Diophant auf folgende Definition der Polygonzahlen (οὗτος ἔσται ὅρος τῶν πολυγώνων):

„Jede Polygonzahl, achtmal vervielfältigt durch die um 2 verminderte Anzahl ihrer Winkel, und addirt zu dem Quadrate der um 4 verminderten Anzahl der Winkel, giebt eine Quadratzahl."

Das heißt, wenn P irgend eine Polygonzahl, α die Anzahl ihrer Winkel iſt, ſo iſt der Ausdruck

---

1) Im Texte ſteht: Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν ꝛc. Ich glaube nicht, daß dieſe Worte anders zu verſtehen ſeien, als daß Diophant andeuten will, daß er nun zur Hauptſache komme. „Da ſich das nun ſo verhält," oder wie Bachet überſetzt. „*Cum sint quae proposuimus,*" ſind jedenfalls richtigere Überſetzungen, als die Schulz'ſche: „Unter den nämlichen Annahmen." Die Annahmen werden hier, wie vorher, wieder genau angegeben, ſo daß alſo eine Berufung auf die früheren nicht ſtattfindet.

Digitized by Google

$$8(a-2)P+(a-4)^2$$

immer ein Quadrat. Um alſo zu unterſuchen, ob ein gegebenes P eine Polygonzahl von der Ordnung a ſei, multiplicire man ſie mit $8(a-2)$ und addire zu dem Producte $(a-4)^2$; iſt nun P eine Polygonzahl der geſuchten Ordnung, ſo iſt dieſe Summe ein Quadrat. Inſofern nennt Diophant dieſen Satz die Definition der Polygonzahlen. Iſt nun P eine dreieckige Zahl, alſo $a=3$, ſo wird die obige Formel $8P+1$, und dieſe iſt ein Quadrat. In dieſer ſpeciellen Form hat Diophant den Satz in ſeiner Aufgabe IV, 44. bereits angewandt, auch haben wir ihn in dem Commentar des Jamblichus über Nikomachus Arithmetik vorgefunden. In der allgemeinen Form aber erſcheint er wahrſcheinlich hier zuerſt. — Es iſt indeß wohl zu beachten, daß, wie ſchon Bachet bemerkt hat, der Satz ſich nicht umkehren läßt, wenn a größer als 4 iſt; es folgt nämlich daraus, daß $8(a-2)P+(a-4)^2$ ein Quadrat iſt, nicht, daß P eine Polygonzahl von der Ordnung a iſt, ſobald a nicht 3 oder 4 iſt. Iſt z. B. $a=5$, ſo wird die Formel $24P+1$, welche für $P=2$ Quadrat wird; aber 2 iſt keine fünfeckige Zahl.

Nennen wir nun die Seite des Polygons, oder die Anzahl der addirten Glieder der arithmetiſchen Reihe n, und vergleichen die eben dargeſtellte Formel mit der des vierten Satzes, ſo iſt n in beiden gleichbedeutend, dagegen $b=a-2$, $S=P$, demnach wird

$$8(a-2)P+(a-4)^2=[(a-2)(2n-1)+2]^2$$

und dieſe Formel enthält die Bedingung, nach welcher die Polygonalzahl und ihre Seite gegenſeitig von einander abhängen; es iſt nämlich

$$P=\frac{[(a-2)(2n-1)+2]^2-(a-4)^2}{8(a-2)}$$

und umgekehrt $n=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8(a-2)P+(a-4)^2}-2}{(a-2)}+1\right]$

Die Überſetzung dieſer beiden aus dem fünften und vierten Satze unmittelbar ſich ergebenden Formeln in Worte bilden die Bachet'ſche Propositio nona, welche wir, wenn wir ſie ja von dem fünften oder Hauptſatze trennen wollen, höchſtens als einen Zuſatz zu dieſem betrachten können.

In dieſem Satze nun hat Diophant ſeinen in der Einleitung ausgeſprochenen Zweck erreicht. Er hat nämlich gezeigt, wie man zwei von der Winkelzahl des Polygons abhängige Zahlen finden könne, ſo daß allemal, wenn man die Polygonzahl mit einer derſel-

Digitized by

den multiplicirt und das Quadrat der andern hinzu addirt, diese Summe ein Quadrat wird; er hat ferner gezeigt, wie man zu jeder gegebenen Seite (oder Wurzel) die zugehörige Polygonzahl irgend einer Ordnung, und umgekehrt zu einer gegebenen Polygonzahl, ihre Seite finden könne. Mehr hat er sich nicht vorgesetzt. Deßungeachtet folgt noch als Anhang eine

Aufgabe. (Prop. X.) „Wenn eine Zahl gegeben ist, zu untersuchen, auf wievielerlei Weise sie Polygonzahl sein könne."

Die Asführung dieser an und für sich interessanten Aufgabe ist in allen Manuscripten in der Mitte abgebrochen, und es ist aus dem Bruchstücke, obgleich es schon eine bedeutende Länge erreicht hat, noch nicht zu ersehen, wo der Verfasser eigentlich hinaus will. Indeß spricht aus dem Verfahren, soweit es vorliegt, ganz Diophant's Manier, wie sie sich uns aus den vorhergehenden Sätzen offenbart, weshalb ich, obgleich ich nicht apodiktisch entscheiden mag, nicht geneigt bin, mit Schulz [2]) anzunehmen, diese Aufgabe sei ein fremdartiger Zusatz zu der mit Prop. IX. vollendeten Diophantischen Schrift. Es ist wahr, dem in der Einleitung mit bestimmten Worten angegebenen Plane zufolge könnte man das Werk mit Prop. IX. als vollkommen abgeschlossen betrachten. Bedenken wir aber auch Folgendes, was vielleicht die Annahme der Echtheit dieser Aufgabe zu rechtfertigen im Stande ist. In dem fünften Satze (Prop. VIII.) hat Diophant als Merkmal (ὅρος) einer Polygonzahl angegeben, daß der Ausdruck $8(a-2)P+(a-4)^2$ ein Quadrat werde. Die Anwendung dieser Formel konnte und mußte leicht auf die Bemerkung führen, daß es für ein gegebenes P sehr häufig mehre Werthe für a gebe, welche den Ausdruck zu einem Quadrate machen, mit andern Worten, daß dieselbe Zahl P verschiedenen Ordnungen von Polygonalzahlen angehören könne. So ist, um nur einige nahe liegende Beispiele anzuführen, die Zahl 36 zugleich dreieckige, viereckige und dreizehneckige, und auch sechsunddreißigeckige Zahl; 225 ist vier-, acht-, vierundzwanzig-, sechsundsiebzig- und zweihun-

2) Anm. S. 619. „Daß dieser Satz ein Bruchstück ist, hindert nicht, das Ganze dennoch als geschlossen zu betrachten. So wie der Verfasser seinen Plan gleich in dem ersten Satze bestimmt angegeben hat, so ist er mit dem achten und neunten ausgeführt; das hier gegebene Bruchstück hat also ganz das Ansehen eines fremdartigen Zusatzes, der ohne Beeinträchtigung des Ganzen weggelassen werden kann."

Digitized by Google

dertfünfundzwanzigeckige Zahl; 540 ist Polygonalzahl von 7, 10, 21, 181 und 540 Seiten, 561 von 3, 6, 12, 39, 188 und 561 Seiten; 616 von 7, 13, 31, 104 und 616 Seiten; und so unzählige andere. Es scheint also ziemlich natürlich, daß der Verfasser, nachdem er die Vieldeutigkeit seiner Formel oder vielmehr seiner Regel erkannt hatte, der dem ursprünglichen Plane zufolge bereits abgeschlossenen Abhandlung nun noch die Aufgabe hinzufügte, wie man diese Vieldeutigkeit der Regel lösen und anwenden könne. Auch ist es ja bei andern alten und neuern mathematischen Werken nichts Ungewöhnliches, daß dem abgeschlossenen System von Lehrsätzen ein Anhang von Aufgaben, die den Gegenstand betreffen, hinzugefügt wird. Es ist also wohl daraus, daß diese Aufgabe nicht ebenso wie der Inhalt des vorhergehenden Lehrsatzes in der Einleitung angekündigt wird, nicht mit allzu großer Gewißheit deren Unechtheit zu schließen. Wie Diophant die Aufgabe gelöst habe, läßt sich, wie gesagt, aus dem Bruchstücke nicht entnehmen; wenigstens ist mir es nicht gelungen, in dem Vorhandenen einen sichern Fingerzeig auf das verloren gegangene Ziel des Weges zu entdecken. Bachet hat in seiner Zugabe zu dieser Schrift die Aufgabe mit Hilfe des Satzes von Nikomachus gelöst, daß nämlich jede Polygonzahl von a Seiten die Summe von $a-2$ dreieckigen Zahlen ist, deren eine dieselbe Seite hat, wie das Polygon, die übrigen aber die um 1 kleinere Seite [3]).

---

3) Appendicis ad Librum de Numeris Polygonis Lib. I. Prop. 19. ***Proposito quolibet numero, investigare quot modis polygonus dici possit.*** Bezeichnen wir eine Polygonzahl, deren Seite n und deren Winkelanzahl a ist, mit $n^{(a)}$, so ist nach Nikomachus II, 12.

$$n^{(a)} = n^{(3)} + (a-3)(n-1)^{(3)}$$

Dividiren wir nun durch die dreieckige Zahl $(n-1)^{(3)}$, so wird

$$\frac{n^{(a)}}{(n-1)^{(3)}} = a-3+\frac{n^{(3)}}{(n-1)^{(3)}}$$

$$= a-2+\frac{n^{(3)}-(n-1)^{(3)}}{(n-1)^{(3)}}$$

$$= a-2+\frac{n}{(n-1)^{(3)}}.$$

Hierauf gründet sich die Regel Bachet's: Man dividire die gegebene Zahl durch

Digitized by

Übrigens erhellt aus dieſer Darlegung des Inhalts, daß Diophant keineswegs die Abſicht hatte, eine vollſtändige Theorie der Polygonzahlen zu ſchreiben, ſondern daß er vielmehr nur bezweckte, eine Eigenſchaft derſelben allgemein wiſſenſchaftlich zu beweiſen. Denn wenn wir auch die abgebrochene Aufgabe Prop. X. als noch zur Sache gehörend anerkennen, ſo verbietet doch jedenfalls die Faſſung der Einleitung die Annahme, daß hinter dieſer Aufgabe vielleicht noch bedeutende theoretiſche Zuſätze und Erweiterungen des abgehandelten Stoffes gefolgt ſeien.

Nach dieſer Recognoſcirung des Stoffes wollen wir unſer Augenmerk auf die Art der Behandlung deſſelben werfen. Was zunächſt das Mittel der Operationen anlangt, ſo finden wir hier die in Euklid's arithmetiſchen Büchern begründete Methode der lineären Arithmetik wieder, welche darin beſteht, daß allgemeine Zahlenausdrücke, als deren Symbole wir die Buchſtaben verwenden, durch Linien veranſchaulicht werden. Ich habe über dieſe Methode oben ſchon einmal geſprochen. Sie iſt nicht eigentlich als eine geometriſche Operation, als eine Operation mit räumlichen Größen zu betrachten, ſondern als eine Veranſchaulichung des unſichtbaren Begriffs der Zahl in Geſtalt einer Linie. Es iſt darum nicht ganz genau, wenn Schulz in ſeiner Anmerkung zu dem erſten Satze (Prop. II.) ſagt: „Bemerkenswerth iſt hier und bei den folgenden Sätzen die unmittelbare Anwendung der von Theilung der Linien geltenden Sätze und geometriſcher Conſtructionen auf Zahlen, worin Diophantus, deſſen Theorie der Polygonzahlen ſich übrigens an die Bücher 7. 8. 9. der Elemente des Euklides anſchließt, von der

---

alle vorhergehenden dreieckigen Zahlen; ſo oft nun dieſe Diviſion einen Reſt läßt, der um 1 größer iſt als die Wurzel der dreieckigen Zahl, ſo iſt die gegebene Zahl eine Polygonzahl, deren Seite der Reſt und deren Winkelanzahl der um 2 vermehrte Quotient iſt. Vorher aber hat man zu unterſuchen, ob die gegebene Zahl ſelbſt dreieckige Zahl iſt. Läßt die Diviſion $\frac{n^{(a)}}{(n-1)^{(3)}}$ keinen Reſt, ſo hat man den Quotienten um 1 zu klein zu nehmen und zu verſuchen, ob der Diviſor als Reſt betrachtet der Aufgabe genügt. Das geſchieht z. B. immer, wenn die gegebene Zahl ein Vielfaches von 3 iſt. Denn drei iſt die dreieckige Zahl von der Seite 2, alſo der Reſt 3 um 1 größer als dieſe Seite; demnach iſt $3p$ immer ein $(p+1)$Eck von der Seite 3, z. B. 21 ein Achteck.

Digitized by Google

ſtrengen Methode des Letzteren abweicht.“ Es ſind nicht geometriſche Conſtructionen im ſtrengen Sinne des Worts, durch welche Diophant ſeine Zahlenſätze beweiſt und die er auf Zahlen anwendet und deren Reſultate er rückwärts auf Zahlen überträgt, ſondern es ſind wirkliche Zahlenoperationen, in denen nur die Zahlen durch Linien dem Auge dargeſtellt werden. Was aber namentlich die im zweiten Buche der Elemente ausgeſprochenen geometriſchen Sätze über die Theilung der Linien betrifft, ſo iſt mit Sicherheit anzunehmen, daß deren Übertragung auf die Arithmetik längſt ſtattgefunden hatte, und wir haben oben geſehen, daß Diophant bei der Auflöſung ſeiner Aufgaben nicht nur Sätze, wie $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ und ähnliche, ſondern auch die bei Euklides ſich nicht vorfindende Formel $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ als reine Zahlenſätze gekannt und als bekannt vorausgeſetzt hat. Wie ſehr ſich ſein Verfahren von einer rein geometriſchen Conſtruction unterſcheidet, wird am beſten aus einem Beiſpiel einleuchten. Wählen wir dazu gleich den erſten Satz:

Wenn drei Zahlen von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt das achtfache Product der beiden größern, addirt zu dem Quadrate der kleinſten, ein Quadrat, deſſen Wurzel iſt die Summe der größten und der doppelten mittlern.

„Drei Zahlen ***AB***, ***BG***, ***BD*** haben gleichen Unterſchied, ſo iſt zu zeigen, daß das achtfache Product von ***AB*** in ***BG***, addirt zu dem Quadrate von ***BD*** ein Quadrat giebt, deſſen Wurzel gleich iſt der Summe von ***AB*** und $2BG$. Da nun ***AB*** gleich iſt $BG + GD$, ſo iſt $8AB \cdot BG$ gleich dem achtfachen Quadrat von ***BG*** und dem achtfachen Product von ***BG*** in ***GD***. Es iſt alſo auch das vierfache Product von ***AB*** in ***BG*** gleich dem vierfachen Quadrat von ***BG*** und dem vierfachen Product von ***BG*** in ***GD***. Aber das vierfache Product von ***BG*** in ***GD*** nebſt dem Quadrate von ***BD*** iſt gleich dem Quadrate von ***AB***. — [Nach Eukl. II, 8.; aber auch in den Aufgaben wendet Diophant ſehr oft den Satz $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$ an.] — Es iſt alſo zu unterſuchen, wie das Quadrat von ***AB*** nebſt dem vierfachen Producte von ***AB*** in ***BG*** und dem vierfachen Quadrate von ***BG*** ein

Digitized by Google

Quadrat gebe. Wenn wir AE gleich BG ſetzen, ſo verwandeln wir das vierfache Product von AB in BG, in das vierfache Product von BA in AE. Dieſes zugeſetzt zu dem vierfachen Quadrate von GB, das iſt, AE, giebt das vierfache Product von BE in EA, und dazu addirt das Quadrat von AB, giebt zur Summe das Quadrat von BE und EA als einer einzigen Linie. Aber BE und EA zuſammen genommen ſind gleich AB und $2AE$ oder $2BG$, und das ſollte gezeigt werden."

Um das Verfahren mehr zu veranſchaulichen, will ich es ſo darſtellen. Es ſoll bewieſen werden, daß

$$8AB \cdot BG + BD^2 = [AB + 2BG]^2$$

Nun iſt nach der Vorausſetzung $AB - BG = BG - BD = DG$, alſo $AB = BG + GD$, folglich

$$8AB \cdot BG = 8BG^2 + 8BG \cdot GD$$

alſo auch $4AB \cdot BG = 4BG^2 + 4BG \cdot GD$

addirt man nun (was Diophant nicht ausgedrückt hat) auf beiden Seiten $4AB \cdot BG + BD^2$, ſo wird

$$8AB.BG + BD^2 = 4AB \cdot BG + 4BG^2 + 4BG \cdot GD + BD^2$$

Aber $4BG \cdot GD + BD^2 = (BG + GD)^2 = AB^2$

daher $8AB \cdot BG + BD^2 = AB^2 + 4AB \cdot BG + 4BG^2$

Läßt ſich nun beweiſen, daß die rechte Seite dieſer Gleichung ein Quadrat iſt, ſo wird auch die linke ein Quadrat ſein. In dieſer Formel iſt es nun zwar ganz augenſcheinlich, daß die Seite rechts das Quadrat von $AB + 2BG$ iſt. Diophant aber fährt ſo fort, daß er $AE = BG$ macht, ſo wird

$$4AB \cdot BG = 4AB \cdot AE$$

$$4BG^2 = 4AE$$

alſo $4AB \cdot BG + 4BG^2 = 4 \cdot AE(AB + AE)$

$$= 4AE \cdot EB$$

und dazu noch AB^2 addirt giebt

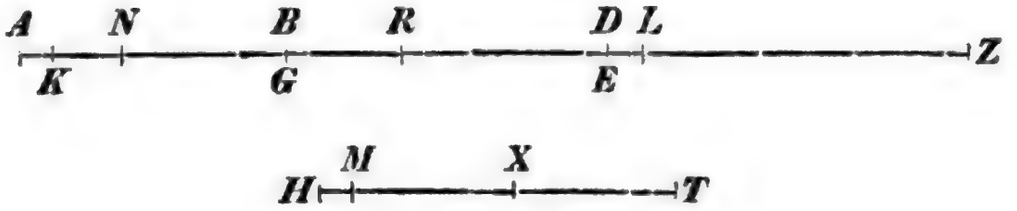
$$8AB \cdot BG + BD^2 = 4AE \cdot EB + AB^2$$

aber AB iſt $= BE - EA$, folglich nach demſelben Satze, der oben ſchon angewandt ward, $4AE \cdot EB + AB^2 = (AE + EB)^2$. Aber $AE + EB$ iſt $= AB + 2AE = AB + 2BG$, alſo iſt der Satz bewieſen.

Da der Hauptſatz ſich ganz auf den vierten Hilfsſatz ſtützt,

Digitized by Google

ſo möge auch die etwas verwickeltere Ableitung deſſelben hier einen Platz finden.



Seien von der Einheit an (dieſe nicht mitgezählt) die Zahlen AB, GD, EZ von gleichem Unterſchiede, und HT die Anzahl aller dieſer Zahlen nebſt der Einheit, ſo ſagt der Satz, wenn wir die Summe der Zahlen 1, AB, GD, $EZ = S$ ſetzen,

$$8S(AB-1)+(AB-3)^2=[(AB-1)(2HT-1)+2]^2$$

Da nach dem zweiten Satze $EZ-1=(AB-1)(HT-1)$ iſt, ſo ſei $AK=DL=HM=1$; dann iſt alſo $LZ=KB\cdot MT$. Sei ferner $KN=2$ (ſo daß $NB=AB-3$ wird), ſo ſuchen wir zu beweiſen, daß

$$8S\cdot KB+NB^2=[KB\cdot(HT+TM)+2]^2.$$

Nun iſt $S=\frac{1}{2}(ZE+EL)TH$ (das iſt $(ZE+1)HT$, nach Satz 3.), aber $ZE+EL=ZL+2EL$, alſo

$S=\frac{1}{2}ZL\cdot TH+EL\cdot TH$, alſo auch, da $LZ=KB\cdot MG$,

$S=\frac{1}{2}KB\cdot MT\cdot TH+EL\cdot TH$.

Halbiren wir MT in X, ſo wird

$S=KB\cdot TH\cdot TX+TH$ (weil $EL=1$ iſt) ſein.

Wir müſſen alſo ſuchen, ob $KB\cdot TH\cdot TX+TH$, wenn man es mit $8KB$ multiplicirt und NB^2 dazu addirt, ein Quadrat werde. Es giebt aber

$$8KB^2\cdot TH\cdot TX+8KB\cdot TH+NB^2$$

oder $$4KB^2\cdot TH\cdot TM+8KB\cdot TH+NB^2$$

Von dieſem Ausdrucke iſt alſo zu zeigen, daß er ein Quadrat iſt. Aber $8KB\cdot TH$ iſt gleich $4KB\cdot HM+4KB(HT+TM)$ (weil $2TH=MH+(TH+TM)$ iſt); daher haben wir zu unterſuchen, ob

$$4KB^2\cdot HT\cdot TM+4KB\cdot HM+4KB(HT+TM)+NB^2$$

ein Quadrat werde. Aber $4KB\cdot HM$ iſt $=2KB\cdot KN$ (weil $HM=1$, $KN=2$ iſt) nnd dieſes addirt zu NB^2 iſt $=KB^2+KN^2$ (Eukl. II, 4.). Darum haben wir zu unterſuchen, ob auch

$$4KB^2\cdot HT\cdot TM+4KB(HT+TM)+KB^2+KN^2$$

Digitized by Google

ein Quadrat werde. Ferner aber läßt sich KB^2 verwandeln in $KB^2 \cdot HM^2$ (weil $HM = 1$ ist), und dieses addirt zu $4KB^2 \cdot HT \cdot TM$ ist gleich $KB^2(HT + TM)^2$. Es ist also zu untersuchen, ob

$$KB^2(HT + TM)^2 + 4KB(HT + TM) + KN^2$$

ein Quadrat wird. Wenn wir nun $KB(HT + TM)$ gleich der Zahl NR setzen, so wird auch $KB^2(HT + TM)^2 = NR^2$ sein, wie in dem folgenden Satze gezeigt werden wird (ὅπερ ἐξῆς δειχθήσεται s. o.). Es ist also zu untersuchen, ob

$$NR^2 + KN^2 + 4NR$$

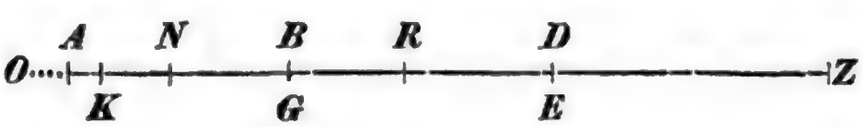
ein Quadrat sei. Aber $4NR$ ist $= 2NR \cdot NK$, weil $NK = 2$ gesetzt ist. Es fragt sich daher, ob

$$NR^2 + KN^2 + 2NR \cdot KN$$

ein Quadrat sei. Es ist dieses aber das Quadrat von KR, dessen Seite KR, wenn man 2 (oder KN) davon abzieht, eine Zahl NR giebt, welche das Product aus dem beständigen Unterschiede KB in die Summe $HT + TM$ ist, und diese Summe ist, wenn man 1, nämlich HM, dazu addirt, die doppelte Anzahl aller angenommenen Zahlen.

Dieser sehr elegante und theilweise überraschende Beweis zeigt wohl ganz klar, daß, wenn auch aus Mangel an Rechnungssymbolen von dem Verfasser räumliche Anschauungen zu Hilfe genommen werden, hier doch von geometrischer Construction nicht eigentlich die Rede sein kann; einer solchen Annahme widerspricht nicht nur der Geist, in welchem die ganze Deduction des Satzes gehalten ist, sondern auch formel die vorkommenden Producte aus vier Dimensionen. Von Geometrie findet sich auch hier weiter nichts, als die Anwendung der Sätze aus Euklid's zweitem Buche, welche aber, ich wiederhole es, schon längst auf die Arithmetik übertragen waren.

Ganz eigenthümlich ist der Gang, den Diophant in dem Beweise seines Hauptsatzes nimmt, den ich deshalb vollständig mittheilen will. Das Schema ist, wie in dem vorigen Satze



„Wir haben nämlich gezeigt, daß die Summe aller vorliegenden Zahlen mit $8KB$ multiplicirt und zu NB^2 addirt, gleich dem Quadrate von KR ist. Setzen wir nun AO auch gleich der Ein-

Digitized by Google

heit, so ist $KO=2$; es ist aber auch $KN=2$, daher haben die drei Zahlen BO, BK, BN gleichen Unterschied. Daher ist (nach dem ersten Satze) das achtfache Product der beiden größern, OB, BK nebst dem Quadrate der kleinsten, BN, gleich einem Quadrate, dessen Wurzel ist die Summe der größten und der doppelten mittlern Zahl, das heißt, es ist

$$8OB\cdot BK+BN^2=[OB+2BK]^2$$

Wenn man aber von der Seite dieses Quadrats, $OB+2BK$, 2 wegnimmt, nämlich OK, so bleibt $3BK$ übrig, das ist das Product von BK in 3; 3 aber ist um 1 kleiner als das Doppelte von 2 (der beständigen Differenz der drei Zahlen BO, BK, BN). Da also die Summe aller Zahlen, die Einheit mitgerechnet, demselben Gesetze unterliegt, welchem die Zahl OB (ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων σὺν τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ πρόβλημα ποιεῖ τῷ $\overline{o\beta}$), die Zahl OB aber beliebig und allemal eine Polygonzahl ist, und zwar die erste nach der Einheit (weil AO die Einheit ist, die zweite Zahl aber AB ist), und ihre Seite 2 ist; so ist auch die Summe aller eine der OB gleichnamige Polygonzahl; und zwar ist die Anzahl der Winkel um $OK=2$ größer als der beständige Unterschied KB, und ihre Seite ist HT, das ist, die Anzahl der vorliegenden Zahlen sammt der Einheit. Es ist also bewiesen, was Hypsikles in der Definition sagt, u. s. w."

Der Schluß, den Diophant hier macht, ist also, nach unserer Weise dargestellt, folgender. Wenn man eine von 1 anfangende arithmetische Progression hat,

$$1,\ b+1,\ 2b+1,\ 3b+1\ \ldots\ldots\ (n-1)b+1,$$

deren Summe wir S nennen wollen, so ist in dem vierten Satze bewiesen worden, daß

$$8Sb+(b-2)^2=[b(2n-1)+2]^2$$

ist. Nimmt man nun die drei Zahlen $b+2$, b, $b-2$, welche auch eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz 2 ist, so ist nach dem ersten Satze

$$8b(b+2)+(b-2)^2=[(b+2)+2b]^2$$
$$=[3b+2]^2$$

Nun ist $b+2$ die Summe der beiden ersten Glieder der Reihe 1, $b+1$ u. s. w.; seine Stellenzahl ist 2, also entspricht 3, in der Wurzel des Quadrats der Coefficient von b, dem Ausdruck $2n-1$. Folglich gehören die Zahlen S und $b+2$ demselben Gesetze an.

Digitized by Google

Da nun $b+2$ eine Polygonalzahl von der Winkelzahl $b+2$ iſt, ſo iſt auch S eine Polygonalzahl von der Winkelzahl $b+2$; das heißt, die Summe irgend einer arithmetiſchen Reihe, die von 1 anfängt, iſt eine Polygonzahl, deren Winkelanzahl um 2 größer iſt als die beſtändige Differenz der Reihe.

Es ſoll mich freuen, wenn es mir gelungen iſt, zu zeigen, wie auch in dieſer Gattung des arithmetiſchen Vortrages Diophant ſeinen ganz eigenthümlichen Weg geht und wie er nicht bloß in der numeriſchen Auflöſung der unbeſtimmten Aufgaben, ſondern auch in der Behandlung ſolcher allgemeinen Zahlenlehren alle ſeine uns bekannten Vorgänger bedeutend überragt. Zugleich nehmen wir auf eine geraume Zeit von dieſem Schriftſteller Abſchied. Wir haben jetzt gezeigt, was er an und für ſich geleiſtet hat, und ſo viel es ſich thun ließ, was aber leider nur ſehr unvollkommen geſchehen konnte, nachgewieſen, in welchem Zuſammenhange das von ihm Geleiſtete zu ſeiner Vergangenheit ſteht. Künftig werden wir noch einmal auf ihn zurückkommen, um zu ſehen, wie er auf die geiſtige Richtung der Folgezeit eingewirkt hat, was, wie wir ſchon oben berührt haben, in Europa erſt ſehr ſpät, erſt gegen das Ende des ſechzehnten Jahrhunderts zu geſchehen anfing.

Digitized by Google

Zwölftes Kapitel.

Die arithmetischen Epigramme der Griechen.

In Diophantus hat sich die Algebra der Griechen zuerst in einem klaren Selbstbewußtsein entwickelt, und zugleich hat die ganze Größe der Kunst sich in diesem einzelnen Geiste concentrirt, so daß das, was wir außerhalb Diophant von Algebra finden, nur sehr spärlich verstreute Brocken sind. Wir haben oben von den ersten Spuren algebraischer Vorstellungen, die sich bei den ältern Arithmetikern finden, gesprochen. Nicht viel bedeutender sind die wenigen Anklänge an diese Kunst, die wir nach Diophant wahrnehmen. Es ist bis jetzt kein mathematischer Schriftsteller der Griechen auch nur dem Namen nach bekannt geworden, der die Fortbildung oder Anwendung der Diophantischen Lehre sich hätte angelegen sein lassen. Dagegen hat die Poesie mit ihren Schwingen das Gebiet dieser Wissenschaft mehrmals berührt. Es befindet sich nämlich in der unter dem Namen der Anthologie bekannten Sammlung kleinerer Griechischen Gedichte, von Konstantin Krephalas und Maximus Planudes zusammengetragen, eine Anzahl sogenannter Epigramme, welche algebraische Aufgaben in das Gewand irgend einer historischen oder zierlich gestellten Räthselfrage kleiden. Als ein Beispiel der Art haben wir schon die letzte (33ste) Aufgabe des fünften Buchs bei Diophantus kennen gelernt, deren Übersetzung und Auflösung ich oben mitgetheilt habe. Vielleicht daß solche versificirte arithmetische Räthsel zu Diophant's Zeit bereits in der Mode waren, und er ein solches nachbildete oder veränderte, um es seiner Methode der unbestimmten Analytik anzupassen. Denn ich bin nicht geneigt, der von Bachet aufgestellten Vermuthung beizutreten, daß Diophant nur zu einem vorgefundenen Epigramme die Auflösung gegeben habe, da die Auflösung dieses Räthsels der ganzen Gewandtheit dieses Meisters bedarf und sich so genau seinen eigenthümlichen Kunstgrif-

Digitized by

sen anpaßt, daß es sicher nur eben seiner Auflösung zu gute aufgestellt ist; auch finden wir in der ganzen übrigen Sammlung dieser arithmetischen Epigramme kein einziges, welches sich über die Gleichungen des ersten Grades erhübe, und nur eine scheinbare Ausnahme werden wir unten kennen lernen. Bei Gelegenheit dieser Diophantischen Aufgabe, welche, beiläufig gesagt, das erste war, was von Diophant's Werk im Original erschienen ist, indem Vieta sie am Ende seiner Zetetika bereits Griechisch mittheilte, hat Bachet in seinen Commentar fünfundvierzig solcher arithmetischer Epigramme aus dem damals noch ungedruckten Palatinischen (Heidelberger) Coder der Griechischen Anthologie eingerückt [1]), welche von da in Heilbronners Geschichte der Mathematik übergegangen sind und sich in den neuern Ausgaben der Anthologie von Brunck und Jacobs zum Theil verbessert wiederfinden. Eine Auswahl aus denselben hat endlich Schulz in metrischer Übersetzung als Anhang zum fünften Buche seines Diophantus gegeben.

Bachet giebt nur ganz unbestimmt Metrodorus als den Verfasser des größten Theils dieser Gedichte an, indem er an dem angeführten Orte sagt: **Unum est quod moneam, maximum horum epigrammatum partem Metrodoro tribui, quibusdam vero alia nomina esse praefixa, quaedam denique incertos habere authores.** Die ersten vierundzwanzig finden sich bei Brunck [2]) ebenfalls unter der unbestimmten Überschrift: Προβλήματα ἀριθμητικὰ Μητροδώρου τὰ πλεῖστα; dagegen giebt er Bachet's fünfundvierzigstes Epigramm unter Euklide's Namen [3]). Die Ausgabe von Jacobs bezeichnet bestimmter die Epigramme 10—40 als dem Metrodorus angehörig; Bachet's erstes schreibt sie einem gewissen Sokrates zu, ob dem berühmten Philosophen, mag da-

---

1) p. 349.: **Quoniam vero argutum epigramma, incertum an ab ipso confictum, vel ab alio quopiam mutuatum, nobis exhibuit Diophantus, placet hoc loco elegantissima aliquot epigrammata proferre, non injucundas quaestiones de rebus arithmeticis continentia, quae nondum edita fuerunt, quaeque pridem e codice probatissimo Palatino excerpta tradidit nobis vir eruditissimus Claudius Salmasius etc.** — Indeß sind die fünf letzten schon vor Bachet in den ältern Ausgaben der Anthologie gedruckt worden. S. Lessing, Zur Geschichte der Literatur Th. I. S. 421.

2) **Analecta vet. poet. Graec. T. II. p. 477 sqq.**

3) **Ibid. T. I. p. 168.**

Digitized by Google

hingestellt bleiben; die übrigen, bei Bachet 2—9 und 41—44, führen die Überschrift ἀδέσποτα, herrenlose, anonyme [4]). Außerdem giebt Jacobs aber unter Metrodorus Namen noch eines, welches ich, da es in den übrigen Ausgaben dieser Räthsel fehlt, hier Deutsch mittheilen will, obgleich es durch Zierlichkeit der Einkleidung sich eben nicht auszeichnet.

Siehe, Sonne und Mond und des ewig kreisenden Himmels
Schweifende Pilger vertheilten dem Manne also das Leben.
Bei der geliebten Mutter ein Sechstel der Jahre verweilen
Hilflos soll er; ein Achtel darauf mit mancherlei Sorgen
Kämpfen; die heimische Ruh, und Weib und Kind, die geliebten,
Gönnen die Götter ihm nur in einem Drittel des Lebens.
Dann unter Scythischem Schwerdt siehst du die Gattin, den Knaben
Fallen; beweinend die Theuren mit bittern Thränen, gelangst nach
Siebenundzwanzig Jahren du an die Grenze des Lebens.

Scheinbar arithmetisch ist noch ein anonymes Monostichon, bei Jacobs a. a. O. Nr. 8., bei Brunck Bd. 3. S. 334., welches so lautet:

Ἓξ, ἕν, πέντε, δύο, τρία, τέσσαρα κῦβος ἐλαύνει,

wo der Gebrauch des Worts κῦβος (—υ) statt κύβος (υυ) auffallend ist. Schwerlich ist wohl gemeint, daß (6+1)(5+2)(3+4) ein Kubus ist, sondern es ist hier wahrscheinlich an den Spielwürfel zu denken, welcher die Zahlen eins bis sechs zeigt.

Übrigens ist kaum nöthig zu bemerken, daß die Namenangaben in der Anthologie von wenig Auctorität sind. Zumal trägt es augenscheinlich den Stempel der Fiction zur Schau, wenn dergleichen poetisch-mathematische Spielereien einem oder dem andern der alten berühmten Mathematiker zugeschrieben werden. Sicher gehören alle diese Räthsel einem viel spätern Zeitalter und einem spätern Geschmacke an, und Euklides hat an Bachet's letztem Epigramme gewiß ebensowenig Antheil als Archimedes an einem andern, welches wir zum Beschlusse dieses Kapitels betrachten werden.

Da alle diese Aufgaben einander sehr ähnlich sind, so wäre es hier an ganz unrechtem Orte, eine große Anzahl derselben mitzutheilen. Die meisten führen auf eine Gleichung von der Form

---

4) Anthologia Graeca T. II. p. 547 sqq. p. 579 sqq. p. 763. Diese und ähnliche Räthselspiele hat Jacobs im Abschnitt XIV. unter der Überschrift: Προβλήματα ἀριθμητικὰ, αἰνίγματα, χρησμοί zusammengestellt.

Digitized by Google

$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\cdots\right)x+a=x$$

und nur wenige sind darunter, die eine andere Gestalt haben, wie etwa folgende, bei Bachet die achte:

Sechs Pfund schwer, sechs Schalen von Gold verehrete Krösus,
Aber ein einziges Loth steckte in jeglicher mehr.
(Übers. v. Schulz.)

Auch findet sich darunter schon in verschiedenen Einkleidungen die berühmte Aufgabe von dem Gefäße, welches durch mehre Röhren gefüllt wird; z. B. Nr. 23. (Bachet).

Von vier Röhren füllet das Becken die erste in einem
Tage, die zweite in zwei, die dritte in dreien, die vierte
Braucht vier Tage; wieviel Zeit brauchen sie alle zusammen?

Ebenso berühmt ist die Art der Aufgaben geworden, in welchen verlangt wird, durch gegenseitiges Abgeben an einander ein gewisses Verhältniß herzustellen. Dieser Art ist unter andern das vorgeblich Euklidische Problem Nr. 45.

Esel und Maulthier schritten einher beladen mit Säcken.
Unter dem Drucke der Last schwer stöhnt' und seufzte der Esel.
Jenes bemerkt es und sprach zu dem kummerbeladnen Gefährten:
„Alterchen, sprich, was weinst du und jammerst schier wie ein Mägdlein?
„Doppelt soviel als du grad' trüg' ich, gäbst du ein Maaß mir;
„Nähmst du mir eines, so trügen wir dann erst beide dasselbe."
Geometer, du kundiger, sprich, wieviel sie getragen.

Zum Beschlusse gebe ich nun noch die Übersetzung des oben S. 255. Griechisch mitgetheilten Epigramms [5]), in welchem Metrodorus das Lebensalter Diophant's bestimmt.

Hier dies Grabmal deckt Diophantus. Schauet das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündniß der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.

Die

5) S. Jacobs XIV. 126. Brunck T. II. p. 483. T. III. p. 229. Bachet Nr. 19.

Digitized by Google

Die äußere Einkleidung dieser Aufgabe ist wegen der hineingelegten Beziehung des Inhalts zur Auflösung jedenfalls geistreich zu nennen, wenn auch nicht eben Diophantische Kunst erfordert wird, um aus diesen Angaben die Lebensjahre des großen Arithmetikers zu berechnen. Soviel ist aber wohl gewiß, daß hier von dem berühmten und von keinem andern Diophant die Rede ist.

Sind nun diese Angaben, welche alle ohne Ausnahme den Gleichungen des ersten Grades angehören und sich sehr füglich auch ohne Algebra lösen lassen, schon eben darum nicht von großer Bedeutung, so wird ihr Werth für die Geschichte der Wissenschaft dadurch noch geringer, daß uns bei keiner einzigen die Art, wie man sie gelöst hat, mitgetheilt wird. Das bloße Aufstellen eines Problems kann aber niemals als Maaßstab für den wissenschaftlichen Standpunct Dessen, der es stellte, gebraucht werden, da es sehr wohl möglich ist, daß Jemand eine Aufgabe stellt, die er selbst nicht aufzulösen vermag, wovon uns sogleich ein historisches Beispiel völlig überzeugen wird.

Es hat nämlich Lessing die Anzahl der arithmetischen Epigramme der Anthologie um eines vermehrt, welches er im Jahre 1773 aus einem Wolfenbütteler Codex bekannt machte [6]), und das sich in vielfacher Hinsicht von den übrigen unterscheidet, besonders aber in kritischer Beziehung unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt. Lessing war selbst nicht genug Mathematiker, um die in der That schwierige Aufgabe von dieser Seite beurtheilen und behandeln zu können; er theilt daher an dem angeführten Orte die Auflösung eines Andern, Chr. Leiste, mit, leider aber mit vielen Druckfehlern, welche bei den sehr großen Zahlenresultaten höchst unangenehm sind. Späterhin ist dasselbe Gedicht noch einmal Gegenstand einer besondern kleinen Abhandlung geworden, welche den Titel führt: „Altes griechisches Epigramm, mathematischen Inhalts, von Lessing erst einmal zum Drucke befördert, jetzt neu abgedruckt und mathematisch und kritisch behandelt von Dr. J. Struve und Dr. K. L. Struve, Vater und Sohn. Altona 1821. 8vo." Der Antheil des Letztern beschränkt sich auf die Revision des Textes, der allerdings in Lessings Ausgabe nicht ganz rein ist; der Erstere dagegen hat die mathematische Auflösung des Problems gegeben,

6) Zur Geschichte der Literatur Bd. I. S. 421—446.

Digitized by Google

die sich übrigens von der achtundvierzig Jahre früher von Leiste mitgetheilten fast nur durch größere Ausführlichkeit, welche häufig in eine jenem Schriftsteller eigne unangenehme Weitschweifigkeit ausartet, unterscheidet; denn auf sechsunddreißig Seiten führt Struve die Sache nicht um einen wesentlichen Schritt weiter als Leiste auf acht Seiten gethan hatte.

Die Überschrift bemüht sich, das Gedicht in Archimedes und Eratosthenes Zeitalter hinaufzurücken, ohne es geradezu dem erstgenannten Mathematiker als Verfasser zuzuschreiben; sie lautet nämlich:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ὁπερ ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν
τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν,
ἐν τῇ πρὸς ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ τὸν ΚΥΡΗΝΑΙΟΝ
ἐπιστολῇ.

„Ein Problem, welches Archimedes unter andern Epigrammen aufgefunden hatte und welches er den in Alexandria mit dergleichen sich beschäftigenden Gelehrten zur Auflösung zuschickte, in einem an Eratosthenes von Kyrene gerichteten Briefe."

Mit Recht sprechen sowohl Struve, als auch schon vor ihm Klügel[7]) dem Räthsel dieses hohe Alter durchaus ab; denn in der That, die ganze Art und Weise, in der es vorgetragen wird, sowie auch die Sprache verrathen zu deutlich eine sehr viel spätere Abfassungszeit, wenn auch nicht gerade, wie Klügel glaubt, aus dem Inhalte und der Auflösung geschlossen werden kann, daß der Verfasser bereits die dekadische Arithmetik, das heißt, unser jetziges Zahlensystem gekannt habe; denn der Verfasser hat, wie wir unten sehen werden, sein Problem nicht aufgelöst, woher aus der Schwierigkeit des Problems durchaus kein Schluß auf des Verfassers Kenntnisse gezogen werden kann.

Bevor ich diesen Punct aber näher erörtere, folge hier zunächst das Gedicht selbst in einer metrischen Übersetzung, deren Holprigkeit man theils mit der völlig unpoetischen Beschaffenheit des Gegenstandes, theils damit entschuldigen möge, daß das Original in der That nicht viel fließender klingt.

---

7) Mathem. Wörterbuch Th. I. S. 184.

Digitized by Google

Sage mir an, o Freund, die Zahl von Helios Rindern,
Sorgsam sinnend darob, hast an der Weisheit du Theil,
Wie groß war die Heerde, die einst auf Thrinakria's Fluren
Weidete. Vierfach getheilt war sie in Haufen gereiht
Mannigfaltig an Farbe. Denn milchweiß waren die einen,
Aber in bläulichem Glanz strahlte die andere Schaar,
Gelb die dritte und scheckig die vierte der Schaaren. Es faßte
Stiere jegliche Schaar mächtig in Haufen gedrängt,
Wohl geordnet nach folgendem Maaß. (I.) Die weißlichen kamen
Grade der bläulichen Hälft' und noch dem Drittel dazu
Nebst den gelben gesammt an Zahl gleich; dieses bedenke.
(II.) Aber die bläuliche Schaar war ein Viertel gerad'
Nebst einem Fünftel der bunten und allen gelben zusammen.
(III.) Die noch übrige Schaar, Stiere von scheckiger Haut,
War dem Siebentel gleich und dem sechsten Theile der weißen,
Nebst den gelben gesammt wieder gerechnet dazu.
Aber die weiblichen Rinder verhielten sich also. (IV.) Die weißen
Waren der bläulichen Schaar, Stieren und Kühen zusammt,
Drittem Theile und viertem, gehörig addiret, genau gleich.
(V.) Drauf die blauen sodann waren dem vierten und dem
Fünften Theile zusammen der scheckigen Rinder an Zahl gleich,
Stieren und Kühen zugleich, die auf den Weiden man sah.
(VI.) Aber der gelben Heerde nun fünftem Theile und sechstem
Waren die scheckigen gleich, zählst du die Menge genau.
(VII.) Endlich die gelben erschienen der Hälfte des Drittels an Zahl gleich
Alles weißlichen Vieh's, nebst ihrem siebenten Theil.
Freund, nennst du nun genau die Menge von Helios Rindern,
Sagst du besonders die Zahl feister Stiere mir an,
Sagst, wie viele da waren der Kühe von jeglicher Farbe,
Nicht unkundig fürwahr nennt man im Rechnen dich dann.

Jedermann sieht und fühlt, daß hier die Aufgabe zu Ende ist. Es wird nach dem Resultate, nach der aus den aufgestellten Bedingungen zu bestimmenden Anzahl der Stiere und Kühe von jeder Farbe gefragt, und demjenigen, der die Auflösung angiebt, der Ruhm eines tüchtigen Rechners zugesichert. Bis hieher haben wir eine gewöhnliche unbestimmte Aufgabe des ersten Grades, welche für acht Unbekannte sieben Gleichungen hergiebt, also unendlich viele Auflösungen zuläßt, von denen aber vielleicht nur eine Combination in die bildliche Einkleidung der Aufgabe passen wird, weil wir für das fruchtbare und seit Homer's Zeiten als rinderreich bekannte Sicilien nicht eine zu winzige Anzahl annehmen, andrerseits aber auch nicht die ganze Insel mit Hornvieh überschwemmen dürfen. Indeß

Digitized by Google

wird der Erfolg zeigen, daß wir in die erſtere Verlegenheit gar nicht kommen.

Ich habe nach Struve's Vorgang die Stellen des Gedichts, aus welchen die Data zu den Gleichungen hervorgehen, mit den Römiſchen Zahlen bezeichnet; folgen wir nun auch noch demſelben Schriftſteller in der Bezeichnung der einzelnen Unbekannten, welche er ſehr zweckmäßig ſo wählt, daß er die Anzahl der Rinder jeder Farbe, der weißen, blauen, gelben und ſcheckigen, durch die Anfangsbuchſtaben dieſer Farbenadjectiva, und zwar die Stiere durch die großen, die Kühe durch die entſprechenden kleinen Buchſtaben ausdrückt, ſo erhalten wir folgende ſieben Gleichungen:

$$\text{I.}\quad W = (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})B+G = \tfrac{5}{6}B+G$$
$$\text{II.}\quad B = (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5})S+G = \tfrac{9}{20}S+G$$
$$\text{III.}\quad S = (\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7})W+G = \tfrac{13}{42}W+G$$

Dieſe drei Gleichungen gelten bloß den Stieren; durch die folgenden vier wird für die Beſtimmung der Kühe geſorgt:

$$\text{IV.}\quad w = (\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})(B+b) = \tfrac{7}{12}B+\tfrac{7}{12}b$$
$$\text{V.}\quad b = (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5})(S+s) = \tfrac{9}{20}S+\tfrac{9}{20}s$$
$$\text{VI.}\quad s = (\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6})(G+g) = \tfrac{11}{30}G+\tfrac{11}{30}g$$
$$\text{VII.}\quad g = (\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7})(W+w) = \tfrac{13}{42}W+\tfrac{13}{42}w.$$

Wenn wir nun zunächſt die erſten drei Gleichungen, welche bloß die großen Buchſtaben enthalten, betrachten, und W, B, S durch G ausdrücken, ſo erhalten wir für die Stiere folgende Reſultate:

$$W = \frac{2226}{891}G$$
$$B = \frac{1602}{891}G$$
$$S = \frac{1580}{891}G$$

Da aber doch offenbar in der Aufgabe nur von ganzen Stieren die Rede ſein kann, ſo ſetzen wir, um für alle vier Farben ganze Zahlen zu erhalten, G gleich einem unbeſtimmten Vielfachen von 891, ſo wird

$$W = 2226m$$
$$B = 1602m$$
$$S = 1580m$$
$$G = 891m$$

Subſtituiren wir dieſe Werthe in die vier folgenden Gleichungen, ſo ergeben ſich daraus folgende Reſultate für die Anzahl der Kühe.

Digitized by Google

$$w = \frac{7206360}{4657} m$$

$$b = \frac{4893246}{4657} m$$

$$s = \frac{3515820}{4657} m$$

$$g = \frac{5439213}{4657} m$$

Nun müssen wir abermals, um auch hier ganze Werthe zu erhalten, $m = 4657\,n$ setzen, so erhalten die acht gesuchten Zahlen folgende Werthe:

$$W = 10\,366\,482\,n \qquad w = 7\,206\,360\,n$$
$$B = 7\,460\,514\,n \qquad b = 4\,893\,246\,n$$
$$S = 7\,358\,060\,n \qquad s = 3\,515\,820\,n$$
$$G = 4\,149\,387\,n \qquad g = 5\,739\,213\,n$$

Nehmen wir hier nun die kleinsten Werthe, indem wir $n = 1$ setzen, so erhalten wir auf Sicilien eine Gesammtzahl von 50 389 082 Rindern. Nun umfaßt Sicilien gegen 500 Quadratmeilen; es kämen also im Durchschnitt auf jede Quadratmeile mehr als 100000 Stück Hornvieh, so daß jedes Stück zu seinem jährlichen Unterhalte nur etwa 40 Quadratruthen Land behielte, vorausgesetzt, daß ganz Sicilien Wiese wäre. Aber Sicilien war auch von jeher ein ergiebiges Korn- und Weizenland, und dieser Umstand würde dem Rindvieh noch ein bedeutendes Terrain entziehen. Demnach ist das aus den in der Aufgabe gestellten Bedingungen hervorgehende kleinste mögliche Resultat schon sehr viel zu groß, und der Verfasser hat also nicht, wie es doch ein vernünftiger Rechenmeister immer thun sollte, das Resultat bedacht, bevor er die Aufgabe niederschrieb. Fassen wir diese Erscheinung zusammen mit der nicht sehr klassischen Sprache und den scheinbar poetischen, im Grunde aber nur die metrischen Linken ausfüllenden geschmacklosen Ausschmückungen, so scheinen wir zu dem Schlusse berechtigt zu sein, daß das vorliegende Epigramm ein Erzeugniß der Zeit des gesunkenen Geschmacks und der urtheilslosen, unüberlegten Nachahmung ist, welches sich durch den Mißbrauch der großen Namen Archimedes und Eratosthenes Auctorität bei seinen Zeitgenossen erzwingen will. Ja vielleicht dürfte der Umstand, daß Krephalas und Planudes, die doch nach solchen Räthseln und ähnlichen innerlich werthlosen Künsteleien eifrig haschten, unser Epigramm in ihre Sammlungen nicht aufgenommen haben, ein noch ungünstigeres Resultat für seine Abfassungszeit liefern und es wohl gar über das vierzehnte Jahrhundert hinausschieben.

Digitized by Google

Aber wir sind noch lange nicht damit fertig. Entweder der Verfasser selbst, oder, was wahrscheinlicher ist, ein späterer Leser, war mit den gewonnenen schon ganz respectablen Resultaten der Aufgabe noch nicht zufrieden, sondern fügte derselben noch zwei neue Bedingungen hinzu, welche trotz ihrer scheinbaren Anspruchlosigkeit die Rinderzahl Siciliens dermaßen vergrößern, daß, wenn man die ganze Erde in einen Kuhstall des Sonnengottes verwandelte, sie doch schwerlich im Stande sein würde, diese Anzahl zu fassen. Nachdem nämlich das Epigramm, wie wir gesehen haben, bereits einen vollständigen rhetorischen Schluß erhalten und ein allen bescheidenen Anforderungen vollkommen genügendes Resultat geliefert hat, hebt es noch einmal von Neuem an, und benutzt den Umstand, daß in dem zweiten Verse dem Ausrechner Weisheit (εἰ μετέχεις σοφίης) zugemuthet war, von der nachher in dem Schlußverse nicht die Rede ist, welcher bloß sagt:

Οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι, οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής.

Da sagt nun der Fortsetzer:

Οὐ μήν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος, ἀλλ' ἴθι φράζευ
Καὶ τάδε πάντα βοῶν ἠελίοιο πάθη.

u. s. w. Der Anhang lautet Deutsch vollständig so:

Doch zu den Weisen noch zählt man dich nicht; drum komm' noch und sage
Auch dies Alles mir an, was bei den Rindern sich fand.
(VIII.) Wenn sich die weißen Stiere verbanden in sämmtlicher Anzahl
Mit den blauen, sodann standen geregelt sie da
Gleich an Länge und Breite; es füllte dann ihre Menge
Ganz Thrinakria's Flur, ziegelgestaltig geformt.
(IX.) Stellten sich aber zusammen die gelben und scheckigen Stiere,
Einer voran, und dazu mehrend die andern gereiht,
Bildeten sie vollständig ein Dreieck; und keine von andern
Farben kamen hinzu, noch auch fehlten sie dran [8]).

---

8) οὔτε προσόντων.
Ἀλλοχρόων ταύρων, οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Über diesen letzten müßigen Gegensatz siehe K. L. Struve S. 45. 46. Unter ähnlichen Beispielen solcher Gegensätze, von denen nur der eine Theil in den Sinn paßt, führt Struve die Worte aus Sophokles Antigone an (v. 1108): ἴτ', ἴτ' ὀπάονες, οἵ γ' ὄντες, οἵ τ' ἀπόντες; „geht, geht, Gefährten, wer hier ist und wer nicht hier ist!"

Digitized by Google

Findeſt dieſes du noch, und kannſt im Gehirn du es faſſen,
Giebſt du die Zahlen mir an jeder der Schaaren, o Freund,
Dann geh rühmend als Sieger einher, dann ſei du bewußt dir,
Ein fruchttragender Baum ſeiſt in der Weisheit du jetzt.

Es kommen alſo zu den vorigen ſieben Bedingungen noch folgende beiden hinzu:

VIII. $W+B$ ſoll eine Quadratzahl, und
IX. $S+G$ ſoll eine dreieckige Zahl ſein.

Beide Bedingungen treffen für die kleinſten der oben gefundenen Werthe nicht zu. Laſſen wir einſtweilen die neunte unbeachtet, und faſſen allein die achte ins Auge, ſo iſt

$$W+B = 17\,826\,996\,n$$

Aber 17 826 996 iſt ein Product der Factoren $3\cdot4\cdot11\cdot29\cdot4657$, unter denen 4 der einzige quadratiſche iſt; wir müſſen alſo, damit die Bedingung VIII. erfüllt werde, n mindeſtens $=3\cdot11\cdot29\cdot4657$, das iſt $=4456749$ ſetzen, und damit die acht oben gefundenen Zahlen multipliciren. Weil es nun aber immer noch möglich iſt, daß die ſo gefundenen Werthe für S und G der neunten Bedingung nicht entſprechen, ſo müſſen wir der Sicherheit wegen dieſen Werthen noch einen unbeſtimmten quadratiſchen Factor p^2 geben. Somit erhalten wir nun

$W = 46\,200\,808\,287\,018\,p^2$ $\quad$ $w = 32\,116\,937\,723\,640\,p^2$
$B = 33\,249\,638\,308\,986\,p^2$ $\quad$ $b = 21\,807\,969\,217\,254\,p^2$
$S = 32\,793\,026\,546\,940\,p^2$ $\quad$ $s = 15\,669\,127\,269\,180\,p^2$
$G = 18\,492\,776\,362\,863\,p^2$ $\quad$ $g = 24\,241\,207\,098\,537\,p^2$

Jetzt iſt allerdings $W+B$ eine Quadratzahl, deren Wurzel $8\,913\,498\,p$ iſt; aber es iſt auch die Anzahl der Rinder Siciliens dadurch, ſelbſt wenn wir dem p den kleinſten Werth $=1$ geben, auf mehr als 224 Billionen angewachſen, ſo daß wir jetzt etwa 450 Tauſend Millionen Stück auf die Quadratmeile, oder, risum teneatis amici, beinahe 800 Stück auf jeden Quadratfuß erhalten. Und die Rinder des Sonnengottes werden überall als ſehr wohl genährt geſchildert!

Aber der Unſinn wird noch ärger, wenn wir die neunte Bedingung hinzunehmen. Es ſoll nämlich auch noch $S+G$ eine dreieckige Zahl, alſo das Achtfache, wenn man 1 dazu addirt, eine Qua-

Digitized by Google

dratzahl werden. Machen wir nun den Versuch mit den Werthen, wenn $p = 1$ ist, so ist

$$S + G = 51\,285\,802\,909\,803, \text{ also}$$
$$8(S+G)+1 = 410\,286\,423\,278\,425$$

Und das soll ein Quadrat sein. Dividiren wir aber diese letzte Zahl durch den quadratischen Factor 25, so erhalten wir den Quotienten

$$16\,411\,456\,931\,137$$

welcher nicht Quadratzahl ist, weil keine Quadratzahl auf die Ziffer 7 ausgehen kann. Wir können also nicht $p = 1$ setzen, sondern müssen dafür einen andern und zwar größern Werth suchen, damit $8(S+G)+1$ ein Quadrat werde. Nennen wir nun der Kürze halber die für den Werth $p = 1$ gefundene Summe für $S+G$ einfach A, so kommt es darauf an, für p einen ganzen Zahlenwerth zu finden, welcher der Gleichung

$$8Ap^2 + 1 = q^2$$

entspricht. Da nun glücklicherweise $8A$ keine Quadratzahl ist, so ist die Auflösung dieser Gleichung, theoretisch betrachtet, durchaus möglich, und würde auch unter andern Umständen ohne eben große Schwierigkeit zu bewerkstelligen sein; sie wird aber in dem vorliegenden Falle unausführbar wegen der enormen Größe des Coefficienten $8A$, dessen Quadratwurzel man in einen Kettenbruch verwandeln soll. Darum wird wohl, wenn nicht einmal Jemand durch Zufall auf einen passenden Werth von p geräth, die letzte neunte Bedingung des vorliegenden Problems noch einige Zeit unerfüllt bleiben, zumal die Lösung derselben durchaus kein wissenschaftliches Interesse hat. Soviel nur läßt sich leicht einsehen, daß der kleinste ganze Werth für p sehr groß werden wird.

Lessing hat ein in seinem Codex befindliches Scholion zu diesem sogenannten Epigramme mit abdrucken lassen, welches, ohne auf die Art der Ausrechnung und Behandlung der Aufgabe einzugehen, acht Zahlen für die acht unbekannten Größen angiebt. Diese Zahlen des Scholiasten entsprechen vollkommen den ersten sieben Bedingungen der Aufgabe, und wir würden sie erhalten, wenn wir oben $n = 80$ setzten. Seine Versicherung aber, daß durch diese Zahlen auch die achte und neunte Bedingung erledigt werde, ist unwahr; denn die Zahlen passen zu keiner von beiden Bedingungen.

Digitized by Google

Wenn indeß das Stück der Aufgabe, welches die beiden letzten Forderungen ausspricht, sich schon aus formellen Rücksichten, die ich eben berührt habe, als ein später hinzugefügter Anhang kund giebt, so wird dieser Verdacht noch bedeutend unterstützt, wenn wir folgende Puncte bedenken.

Erstens ist es auffallend, daß in diesem Theile der Aufgabe die Kühe ganz unberücksichtigt und nur die Stiere Gegenstand der Rechnung bleiben.

Zweitens beweist die unvernünftige Größe der Zahlen, welche allein schon aus der achten Bedingung hervorgehen, daß Derjenige, der diese und die folgende Bedingung hinzufügte, gar nicht mehr an die bildliche Einkleidung der Aufgabe, das heißt, an Siciliens Hornvieh gedacht hat. Es ist ihm ohne alle Rücksichten auf Wahrscheinlichkeit und Möglichkeit bloß darum zu thun, die Rechnung mit neuen Schwierigkeiten zu belasten, die er freilich, wie wir mit der größten Sicherheit behaupten können, selbst nicht gelöst hat. Es scheint in der That, als wenn irgend ein fader Wortklauber sich an dem Ausdrucke σοφίη im zweiten Verse gestoßen, und bloß darum noch auf gutes Glück hin zwei Forderungen hinzugefügt habe, um auch diese σοφίη dem Ausrechner zusprechen zu können. Was nun aber aus dem Resultat werde, und ob es überhaupt noch möglich sei, ein solches zu finden, nach solchen Nebensachen fragte der φιλόλογος nicht, war auch wahrscheinlich nicht im Stande, das einzusehen.

Drittens aber verräth ein offenbarer Unsinn in den Worten des Anhangs, daß wir es hier mit einem Menschen zu thun haben, der sich um keinen Zusammenhang kümmerte, und dem es bloß galt, ein Paar regelrechte Verse anzuschmieden. Es heißt, wenn die weißen und blauen Stiere sich in ein Quadrat zusammenstellen, so füllen sie die ganze dreieckige, ziegelförmige Insel. Das Original nämlich lautet:

Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο (?) πληθὺν
Κυανέοις ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
Εἰς βάθος εἰς εὖρός τε· τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
Πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.

Abgesehen davon, daß hier die Hauptbedingung, daß nämlich $W+B$ eine Quadratzahl werden soll, ziemlich undeutlich ausge-

Digitized by Google

drückt ist und fast errathen werden muß, lassen sich folgende Fragen billig aufwerfen. Erstens, wie kann die Insel Thrinakria (Thrinakia, Trinakia, und am genauesten Trinakria, mit drei Vorgebirgen), die dreieckige, ziegelförmig sein? Aber hier ist vielleicht, wie K. L. Struve annimmt [9]), eine falsche Lesart eingedrungen und statt πλίνθου irgend etwas anderes zu lesen. Wie kann aber, fragen wir zweitens, das ziemlich dreieckige Sicilien von einer quadratförmig aufgestellten Rinderheerde ganz bedeckt werden? Wie kann man, wenn wir die Sache rein geometrisch betrachten, in ein Dreieck ein Quadrat beschreiben, welches den ganzen Flächenraum jenes einnimmt? Drittens aber, wenn die weißen und blauen Stiere die ganze Insel anfüllen, wo bleiben dann die scheckigen und gelben Stiere und sämmtliche Kühe? Offenbar hat den alten Knasterbart, wie J. Struve ihn nennt, Gedankenlosigkeit und schaler Wortprunk zu dem vollendetesten Unsinn hingerissen, abgesehen davon, daß er nicht verstanden hat, was er schrieb, und nicht gewußt hat, daß die Erfüllung der ohne Verstand von ihm angeflickten Bedingungen, wenn sie auch vernünftig ausgesprochen worden wären, mit unüberwindlichen Schwierigkeiten zu kämpfen habe.

Da also die verschiedenen Bedingungen, welche die Auflösung dieses Problems erschweren und welche demselben einen Platz unter den Diophantischen Aufgaben zu beanspruchen scheinen, keinesweges von dem Verfasser aus Überlegung und Sachkenntniß zusammengestellt, sondern völlig ins Blaue hinein zusammengewürfelt sind, so wird dadurch diese Erscheinung, die unter andern Umständen höchst interessant hätte sein können, für die Geschichte der Algebra ganz werthlos; ihr Inhalt berechtigt durchaus zu gar keinem Schlusse in Betreff des Zustandes der Wissenschaft, oder höchstens zu dem subjectiv sehr ungünstigen, daß der Verfasser, wenigstens des Anhangs, es in der Algebra nicht sehr weit gebracht haben könne.

Jacobs hat dieses Epigramm in seine Ausgabe der Anthologie aus unbekannten Gründen nicht aufgenommen. Sicher aber könnte ein künftiger Herausgeber dasselbe an der oben bezeichneten Stelle abbrechen, oder wenigstens den Anhang als unecht bemerklich machen, wenn wir nämlich unter unecht hier soviel verstehen, daß dieser Anhang von einem andern Verfasser herrührt als der erste

9) S. seine Note n. S. 42. 43.

Digitized by Google

Theil des Gedichts. In anderm Sinne könnte man das ganze Gedicht unecht nennen, denn aus Archimedes Zeitalter rührt auch der erste Theil nicht her. Schwerlich würde Archimedes die einfache Aufgabe, wie der erste Theil sie stellt, für würdig gehalten haben, sie den Alexandrinischen Gelehrten zur Auflösung zuzuschicken; an eine Betrachtung der dreieckigen Zahlen ist aber in jener Zeit wohl noch nicht zu denken; wenigstens haben wir dafür kein anderes vollwichtigeres Zeugniß.

Zusätze und Berichtigungen.

Zu S. 3. Note 7.

Die Worte Menage's, *At Proclus in IV. primi Euclidis testatur*, heißen nicht, wie ich aus Übereilung niedergeschrieben habe, Proklus sage das im vierten Buche seines Commentars über Euklid's erstes Buch, sondern offenbar: Proklus in seinem Commentar zum vierten Satze des ersten Buchs der Elemente. Aber auch so ist das Citat falsch und was ich weiter darüber gesagt habe, hat in voller Kraft seine Richtigkeit. Die Stellen, in welchen Eudemus von Proklus citirt wird, sind folgende:

Ad Def. VIII. (Lib. II. pag. 35.): Εὔδημος μὲν ὁ περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γράψας, ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχώρησεν.

Ad Prop. XV. (Lib. III. pag. 79.): τοῦτο τοίνυν τὸ θεώρημα δεικνυσιν, ὅτι δύο εὐθειῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσίν· εὑρημένον μὲν, ὡς φησιν Εὔδημος, ὑπὸ Θαλοῦ πρώτου.

Ad Prop. XXIII. (Lib. III. p. 87.): Πρόβλημα τοῦτο Οἰνοπίδου μὲν εὕρημα μᾶλλον, ὡς φησιν Εὔδημος. (***Barocius:*** **Problema hoc quoque est, quod *Oenopidis* quidem potius *quam Euclidis* inventum lucrum est, ut ait *Eudemus.*)**

Ad Prop. XXVI. (Lib. III. p. 92.): Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα· τὴν γὰρ τῶν ἐν θαλάττῃ πλοίων ἀπόστασιν, δι' οὗ τρόπου φασὶν αὐτὸν δεικνῦναι, τούτῳ προχρῆσθαι φησὶν ἀναγκαῖον.

Ad Prop. XXXII. (Lib. IV. pag. 99.): Εὔδημος δὲ ὁ περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀνατέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὕρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας.

Ad Prop. XLIV. (Lib. IV. pag. 109.): Ἔστι γὰρ ἀρχαία φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα.

Dagegen nennt Proklus in dem Commentar zu Prop. IV. pag. 63—66. weder Eudemus noch Thales. Wollten wir aber IV. als einen Druckfehler für V. ansehen, so finden wir p. 67. 68. allerdings Thales citirt, aber nicht Eudemus. Es heißt da nämlich: τῷ μὲν οὖν Θαλῇ τῷ παλαιῷ πολλῶν τε ἄλλων εὑρέσεως ἕνεκα καὶ τοῦτε τοῦ θεωρήματος χάρις· λέγεται γὰρ

Digitized by Google

δὴ πρῶτος ἐκεῖνος ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν, ὡς ἄρα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσίν, etc.

Zu S. 7. Note 14.

Außer dem Anfange des fünften Buchs sind noch folgende einzelne Abschnitte von Pappus Werke im Original gedruckt worden:

1. Lib. IV. prop. 25—29, über die Quadratrix des Dinostratus, mit lateinischer Übersetzung in
   Jos. Torelli Veronensis geometrica. Veronae, 1769. 8vo. pag. 89—104.
2. Ein Stück der Vorrede des siebenten Buchs, der Anfang und die Euklid's Data betreffende Stelle, in der Vorrede von
   Euclidis quae supersunt omnia gr. et lat. Ex rec. *D. Gregorii*. Oxon. 1703. fol.
3. Die ganze Vorrede und die ersten einundzwanzig Sätze des siebenten Buchs, des Apollonius sectio rationis und sectio spatii betreffend in
   Apollonii Pergaei de sect. rationis libri duo (ex arab. ms. lat. versi). Acc. ejusd. de sect. spatii libri duo restituti. Praemitt. *Pappi Alex.* praef. ad VII. collect. math. nunc. primum graece edita, c. lemmat. *Pappi* ad hos Apollonii libros. Op. et st. *Edm. Halley*. Oxon. 1706. 8vo.
4. Die folgenden Sätze, 22—64, desselben Buchs, die sectio determinata betreffend, in
   Apollonius Batavus auct. *Willebrodi Snellii*, seu resuscitata Apollonii geometria περὶ διωρισμένης τομῆς s. de sect. determ. Lugd. Bat. 1608. 4to.
5. Die Sätze 96—118. desselben Buchs über Apollonius Schrift de tactionibus, in
   Apollonii Pergaei de tactionibus quae supersunt, ac max. lemmata *Pappi* in hos libros, nunc prim. ed. a *J. W. Camerer*. Gotha, 1795. 8vo.
6. Die Lemmata zu Apollonius Kegelschnitten, lib. VII. prop. 165—234, in
   Apollonii Pergaei conicorum libri IV. priores cum *Pappi Alex.* lemmatibus et *Eutocii Ascal.* comment. ed. *Edm. Halleius*. Oxon. 1710. fol.
7. Einige andere Lemmata des siebenten Buchs sollen sich befinden in
   M. Meibomii de proportionibus dialogus. Hafniae, 1655. fol. pag. 154 sqq.

Vergl. Reimer in Bossut Gesch. d. Math. Bd. 1. S. 389. 390.
Schöll, Gesch. d. griech. Literatur, Bd. 2. S. 235 flg. Bd. 3. S. 336.

Zu S. 24.

Ich habe Gelegenheit gehabt, während des Drucks das Werk von Hollenberg, freilich nur flüchtig, anzusehen. Die kleine Schrift führt den Namen des Verfassers, den ich oben aus Rogg's Handbuch der math. Literatur entnommen

Digitized by Google

hatte, nicht auf dem Titel; ihren Inhalt bildet ein numerirtes, alphabetisch geordnetes Verzeichniß von Mathematikern, über welche einige oberflächliche, nicht sehr beträchtliche Nachrichten ertheilt werden, die sich auf fremde ungenannte Auctoritäten stützen. Das Werk ist also ohne wissenschaftliche Bedeutung.

Zu S. 51. Note 28.

Die in dieser Note gemachte Bemerkung kann ich, da ich inzwischen in den Besitz von Rosen's Ausgabe der Algebra von Mohammed ben Musa gekommen bin, jetzt dahin bestimmen, daß die Lesart العلمين sich wirklich in Rosen's Text befindet, also schon da Druckfehler ist; aus Rosen's Übersetzung geht indeß nicht deutlich hervor, ob er العلمين oder العملين gelesen habe; er übersetzt nämlich die Stelle so: This science has therefore been called by the name of these two rules, namely the rule of *jebr* or restoration, and of *mokābalah* or reduction, on account of the frequent use that is made of them. Ungenau ist hier in der Übersetzung die Trennung der Worte jebr und mokābolah; nur die Verbindung beider Namen, aljebr v'almokābalah, ist der Name der Wissenschaft, nicht der eine und der andere.

Zu S. 73.

Beachtenswerth ist ein Beispiel eines Hebräischen Zahlenausdrucks, in welchem sich ohne allen Zweifel ein Stellenwerth der Ziffern findet. Es heißt nämlich in der Masorah hinter dem Pentateuch: „die Anzahl der Verse im ganzen Gesetz ist fünftausend achthundert fünf und vierzig," und nun heißt es in der gewöhnlichen Weise:

יאיר ה ח מ ה יהיה שבעתים סימן׃

wo die Buchstaben des gesperrt gedruckten Wortes החמה, wenn man ihre Zahlenwerthe addirt, jene Zahl geben sollen. Nun ist aber als Zahl ה = 5, ח = 8, מ = 40; daß das erste ה nicht fünf, sondern fünftausend bedeutet, ist nach dem oben Gesagten ganz in der Ordnung; aber auch der zweite Buchstabe, ח, kann nicht acht, sondern muß achthundert gelten; es ist also hier die Theorie, vermöge welcher die Tausender wieder durch die Einheitszeichen ausgedrückt werden, noch einen Schritt weiter, nämlich auf die Hunderter ausgedehnt, ein Fortschritt, den die Griechen nicht gemacht haben. In der Zahl החמה ist nur noch übrig, für מ den Buchstaben ך zu substituiren, um eine ganz in unserm heutigen Positionssystem ausgedruckte Zahl zu erhalten.

Zu S. 94. Z. 6 flg.

Was ich über die Ausgaben des Boethius gesagt habe, ist dahin zu berichtigen, daß die Gesammtausgabe von Boethius Werken (Venedig 1492), welche ich während des Druckes zu Gesichte bekommen habe, die zu der fraglichen Stelle gehörige Figur gar nicht enthält, sondern nur einen leeren Platz, in welchen dieselbe wahrscheinlich später hat eingedruckt werden sollen. Vergl. Geom. lib. I. fol. 215. Die Textesworte sind durch Druckfehler und einige bedeutende Auslassungen ent-

Digitized by Google

stellt. — S. 93. Z. 6. 7. ist das Punctum hinter cognoverant zu streichen, und die Worte „a posterioribus appellabatur abacus" in Parentheſe zu ſetzen.

Zu S. 102. Note 61.

Für die wahre Bedeutung des Worts صفر, Ziffer, der zufolge es nur die Null bezeichnet, kann ich noch eine Auctorität beibringen, nämlich das Zeugniß eines Jüdiſchen Mathematikers, Eliab ben Abraham Migrachi, deſſen Arithmetik im Jahre 1533 zu Konſtantinopel unter folgendem Titel herausgekommen iſt:

ספר המספר להחכם האלהי מוהר״ר אליה המזרחי זל בקוסטנטינא קרית ארוננו הגדול והאריר שולטאן שולימאן ירום הודו ויתנשא: בשנת שתים עשרה למלכו: .... בשנת כי גר הייתי בארץ נכריה:

Hier heißt es Fol. בא, nachdem der Verfaſſer über die neun erſten Ziffern und ihren Gebrauch geſprochen hat, alſo:

ואולם הסימן העשירי שהוא כדמות גלגל הנה הוא בלתי מורה כמות כלל ונקרא בלשון לעז נו׳לא והוא נגזר מינו אשר יורה בלשונם על האין׳ ובלשון ישמעאל ס׳פרא אשר יורה ג״כ בלשונם על ההערר׳ ובלשון יון אודן אשר יורה גם כן על האין:

„Was aber das zehnte Zeichen anlangt, welches die Geſtalt eines Kreiſes hat, ſo bezeichnet dieſes im Allgemeinen keine Größe; es heißt in der fremden (Spaniſchen?) Sprache Nulla, und dieſes bedeutet daſelbſt ſoviel wie Nichts; in der Arabiſchen Sprache heißt es Siphra, welches ebenfalls Mangel (Abweſenheit) bedeutet; in der Griechiſchen Sprache heißt es Uden, und auch dieſes heißt Nichts."

Bemerkenswerth iſt, daß der Verfaſſer, während er ganz richtig *nulla* und οὐδὲν durch das einfache Wort אין, Nichts, ausdrückt, den Arabiſchen Ausdruck siphra wiedergiebt durch הערר (Inf. Niph.), das Fehlen, der Mangel ebenfalls ganz angemeſſen der Arabiſchen Bedeutung des Worts, deſſen Stammverbum, wie wir oben geſehen haben, leer ſein bedeutet. Es läßt ſich kaum bezweifeln, daß der gelehrte, in Konſtantinopel lebende Jude Arabiſch verſtanden und Arabiſche Mathematiker gekannt habe, und factiſch ſpricht für dieſe Vermuthung, daß er manche Kunſtausdrücke aus dem Arabiſchen entlehnt, z. B. הנרסא (auch הנרסה geſchrieben), Arab. هندسة, Geometrie; מעוקב, Kubikzahl, unhebräiſch und wahrſcheinlich transponirt das Arab. مكعّب; הכה, Hiph. v. נכה, multipliciren, überſetzt aus dem Arab. ضرب, welches ſo wie הכה ſchlagen bedeutet, während ungenauere Schriftſteller für multipliciren

den Ausdruck כפל, verdoppeln, gebrauchen, und andere mehr. Indeß sind Griechische Mathematiker seine Hauptquelle gewesen; er citirt unzähligemal Euklides אקלידש (ganz in der Arabischen Form اقليدس, nur einmal, fol. כא״ג, אקלואש geschrieben), und mehrmals die Arithmetik von Nikomachus Gerasenus, z. B. fol. ה׳ב und [בספר האר̈תמטיקא לניקומכוש הגהר̈שיני], ebenso ח׳ג und כ׳א; öfters citirt er die Arithmetik, worunter aber immer Nikomachus zu verstehen ist, z. B. א׳ג: ואומר שהמספר הנה גדרוהו הראשונים בספר האר̈תמטיקא בהעברה מן המאמר שהוא קבוץ האחדים „Die Alten haben in dem Buche Arithmetik ungenau die Zahl so definirt, daß sie eine Summe von Einheiten sei.“ Bei Nikom. 1. 7. μονάδων σύστημα; ähnlich fol. ה׳ב. Ebenso zeigt er mehrmals, daß er Griechisch versteht (s. fol. ב׳א, ז׳א, ז׳ג, ז׳ד). Unter diesen Umständen mag es ein verdächtiges Licht auf seine Auctorität in Betreff des Worts siphra werfen, daß er von diesem Worte den bei Griechischen Wörtern im Syrischen gebräuchlichen Pluralis auf —as bildet; es findet sich nämlich סיפרש fol. ג׳ב und oft, und סיפראש fol. ד׳ד und oft. Indeß ist diese grammatische Form wohl kein entscheidender Grund, der uns zu der Annahme bestimmen könnte, daß der Verfasser das Wort *siphra* nur aus Griechischen Schriftstellern, etwa aus Maximus Planudes, kennen gelernt habe.

Zu S. 114. 115.

Ähnliche Verbindungen zweier Brüche kommen bei Diophant öfter vor, in welchen der zweite Bruch nicht Theile der Einheit, sondern Theile des vorhergehenden Nenners anzeigt. So bedeutet, um nur ein Beispiel anzuführen, in der Aufgabe II, 36. der Ausdruck $\overline{\mu\varepsilon}^{\varsigma}$ καὶ ἥμισυ nicht $\frac{45}{6}+\frac{1}{2}$, sondern $\frac{45}{6}+\frac{1}{12}$. Ein Ausdruck der Art ist als eine Ellipse zu betrachten, indem hinter dem zweiten Bruche noch einmal die vorige Benennung wiederholt werden sollte, hier also καὶ ἥμισυ ἕκτου, und die Hälfte eines Sechstels. In dieser vollständigeren Weise finden wir solche Brüche häufig bei den Arabischen Mathematikern ausgedrückt; so giebt zum Beispiel Behâ-eddîn p. 281. folgende Regel für die Berechnung des Kubikinhalts der Kugel: الث من مكعّب القطر سُبْعَهُ ونصفَ سُبْعه ومن الباقي كذلك ومن الباقي كذلك

„Nimm von dem Kubus des Durchmessers ein Siebentel und die Hälfte eines Siebentels, von dem Reste ebenso, und von dem zweiten Reste auf dieselbe Weise.“ Das heißt, für den Durchmesser $=1$ ist der Inhalt der Kugel $=1-\frac{3}{14}-\frac{3}{14}(1-\frac{3}{14})-\frac{3}{14}[1-\frac{3}{14}-\frac{3}{14}(1-\frac{3}{14})]$ $=\frac{1331}{2744}$, ein Werth, der so viel zu klein ist, daß aus ihm $\pi=2{,}91$ folgen würde. Darum schlägt der Persische Übersetzer, Ruschen Ali, vor, das erste Mal $\frac{3}{14}$, das zweite Mal aber $\frac{1}{3}$ oder $\frac{3}{21}$ des ersten Restes abzuziehen; und diese

Regel

Digitized by

Regel drückt er in ganz analoger Weise so aus: از مکعب قطر سبع ونصف سبع او را کم کنند بعد از آن از باقي دو سبع وثلث سبع باقي کم کنند زیرا که دو سبع وثلث سبع باقي برابر ثلث باقیست

„Man zieht von dem Kubus des Durchmessers ein Siebentel und die Hälfte eines Siebentels, dann aber von dem Reste zwei Siebentel und ein Drittel eines Siebentels des Restes ab; denn zwei Siebentel und ein Drittel eines Siebentels des Restes sind gleich einem Drittel des Restes." Danach würde $\frac{1}{8}x = \frac{1}{14} - \frac{1}{42} = \frac{1}{21}$, also $x = \frac{2^2}{7}$. Die hier gebrauchten Brüche wären ebenso zu schreiben, wie ich es S. 115. mit der Diophantischen gethan habe, $\frac{1\frac{1}{2}}{7}$, $\frac{2\frac{1}{3}}{7}$.

Zum sechsten Kapitel S. 245.

Ich hatte, als ich dieses Kapitel niederschrieb, keine Ausgabe der Griechischen Anthologie bei der Hand, weshalb das, was ich dort über die in der Anthologie sich findenden Erwähnungen Diophant's gesagt habe, einiger Erweiterungen und Berichtigungen bedarf.

Diophant's Name wird überhaupt in sechs Epigrammen genannt; einmal in dem oben mitgetheilten arithmetischen Epigramme des Metrodorus, in welchem ohne Zweifel unser Arithmetiker gemeint ist. Als Datum zur Bestimmung von Diophant's Lebensalter ist indeß dieses Argument wenig brauchbar, weil wir über Metrodorus noch weniger wissen, als über Diophant; und wir können daher über diese Erwähnung unsers Auctors nicht mehr sagen, als Brunck T. III. p. 229. 230.: Si de auctore hujus epigrammatis constaret, et compertum esset Metrodori esse Scepsii, Diophanti Alexandrini, de quo hic agitur, aetas accuratius definiri posset.

Von den fünf übrigen Epigrammen, welche den Namen Diophantus nennen, werden in der Ausgabe von Jacobs, Abschnitt XI. (Συμποτικὰ, σκωπτικά) drei, nämlich Nr. 103. 245. 257. einem gewissen Lukillus, die beiden andern Nr. 111. und 114., einem gewissen Nikarchus zugeschrieben; in der Ausgabe von Brunck dagegen werden vier derselben dem Ersteren, der hier übrigens Lukillius heißt, zugetheilt (T. II. p. 324 sqq. No. 37. 41. 62. 113.), während das fünfte, bei Jacobs Nr. 111. als anonym, ἀδέσποτον bezeichnet wird (T. III. p. 172.). In allen fünfen ist aber ganz sicher nicht von dem großen Arithmetiker die Rede; vielmehr ist der Gegenstand derselben ein winziger Astrolog oder Astronom dieses Namens, der mit ausgelassenem Muthwillen lächerlich gemacht wird, eine Situation, die wir mit dem hohen Genie des Arithmetikers schwerlich identificiren können. Schulz hat in der Vorrede seiner Übersetzung des Diophantus vier von diesen Epigrammen deutsch mitgetheilt, die ich mir hier abzuschreiben erlaube.

I.

Aus Atomen bestehe die Welt, so lehrt' Epikurus,
Kleineres meinte er wohl, gäb es o Alkimos nicht.

Digitized by Google

Aus Diophanten hätt' er gesagt, dafern Diophantus
Mit ihm lebte, der viel kleiner ist als ein Atom.
Oder auch so: aus Atomen besteht das übrige Weltall,
Aus Diophanten besteht wiederum jedes Atom.
(Von Lukillus, Jacobs Nr. 103.)

II.

Als Diophantus der Winzige sich zu erhängen beschlossen,
Nahm er ein Spinnegeweb' schnürte die Kehle sich zu.
(Von Nikarchus, Jac. Nr. 111.)

III.

Als Diophantus den Arzt Hermogenes neulich im Traum sah,
Schützt' ihn kein Amulet, schlafend empfing er den Tod.
(Von Lukillus, Jac. Nr. 257.)

IV.

Zu Hermogenes sprach dem Arzt Diophantus der Sternwart,
Nur neun Monden noch sei er zu leben bestimmt.
Lachend erwiederte der: was doch neun Monden besagen,
Grüble du aus, ich selbst gebe dir kurzen Bescheid.
Sprach's und berührt' ihn bloß mit der Hand, und seht, — Diophantus,
Während er Andere schreckt, zappelte selber sich todt.
(Von Nikarchus, Jac. Nr. 114.)

Das fünfte der angeführten Epigramme ist weniger interessant, weshalb auch wahrscheinlich Schulz es nicht übersetzt hat. Sicher ist bei diesen lächerlichen Hyperbeln nicht an den würdigen Arithmetiker zu denken, und fast möchte ich annehmen, daß Diophantus hier ein bloß angenommener Name sei, an den ein einmal bestimmter Begriff angeknüpft wird, etwa wie Haug in einer großen Anzahl von Epigrammen Wahls lange Nase persiflirt. Schon allein der Umstand, daß Diophant hier auf drei ganz verschiedene Weisen ums Leben kommt, ist hinreichend, an jeder historischen Grundlage zweifeln zu lassen. Es bleibt übrigens der Ansicht eines Jeden anheimgestellt, in wieweit er den hier erwähnten Astronomen mit dem von Hypatia commentirten combiniren will.

Sind nun diese Epigramme auch nicht, wie Bachet glaubte, als Zeugen für das Zeitalter unsers Diophantus zu gebrauchen, so können wir doch eine nützliche Bemerkung daraus entnehmen, die nämlich, daß sowohl in dem Epigramme von Metrodorus, als in denen von Lukillus und Nikarchus der Name durchweg Διόφαντος, nicht Διοφάντης geschrieben wird; und ebenso lautet der Name bei Theon Alexandrinus (s. S. 251.).

Berlin, gedruckt bei Trowitzsch und Sohn.

Bayerische Staatsbibliothek München

Verzeichniß der Druckfehler.

S. 7 Z. 8 v. u. l. zweiten st. erſten.
= 10 = 11 = = = immorari.
= = = 6 = = = Frobesius.
= 14 = 2 = = = loro st. eoro.
= 20 = 4 = = = hatten.
= 31 = 11 = = = Aryabhattas.
= 35 = 5 = = = asseverat.
= 42 = 4.5 = = = Ulee (die Engliſche Schreibart für Ali).
= 47 = 9 v. o. l. opponere.
= = Note 23. l. Burgo.
= 49 Z. 1 v. o. l. وهو.
= = = 13 = = = اكر.
= 55 = 8 = = = deren st. dem.
= = = 10 = = = wörtlichen.
= 63 = 24 = = = Azteken.
= = = 25 = = = Cundinamarca.
= 64 = 12 = = = dem l.
= 70 = 16 = = = Falativa.
= 75 = 14 = = ist das Wort Stellvertreter wegzuſtreichen.
= 92 = 11 v. o. l. Unterglieder.
= 94 = 26 = = = die vorliegende Stelle.
= 94 = 3. 4 = = = loquitur.
= 101 Note 58. l. kurzen st. Augen.
= 104 Z. 18 v. o. l. nichts.
= 113 = 8 = = = ربع و نصف ربع.
= 127 = 11 v. u. l. 6000 st. 60.
= = = 6 = = = 6000 (ſtatt der erſten 60).
= 136 = 12 v. o. l. ward.
= 137 = 10 v. u. l. totidem Sexagenas.
= 150 = 8 v. o. l. ſpätere.
= = = 12 = = = in rationalen Zahlen.
= 159 Satz 31. Jede Primzahl u. ſ. w.
= 164 Z. 12 v. u. l. $\frac{2^n-2}{2n} = \frac{2^{n-1}-1}{n}$.
= 166 = 1 = = = δύναται.

S. 169 Z. 17 v. o. ſind die Werthe von *CE* und *ED* vertauſcht.
= 171 = 3 v. o. iſt bloß zu ſtreichen.
= 185 = 16 = = l. تاريخ.
= 197 = 7 = = = alſo st. als.
= 208 = 15 = = = $\frac{n+1}{n}$: n.
= 218 = 18 v. u. l. ἀριθμητική, geſchrieben habe,
= 223 = 5 v. u. l. an und für ſich.
= 228 = 12, 13 v. o. l. 6*n* st. *bn* (viermal).
= = = 19 v. o. l. εἰ st. ἐκ.
= 231 = 23 = = = compendiose.
= 234 = 2 v. u. l. aber st. oder.
= 235 = 17 v. o. iſt der wegzuſtreichen.
= 239 = 9 = = l. Zehn st. Zahl.
= 246 = 20 = = = ὃς, ἀδελφοῖς. Ebenſo Z. 21.
= 252 = 2 v. u. l. εὐφυῶς.
= 255 = 7 = = = Δωδεκάτην.
= = = 1 = = = Τῇδε.
= 256 = 1 v. o. l. uns st. nur.
= 258 = 19 = = = vor st. von.
= 298 = 16 = = = δυναμοδυναμοστόν.
= 299 = 11 v. o. l. $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2}$
= 303 = 9 v. u. l. عشر.
= 309 = 21 v. o. l. ſetze.
= 326 = 1 v. u. l. est st. ut.
= 327 = 11 v. o. l. Xilander.
= 329 = 3 v. u. l. zweiten st. erſten.
= 330 = 12 = = = $x = \frac{m^2 - C}{B}$
= 333 = 11 v. o. l. Nombres, G. l. p. 71. 3me éd.
= 336 = 10 v. o. l. der st. die.
= 338 = 11 = = = erhalten.
= 341 = 20 = = = y_1^2 st. x^2.

Digitized by Google

S. 350 Z. 9 = = = $x+1$ st. des einen $x-1$.
= 358 = 1 v. u. l. dieſer st. dieſen.
= 365 = 3 = = = Quadrat st. Qua=
= 367 = 1 v. o. l. nur st. nun.
= = = 8. 9 = = = wie Diophant be=ſonders.
= 368 = 11 v. o. l. III. st. II.
= 369 = 6 = = = nur st. nun.
= 370 = 3 v. u. l. Zwei ſolche Quadrat=zahlen.
= 373 = 10 v. u. l. m st. er.
= 374 = 16 = = iſt größer einmal zu ſtreichen.
= 380 = 6 v. u. l. $k_1 x$ st. $k_1 x^2$.
= 384 = 1. 2 = = = $= c^2$ st. $= b^2$.
= 386 = 12 = = = $\delta\tilde{\upsilon}\,\bar{\alpha}$.
= 388 = 12 = = = anzunehmen.
= 398 = 21 v. o. l. ἴσας.
= 400 = 4 = = iſt gabe wegzuſtreichen.
= = = 1 v. u. l. $> \frac{66,57}{19}$.
= 403 = 9 v. o. l. werden.
= 408 = 2 v. u. l. jedes.
= 413 = 7 v. o. l. Quadrate st. Aus=drücke.
= 415 = 18 v. o. l. 8 st. 9.
= 420 = 14 v. u. l. $m^3abc =$
= 428 = 7 v. o. l. < 1 st. > 1.

S. 435 Z. 6 v. u. l. zwei Quadratzahlen.
= 439 = 10 = = = melius.
= = = 14 v. o. l. Potenzen iſt im=mer durch die Diffe=renz der Wurzeln theil=bar. Es bleibt hier noch übrig, die Diviſion $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ wirklich auszuführen. Dar=um kann man denſelben Satz auch als Aufgabe ſtellen: Man ſoll die Diffe=renz zweier gleichna=migen Potenzen durch u. ſ. w.
= 444 = 12 v. u. l. $4x^2 + 4x + 6$.
= 448 = 9 = = = $2pq$.
= 449 = 12 v. o. l. r st. p.
= 450 = 18 = = = ergeben.
= 453 = 10 v. u. l. hatte.
= 455 = 10 v. o. l. hätte.
= 461 = 6 = = = πάλιν ἑκάτερος τούτων.
= 472 = 10 v. u. l. $= 4AE^2$.
= 477 = 14 = = = Kephalas.
= = = 11 = = = oder ſonſt zierlich.
= 485 = 11 = = = Lücken.
= = = 5 = = = Kephalas.
= 495 = 7 v. o. l. Mizrachi.

Digitized by Google

Digitized by Google

by Google

Digitized by Google